∇-modules constructibles

Bernard Le Stum [1]

Université de Rennes 1

Caen, le 13 mai 2011

1. http://perso.univ-rennes1.fr/bernard.le-stum/

Sommaire

Et ∇ apparut !

On se donne un champ de forces continu $\vec{F}$ dans le plan défini en dehors d'un point O et satisfaisant

- $\overrightarrow{F}(M) \cdot \overrightarrow{OM} = 0$
- $\|\overrightarrow{F}(M)\| \cdot \|\overrightarrow{OM}\| = 1$

Le travail de la force $\overrightarrow{F}$ le long d'un circuit γ est $k2\pi$ où k est le nombre (orienté) de tours autour de O. La force $\overrightarrow{F}$ est en fait un champ gradient de potentiel θ, c'est à dire que $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla}\theta$ où θ est l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec une direction fixée. En fait, on a donc calculé

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \mathrm{d}\theta = k$$

ou encore, en passant aux complexes,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = k.$$

Le résultat ci dessus illustre lorsque $U = \mathbf{C}^\times$, le fait que l'accouplement d'intégration

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U) \times H^1_{dR}(U) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (\gamma, \omega) & \longrightarrow & \int_\gamma \omega \end{array}$$

est parfait : il fournit un isomorphisme

$$H^1_{dR}(U) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(\pi_1(U), \mathbf{C}).$$

Ce résultat est valide en fait pour n'importe quelle variété analytique (ou algébrique) de dimension d sur $\mathbf{C}$.

Dualement, on a

$$\pi_1(U)^{\mathrm{ab,alg}} \simeq H^{2d-1}_{dR,c}(U)$$

(ou l'exposant « alg » désigne l'enveloppe algébrique du groupe) .

Version non abélienne

La version non abélienne de ce résultat dit que l'on a une équivalence de catégories

$$\begin{array}{ccc} MIC(U/\mathbf{C}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}\pi_1(U) \\ E & \longrightarrow & E(x) \end{array}$$

ou x désigne un point de U et

- $MIC(U/\mathbf{C}) = \{$ modules cohérents à connexion intégrable sur U et régulière à l'infini $\}$
- $\mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}\pi_1(U) = \{$ représentations de dimension finie de $\pi_1(U)$ $\}$.

En fait, $MIC(U/\mathbf{C})$ est une catégorie tannakienne neutre et on a

$$\pi_1(U)^{\mathrm{alg}} \simeq \pi_1(MIC(U/\mathbf{C}))$$

(ou π_1 à droite est le groupe des automorphismes d'un foncteur fibre).

Passage aux faisceaux

Les catégories $\mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}\pi_1(U)$ et $MIC(U/\mathbf{C})$ ne sont pas stables par images directe. Mais on peut les étendre.

- On a d'une part
$$\mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}\pi_1(U) \hookrightarrow \mathbf{C}_U\mathrm{-Mod}$$
(l'image est composée des $\mathbf{C}_U$-modules localement constants de dimension finie).
- On a d'autre part
$$MIC(U/\mathbf{C}) \hookrightarrow \mathcal{D}_U\mathrm{-Mod}$$
(l'image est composée des $\mathcal{D}_U$-modules qui sont $\mathcal{O}_U$-cohérents et réguliers).

Ici, $\mathbf{C}_U$ désigne le faisceau constant de valeur $\mathbf{C}$ sur U et $\mathcal{D}_U$ désigne le faisceau des opérateurs différentiels algébriques sur U.

L'équivalence de catégories

$$\begin{array}{ccc} MIC(U/\mathbf{C}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Rep}_{\mathbf{C}}\pi_1(U) \\ E & \longrightarrow & E(x) \end{array}$$

se prolonge en un foncteur (solutions)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_U\text{−}\mathrm{Mod} & \xrightarrow{\mathcal{S}ol} & \mathbf{C}_U\text{−}\mathrm{Mod} \\ E & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(E, \mathcal{O}_U). \end{array}$$

Pour tenir compte des singularités (le foncteur $\mathcal{S}ol$ n'est pas exact à droite), il faut passer aux catégories dérivées et considérer

$$\begin{array}{ccc} D(\mathcal{D}_U\text{−}\mathrm{Mod}) & \xrightarrow{\mathrm{R}\mathcal{S}ol} & D(\mathbf{C}_U\text{−}\mathrm{Mod}) \\ E & \longrightarrow & \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(E, \mathcal{O}_U). \end{array}$$

(moralement, on remplace E par une résolution projective).

Exemple ($U = \mathbf{C}$)

- Pour $E := \mathcal{O} = \mathcal{D}/\mathcal{D}\partial$ on a

$$\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(E, \mathcal{O}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}([\mathcal{D} \xrightarrow{\partial} \mathcal{D}][1], \mathcal{O})$$

$$= [\mathcal{O} \xrightarrow{\partial} \mathcal{O}] = \mathbf{C} \quad (= \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(E, \mathcal{O})).$$

- De même, pour $E := j_*\mathcal{O}_{\mathbf{C}^\times} = \mathcal{D}/\mathcal{D}(z\partial - 1)$ on peut vérifier que

$$\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(E, \mathcal{O}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(E, \mathcal{O}) = j_!\mathbf{C}.$$

- Mais pour $E := \mathcal{H}_0 = \mathcal{D}/\mathcal{D}z$, on trouve par la même méthode

$$\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(E, \mathcal{O}) = 0_*\mathbf{C}[-1]$$

si bien que $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(E, \mathcal{O}) = 0$ mais $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(E, \mathcal{O}) = 0_*\mathbf{C}$.

Le théorème de Kashiwara

Théorème (Kashiwara)

Le foncteur $\mathrm{R}\mathcal{S}ol$ *induit une equivalence de catégories*

$$D_{\mathrm{hol,reg}}(\mathcal{D}_U\mathrm{-Mod}) \simeq D_{\mathrm{cons}}(\mathbf{C}_U\mathrm{-Mod})$$

où

- $D_{\mathrm{hol,reg}}(\mathcal{D}_U\mathrm{-Mod})$ est la catégorie dérivée des complexes bornés de $\mathcal{D}_U$-modules à cohomologie holonome régulière.
- $D_{\mathrm{cons}}(\mathbf{C}_U\mathrm{-Mod})$ est la catégorie dérivée des complexes bornés de $\mathbf{C}_U$-modules à cohomologie constructible.

On rappelle qu'un $\mathcal{D}_U$-module est holonome si sa variété caractéristique est de dimension minimale. On va discuter maintenant la notion de constructibilité.

Définition

Un $\mathbf{C}_U$-module $\mathcal{F}$ est constructible s'il existe un recouvrement localement fini par des sous-variétés $Y \subset U$ telles que $\mathcal{F}_{|Y}$ est localement constant pour tout Y. Ils forment une catégorie $\mathrm{Cons}(U)$.

Le théorème de Kashiwara a la conséquence suivante :

Corollaire (Kashiwara)

On a une equivalence de catégories

$$\mathcal{D}_U\mathrm{-Mod}^{\mathrm{perv}}_{\mathrm{hol,reg}} \simeq \mathrm{Cons}(U)$$

où $\mathcal{D}_U\mathrm{-Mod}^{\mathrm{perv}}_{\mathrm{hol,reg}}$ est la catégorie des $\mathcal{D}_U$-modules pervers réguliers holonomes. On rappelle maintenant la notion de perversité.

Perversité

Définition

Un module pervers est un complexe de $\mathcal{O}_U$-modules tel que

1. $\operatorname{codim} \operatorname{Sup} \mathcal{H}^n(E) \geqslant n$ pour $n \geqslant 0$
2. $\mathcal{H}^k_Z(E) = 0$ pour $k < \operatorname{codim} Z$.

Exemple (U courbe non singulière)

- Un module pervers est un complexe de $\mathcal{O}_U$-modules E tel que
  - $\mathcal{H}^0(E)$ est plat sur $\mathcal{O}_U$,
  - $\mathcal{H}^1(E)$ est à support fini
  - $\mathcal{H}^i(E) = 0$ pour $i \neq 0, 1$.
- Un $\mathcal{D}_U$-module cohérent est holonome si et seulement si il existe un ensemble fini de points en dehors desquels E est $\mathcal{O}$-cohérent. La restriction de E est alors un module cohérent à connexion intégrable et E est régulier si la connexion est régulière.

La situation en caractéristique $p > 0$

- On remplace $\mathbf{C}$ par un corps (parfait) k de caractéristique positive p (e.g. $k = \mathbf{F}_p$).
- On le relève en anneau de valuation (discrète) complet $\mathcal{V}$ (e.g. $\mathcal{V} = \mathbf{Z}_p$).
- On désigne par K son corps de fraction (e.g. $K = \mathbf{Q}_p$) supposé de caractéristique nulle.

On a donc : $k \twoheadleftarrow \mathcal{V} \hookrightarrow K$ (on notera $\tilde{a} \in k$ la réduction de $a \in \mathcal{V}$).

- On se donne une variété algébrique propre et lisse X sur k.
- On la relève en un schéma formel plat $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{V}$.
- On note $\mathcal{X}_K$ la fibre générique de $\mathcal{X}$ qui est une variété analytique propre et lisse sur K.

On a donc : $X \overset{\text{homeo}}{\hookrightarrow} \mathcal{X} \xleftarrow{\text{sp}} \mathcal{X}_K$ (on écrira $X \ni \tilde{x} \leftrightarrow \mathrm{sp}(x)$).

On supposera quand nécessaire que $F : \mathcal{X} \circlearrowleft$ est un relèvement du frobenius de X.

Exemple

- On a $\mathbf{F}_p := \{\tilde{0}, \ldots, \widetilde{p-1}\}$, $\mathbf{Z}_p = \{\sum_{i \geqslant 0} a_i p^i, \quad 0 \leqslant a_i < p\}$ et $\mathbf{Q}_p = \{\sum_{i > \infty} a_i p^i, \quad 0 \leqslant a_i < p\}$. La réduction de $x := \sum_{i \geqslant 0} a_i p^i \in \mathbf{Z}_p$ est $\tilde{a}_0 \in \mathbf{F}_p$. Pour $x := \sum_{i > \infty} a_i p^i \in \mathbf{Q}_p$, on définit $v(x) = \min\{i \in \mathbf{Z}, a_i \neq 0\}$ et $|x| = p^{-v(x)}$ si bien que $x \in \mathbf{Z}_p \Leftrightarrow |x| \leqslant 1$.
- Si $X = \mathbf{P}^N_k$, on peut choisir le relèvement $\mathcal{X} = \widehat{\mathbf{P}}^N_{\mathcal{V}}$ si bien que $\mathcal{X}_K = \mathbf{P}^{N,\mathrm{an}}_K$. Si $x := (x_0, \ldots, x_N)$ est un point rationnel de $\mathbf{P}^N_K$, on peut supposer que $\max\{|x_0|, \ldots, |x_N|\} = 1$ et alors $\tilde{x} := (\tilde{x}_0, \ldots, \tilde{x}_N)$.
- On utilise la géométrie de Berkovich. Un point de $\mathbf{P}^{1,\mathrm{an}}_K$ est essentiellement (et exactement si K était algébriquement clos et maximalement complet) un disque fermé de K ou ∞. Les points rigides sont les points de rayon nul et ∞. Le point de Berkovich $D(0,1)$ est le seul qui se spécialise en le point générique de $\mathbf{P}^1_k$. Le point $D(a, \eta)$ se spécialise en $\tilde{a}$ si $|a| \leqslant 1$ et $\eta < 1$ et en ∞ sinon. Remarquons que $\mathbf{P}^{1,\mathrm{an}}_K$ est compact et simplement connexe.

- Si U est un ouvert de X, on dispose de la catégorie $(F-)\ \mathrm{Isoc}^{\dagger}(U/K)$ des (F-) isocristaux surconvergents sur U qui est l'analogue de la catégorie $MIC(U/\mathbf{C})$.
- On dispose de la catégorie $(F-)\ \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}\mathbf{Q}}$-Mod des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur X.

THÉORÈME (BERTHELOT)

Si U est le complémentaire d'un diviseur Z, on a un plongement

$$\mathrm{sp}_* : \mathrm{Isoc}^{\dagger}(U/K) \hookrightarrow \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}\mathbf{Q}}-\mathrm{Mod}.$$

Son image est formée des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-modules cohérents qui sont $\mathcal{O}_{\mathcal{X}\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-cohérents

N.B. : Si E est un faisceau sur $\mathcal{X}_K$ pour la topologie de Berkovich, on notera E^{rig} le faisceau associé pour la topologie de Tate.

Surconvergence

Si $Y \subset X$, son tube dans $\mathcal{X}_K$ est $]Y[:= \mathrm{sp}^{-1}(Y)$. On notera $i :]U[\hookrightarrow \mathcal{X}_K$, l'inclusion du fermé et $j^\dagger := i_* i^{-1}$.

Exemple $(\mathcal{X} = \widehat{\mathbf{P}}^1_{\mathcal{V}})$

Si $U := \mathbf{A}^1_k$, alors $]U[= \mathbf{D}(0, 1^+)$ et $\Gamma(\mathbf{P}^{1,\mathrm{an}}_K, j^\dagger \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{1,\mathrm{an}}_K}) = K[t]^\dagger$.

Définition

- Un ∇-module sur $\mathcal{X}_K$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$-module E muni d'une connexion intégrable.
- Il est convergent si sa série de Taylor provient d'un isomorphisme
$$\epsilon : p_2^* E \simeq p_1^* E$$
défini sur $]X[_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}}$.
- C'est un isocristal surconvergent sur U/K si c'est en fait un $j^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$-module cohérent (structure alors unique).

Fonctions à pôles surconvergents

Définition

L'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^{\dagger}Z)$ des fonctions à pôle surconvergent le long de Z est le faisceau dont les éléments sont localement de la forme

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_l}{g^l}, \quad \exists c > 0, \quad \exists \eta < 1, \quad \|f_l\| \leqslant c\eta^l$$

si Z est défini dans X par $\bar{g} = 0$.

Théorème (Berthelot)

Le foncteur $E \mapsto \mathrm{Rsp}_* E^{\mathrm{rig}}$ induit une équivalence entre les $j^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$-modules cohérents et les $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^{\dagger}Z)$-modules cohérents.

Le théorème est aussi valide sans dériver (c'est un corollaire).

Opérateurs différentiels arithmétiques

Définition

- L'anneau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}$ des opérateurs différentiels arithmétiques sur $\mathcal{X}$ est le faisceau dont les éléments sont localement de la forme

$$P = \sum_{\underline{k}=\underline{0}}^{\infty} \frac{1}{\underline{k}!} f_{\underline{k}} \frac{\partial^{\underline{k}}}{\partial \underline{t}^{\underline{k}}}, \quad \exists c > 0, \quad \exists \eta < 1, \quad \|f_{\underline{k}}\| \leqslant c\eta^{|\underline{k}|}.$$

- L'anneau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z)$ des opérateurs différentiels arithmétiques à pôle surconvergent le long de Z est le faisceau dont les éléments sont localement de la forme

$$P = \sum_{\underline{k}=\underline{0}, l=0}^{\infty,\infty} \frac{1}{\underline{k}!} f_{\underline{k},l} \frac{\partial^{\underline{k}}}{g^l \partial \underline{t}^{\underline{k}}}, \quad \exists c > 0, \quad \exists \eta < 1, \quad \|f_{\underline{k},l}\| \leqslant c\eta^{|\underline{k}|+l}$$

si Z est défini dans X par $\bar{g} = 0$ (version de Huyghe).

La définition d'un module constructible est analogue à celle de faisceau constructible.

Définition

Un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$-module E est constructible s'il existe un recouvrement fini de X par des sous-variétés Y telles que $E_{|]Y[}$ soit localement libre.

On aura alors :

Théorème

Supposons que X est une courbe.
Si E est un module constructible sur $\mathcal{X}_K$, alors $\mathrm{Rsp}_* E^{\mathrm{rig}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathbf{Q}}}$-module pervers.

On conjecture que ce résultat est vrai pour X quelconque, de même que le théorème qui suit.

Théorème principal

Théorème

Supposons que X est une courbe. Alors,

1. *Si E est un ∇-module constructible convergent sur $\mathcal{X}_K$, alors $\mathrm{Rsp}_* E^{\mathrm{rig}}$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}\mathbf{Q}}$-module pervers.*
2. *On obtient une équivalence*

$$F - \nabla - \mathrm{Cons}(X) \simeq F - \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}\mathbf{Q}} - \mathrm{Mod}^{\mathrm{perv}}_{\mathrm{hol}}$$

où

- $F - \nabla - \mathrm{Cons}(X)$ est la catégorie des F-∇-modules constructibles sur $\mathcal{X}_K$ (automatiquement convergents).
- $F - \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}\mathbf{Q}} - \mathrm{Mod}^{\mathrm{perv}}_{\mathrm{hol}}$ est la catégorie des $F - \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}\mathbf{Q}}$-modules pervers holonomes (définition analogue à ci-dessus).

Démonstration

Variétés singulières

On peut aussi considérer le cas où U est une sous-variété localement fermée (pas nécessairement ouverte) de X. On désigne alors par $\bar{U}$ sa fermeture algébrique dans X et par $i :]U[\hookrightarrow]\bar{U}[$ le morphisme d'inclusion. On écrit encore $j^\dagger := i_* i^{-1}$.

Définition

- Un ∇-module sur $]\bar{U}[$ est un $\mathcal{O}_{]\bar{U}[}$-module E muni d'une connexion intégrable.
- Il est convergent si sa série de Taylor provient d'un isomorphisme défini sur $]\bar{U}[_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}$.
- C'est un isocristal surconvergent sur U/K si c'est en fait un $j^\dagger\mathcal{O}_{]\bar{U}[}$-module cohérent.

Ces définitions sont encore valables sans supposer que X est propre et lisse mais seulement que que X est lisse au voisinage de U et que $\bar{U}$ est propre.

Isocristaux surconvergents et $\mathcal{D}$-modules arithmétiques

Théorème (Caro)

Supposons que $\bar{U}$ est lisse et que $\bar{U}\backslash U$ est le complémentaire d'un diviseur Z. On a alors un plongement

$$\mathrm{sp}_+ : \mathrm{Isoc}^\dagger(U/K) \hookrightarrow \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\mathbf{Q}}-\mathrm{Mod}$$

Son image est formée des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-modules cohèrents à support dans $\bar{U}$ qui satisfont une condition de cohérence supplémentaire.

On s'attend à ce que $\mathrm{sp}_+ = \mathrm{Rsp}_*(j_! E)^{\mathrm{rig}}$ où $j :]\bar{U}[\hookrightarrow \mathcal{X}_K$ est le morphisme d'inclusion.

Ce théorème doit aussi être valide sans hypothèse de lissité sur $\bar{U}$ (Caro) et même pas non plus sur U.

Références

Démonstration

◂ Théorème

On suppose donc que X est une courbe. Soit E un ∇-module constructible convergent sur $\mathcal{X}_K$.

On peut alors trouver un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de points non-ramifiés de X, pour chaque $i = 1, \ldots, n$, un espace vectoriel de dimension finie H_i, un isocristal surconvergent E_U sur le complémentaire U de $\{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n\}$ et une suite exacte

$$0 \to \sum_{i=1}^{n} h_{i!}(\mathcal{O}_{]\tilde{x}_i[} \otimes_{K(x_i)} H_i) \to E \to E_U \to 0$$

où $h_i :]\tilde{x}_i[\hookrightarrow \mathcal{X}_K$ est l'inclusion de la classe résiduelle.

On sait déjà que $R\mathrm{sp}_* E_U^{\mathrm{rig}}$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\mathbf{Q}}$-module et on montre que

$$R\mathrm{sp}_*(h_!(\mathcal{O}_{]\tilde{x}[} \otimes_{K(x)} H)^{\mathrm{rig}} \simeq R\tilde{h}_+ H$$

avec $\tilde{h} : \mathrm{Spf}\,\mathcal{V}(x) \hookrightarrow \mathcal{X}$.

Démonstration (suite)

On en déduit facilement que $\mathrm{Rsp}_* E^{\mathrm{rig}}$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\mathbf{Q}}$-module pervers.

Pour obtenir une équivalence de catégories, il suffit de montrer que

$$\mathrm{Ext}^i_\nabla(E_1, E_2) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\mathbf{Q}}}(\mathrm{Rsp}_* E_1^{\mathrm{rig}}, \mathrm{Rsp}_* E_2^{\mathrm{rig}}).$$

Le cas $i = 0$ donnera la pleine fidélité et le cas $i = 1$ donnera la surjectivité. Tout repose sur le résultat suivant :

Théorème

Si E est un F-isocristal surconvergent sur $U \subset X$ et $x \notin U$, alors

$$\mathrm{RHom}_\nabla(E, h_! \mathcal{O}_{]x[}) = \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\mathbf{Q}}}(\mathrm{sp}_* E^{\mathrm{rig}}, \tilde{h}_+ K(x))$$

$$= \mathrm{Hom}_\nabla(\mathcal{R}_x(E), \mathcal{R}_x)[-1].$$

Démonstration (fin)

Dans ce dernier résultat, $\mathcal{R}_x$ désigne l'anneau de Robba en x et $\mathcal{R}_x(E)$ la fibre de Robba en x.

Du coté des isocristaux, l'isomorphisme s'obtient par adjonction en remarquant que $\mathcal{R}_x$ n'est autre que la fibre de $h_*\mathcal{O}_{]x[}$ au (tube du) point générique.

Du coté des $\mathcal{D}$-modules, on a d'abord par adjonction,

$$\mathrm{RHom}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\mathbf{Q}}}(\mathrm{sp}_* E^{\mathrm{rig}}, \tilde{h}_+ K(x)[1]) = \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}^\dagger_{\hat{x}\mathbf{Q}}}(\mathcal{R}_x^{\mathrm{bd}}(E), \delta_x)$$

où $\hat{x} \simeq \mathrm{Spf}\mathcal{V}(x)[[t]]$ est le complété formel de $\tilde{x}$ dans $\mathcal{X}$, $R_x^{\mathrm{bd}}(E)$ est la fibre de Robba bornée de E et

$$\delta_x := \mathcal{R}_x^{\mathrm{bd}}/\mathcal{O}_{\hat{x}\mathbf{Q}} \simeq \mathcal{R}_x/\mathcal{O}_x \quad (\mathcal{R}_x^{\mathrm{bd}} = \mathcal{O}_{\hat{x}\mathbf{Q}}({}^\dagger\tilde{x})).$$

On conclut alors avec un théorème de Richard Crew qui utilise l'existence du Frobenius.

Complément

Références

P. Berthelot.
Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules.
Astérisque, (279) :1–80, 2002.
Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II.

D. Caro.
Fonctions L associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Cas des courbes.
Compos. Math., 142(1) :169–206, 2006.

M. Kashiwara.
t-structures on the derived categories of holonomic $\mathcal{D}$-modules and coherent $\mathcal{O}$-modules.
Mosc. Math. J., 4(4) :847–868, 981, 2004.

B. Le Stum.
Constructible ∇-modules on curves.
Prépublications de l'IRMAR, 10(73) :39, 2010.