Université de Rennes 2024-2025

Topologie Algébrique
Contrôle du 14 mai 2025
Début 15 h - Durée 1 h

La consultation de document et l'utilisation d'outil électronique non connecté sont autorisées. Tous les résultats doivent néanmoins être justifiés et les calculs détaillés. On pourra cependant utiliser librement toutes les propriétés vues en CM et en TD.
Bon courage.

Soit $q \in \mathbb{C}^\times$ et $T := \mathbb{C}^\times/\langle q\rangle$ le groupe (topologique) quotient.

On suppose d'abord que q est d'ordre fini.

1. (4 points) Montrer qu'il existe un isomorphisme (de groupes topologiques) $T \simeq \mathbb{C}^\times$

> **Solution:** On suppose q d'ordre n et on considère l'application $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^n$. C'est un morphisme de groupes continu (car polynomial) surjectif (car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos) et ouvert (car holomorphe non constant) de noyau $\langle q\rangle$ (car l'équation $z^n = 1$ a exactement n solutions). Il résulte donc du premier théorème d'isomorphisme de Noether qu'il existe un isomorphisme de groupes $T := \mathbb{C}^\times/\langle q\rangle \simeq \mathbb{C}^\times$ qui est automatiquement continu et ouvert. C'est donc un homéomorphisme.

2. (2 points) Déterminer (à isomorphisme près) $\pi_1(T, \overline{1})$ ainsi que $\mathrm{H}_k(T)$ lorsque $k \in \mathbb{N}$.

> **Solution:** On a $T \simeq \mathbb{C}^\times \sim \mathbb{S}$ si bien que $\pi_1(T, \overline{1}) \simeq \mathbb{Z}$, $\mathrm{H}_0(T) \simeq \mathrm{H}_1(T) \simeq \mathbb{Z}$ et $\mathrm{H}_k(T) = 0$ pour $k \geq 2$.

On suppose maintenant que $|q| \neq 1$.

3. (4 points) Montrer que l'unique morphisme de groupes $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times, 1 \mapsto q$ induit un homéomorphisme $\mathbb{Z} \simeq \langle q\rangle$ (où $\mathbb{Z}$ a la topologie discrète et $\langle q\rangle$ la topologie induite).

> **Solution:** On considère le morphisme de groupes continu
>
> $$\mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto \frac{\ln|z|}{\ln|q|}.$$
>
> Celui-ci induit un morphisme de groupes continus $\langle q\rangle \to \mathbb{Z}, q^n \mapsto n$ qui n'est autre que l'inverse de i.

4. (2 points) En déduire une suite exacte stricte $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{C}^\times \xrightarrow{p} T \to 1$.

Solution: On dispose de l'application quotient $p : \mathbb{C}^\times \twoheadrightarrow T$ et on sait que i induit un isomorphisme de groupes topologiques entre $\mathbb{Z}$ et le noyau $\langle q \rangle$ de p.

5. (2 points) En déduire une suite exacte $0 \to \mathbb{Z} \to \pi_1(T, \overline{1}) \to \mathbb{Z} \to 0$.

Solution: Puisque $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \simeq \mathbb{Z}$, cela résulte du fait que $\mathbb{Z}$ discret et $\mathbb{C}^\times$ connexe par arcs.

6. (2 points) Déterminer (à isomorphisme près) $\pi_1(T, \overline{1})$.

Solution: Puisque T est un groupe topologique, $\pi_1(T, \overline{1})$ est un groupe abélien. Puisque $\mathbb{Z}$ est un groupe abélien libre, la suite exacte est scindée et on a donc $\pi_1(T, \overline{1}) \simeq \mathbb{Z}^2$.

7. (2 points) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ satisfait $e^\alpha = q$, alors α et $2i\pi$ sont linéairement indépendants (sur $\mathbb{R}$).

Solution: Sinon, on aurait $\alpha = 2i\pi t$ avec $t \in \mathbb{R}$ et donc $|q| = |e^\alpha| = |e^{2i\pi t}| = 1$.

8. (4 points) Montrer qu'alors l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^\times, (s,t) \mapsto e^{\alpha s + 2i\pi t}$ induit un isomorphisme (de groupes topologiques) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq T$.

Solution: C'est un morphisme de groupe continu ouvert surjectif (composé d'une application linéaire bijective et de l'exponentielle). De plus, on a

$$\begin{aligned} \varphi(s,t) \in \langle q \rangle &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, e^{\alpha s + 2i\pi t} = q^n = e^{\alpha n} \\ &\Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{Z}, \alpha s + 2i\pi t = \alpha n + 2i\pi m \\ &\Leftrightarrow (s,t) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

On en déduit un isomorphisme de groupes $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq T$ qui est continu et ouvert, c'est à dire un homéomorphisme.

9. (2 points) En déduire (à isomorphisme près) $\mathrm{H}_k(T)$ lorsque $k \in \mathbb{N}$.

Solution: On a $T \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S} \times \mathbb{S} = \mathbb{T}^2$ si bien que $\mathrm{H}_0(T) \simeq \mathbb{Z}$, $\mathrm{H}_1(T) \simeq \mathbb{Z}^2$, $\mathrm{H}_2(T) \simeq \mathbb{Z}$ et $\mathrm{H}_k(T) = 0$ pour $k > 2$.