

1.5 Exercices

1.5.1 Topologie

Exercice 1.1 1. Soient I et J deux intervalles infinis de \mathbb{R} . Montrer qu'il existe une bijection entre I et J . Montrer qu'il existe une bijection continue si et seulement si I et J sont tous les deux ouverts, ou fermés bornés ou semi-ouverts. Montrer qu'alors c'est un homéomorphisme.

2. Montrer que si $m, n > 0$, il existe une bijection entre \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m .
3. Montrer qu'il existe une bijection continue $[0, 1] \rightarrow \mathbb{S}$ mais pas d'homéomorphisme.
4. Montrer qu'il n'existe pas de surjection continue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus 0$ (et donc pas d'homéomorphisme).
5. Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (et donc pas d'homéomorphisme).
6. Montrer^a qu'il existe une surjection continue $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ (*courbe de Péano* par exemple) mais pas de bijection continue (et donc pas d'homéomorphisme).

a. Le résultat reste valide si on remplace $[0, 1]^2$ par n'importe quel espace compact connexe localement connexe à base dénombrable (théorème de Hahn–Mazurkiewicz).

Exercice 1.2 1. On désigne par B_n , U_n et Δ_n les groupes des matrices réelles inversibles d'ordre n qui sont respectivement triangulaires supérieures, triangulaires supérieures unipotentes (des 1 sur la diagonale) et diagonales. Montrer que la multiplication induit un homéomorphisme $\Delta_n \times U_n \simeq B_n$.

2. On désigne maintenant par O_n le groupe orthogonal et par $B_n^+ \subset B_n$ le sous-groupe des matrices à coefficients diagonaux > 0 . Montrer^a que la multiplication induit un homéomorphisme $O_n \times B_n^+ \simeq \mathrm{GL}_n$.

a. C'est la décomposition d'Iwasawa (ou de Gram–Schmidt).

1.5.2 Connexité, compacité

Exercice 1.3 1. Soit C (resp. C') une partie convexe compacte de \mathbb{R}^n telle que $0 \in \mathring{C}$ (resp. $0 \in \mathring{C}'$).

- (a) Montrer que si $x \neq 0$, alors $[0x]$ rencontre ∂C en un unique point^a $y =: \partial_C(x)$ et que $[0x] \cap C = [0y]$.
- (b) Montrer que l'application $f : \partial C \rightarrow \partial C'$, $x \mapsto \partial_{C'}(x)$ est bijective.
- (c) Montrer que f se prolonge en une application bijective

$$F : C \rightarrow C', \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\|x\|}{\|\partial_C(x)\|} \partial_{C'}(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (d) Montrer que f et F sont des homéomorphismes (on se ramènera au cas $C' = \mathbb{B}^n$).
2. En déduire que si C et C' sont des convexes compacts de même dimension finie, alors il existe un homéomorphisme $C \simeq C'$ qui induit un homéomor-

phisme $\partial C \simeq \partial C'$.

a. C'est la projection radiale issue de 0.

- Exercice 1.4**
- Montrer que l'application $x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}$ induit un homéomorphisme $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{B}^n$.
 - On désigne par $a := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et on identifie \mathbb{R}^n avec l'hyperplan d'équation $x_{n+1} = 0$ dans \mathbb{R}^{n+1} .
 - Soit $x \in \mathbb{S}^n$. Montrer que si $x \neq a$, la droite (ax) rencontre \mathbb{R}^n en un unique point $f(x)$ que l'on déterminera.
 - Montrer que l'application $f : \mathbb{S}^n \setminus a \rightarrow \mathbb{R}^n$ est bijective et déterminer son inverse.
 - En déduire que f est un homéomorphisme ^a.

a. C'est la projection stéréographique (sur l'hyperplan équatorial).

- Exercice 1.5**
- Montrer que si X est un espace topologique séparé et que $K, K' \subset X$ sont compacts disjoints, alors il existe des voisinages ouverts disjoints U et U' de K et K' dans X .
 - Soit $p : X \twoheadrightarrow X'$ une application surjective continue fermée à fibres compactes ($p^{-1}(x')$ compact si $x' \in X'$). Montrer que si X est séparé, alors X' aussi.
 - Soit $p : X \twoheadrightarrow X'$ une application surjective continue fermée. Montrer que si X est compact, alors X' aussi.
 - Montrer que si X est séparé (resp. compact) et $A \subset X$ est compact, alors X/A est séparé (resp. compact).

- Exercice 1.6** Montrer que la *bouteille de Klein*, c'est-à-dire, le quotient \mathbb{K}_2 de \mathbb{T}^2 par la relation

$$(z, w) \mathcal{R} (z', w') \Leftrightarrow \begin{cases} zz' = 1 \\ w + w' = 0, \end{cases}$$

est un espace compact (on rappelle que $\mathbb{T} = \mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$).

- Exercice 1.7** Soit Z une partie de Y , $f : Z \rightarrow X$ une application continue et

$$p : X \coprod Y \twoheadrightarrow X \coprod_f Y$$

la projection.

- Montrer que

$$\forall A \subset X, \quad p^{-1}(p(A)) = A \coprod f^{-1}(A)$$

et que

$$\forall B \subset Y, \quad p^{-1}(p(B)) = f(B \cap Z) \coprod f^{-1}(f(B \cap Z)) \cup B.$$

- Montrer que p induit une *bijection* continue entre $X \coprod Y \setminus Z$ et $X \coprod_f Y$.

3. Supposons que Z est fermé dans Y . Montrer que alors p induit un homéomorphisme entre X (resp. $Y \setminus Z$) et un fermé (resp. un ouvert) de $X \coprod_f Y$.
4. Supposons que Z est compact. Montrer que si X et Y sont séparés (resp. compacts), alors $X \coprod_f Y$ est séparé (resp. compact).

- Exercice 1.8**
1. Montrer que \mathbb{R}^n , \mathbb{B}^n et \mathbb{S}^n sont des variétés topologiques.
 2. Montrer que $\mathbb{B}^n / \mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{S}^n$. En déduire que $[0, 1] / \{0, 1\} \simeq \mathbb{S}$.
 3. Montrer que $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{B}^n \coprod_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbb{B}^n$
 4. Montrer que $\mathbb{S}^n / (\mathbb{S}^{n-1} \times 0) \simeq \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$.
 5. Montrer que $\mathbb{B}^n / (\mathbb{B}^{n-1} \times 0) \simeq \mathbb{B}^n \vee \mathbb{B}^n$.

- Exercice 1.9**
1. Montrer que $\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{S}^n / \mathcal{R}$ avec $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x + y = 0$.
 2. Montrer que \mathbb{P}^n est compact.
 3. Montrer que $\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{B}^n / \mathcal{R}'$ avec $x \mathcal{R}' y \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ et $x + y = 0$.
 4. Montrer que^a

$$\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{P}^{n-1} \coprod_p \mathbb{B}^n$$

où $p : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ est l'application canonique.

5. Montrer que \mathbb{P}^n est une variété topologique.
6. Montrer que l'application $f : z \rightarrow z^2$ induit un homéomorphisme $\mathbb{P} \simeq \mathbb{S}$ et que

$$\mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{S} \coprod_f \mathbb{B}^2.$$

a. En particulier, on peut identifier \mathbb{B}^n (ou \mathbb{R}^n si on préfère) avec un ouvert de \mathbb{P}^n et \mathbb{P}^{n-1} avec le fermé complémentaire.

- Exercice 1.10** Si X et Y deux espaces topologiques avec X séparé, alors la topologie^a de $\mathcal{C}(X, Y)$ est la topologie engendrée par les ouverts

$$\mathcal{U}_{K,V} := \mathcal{C}((X, K), (Y, U))$$

où K est compact dans X et V est ouvert dans Y .

1. Montrer que si $\varphi : X \times Y \rightarrow Z$ est une application continue avec Y séparé, alors l'application

$$\tilde{\varphi} : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z), \quad x \mapsto (\varphi_x : y \mapsto \varphi(x, y))$$

est bien définie et continue.

2. Montrer que si X est localement compact, alors l'application

$$\mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y, \quad (f, x) \mapsto f(x)$$

est continue.

3. En déduire que si Y est localement compact, on a une bijection (appelée *curryfication*)

$$\mathcal{C}(X \times Y, Z) \simeq \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)), \quad \varphi \mapsto \tilde{\varphi}.$$

a. Lorsque Y est un espace métrique, c'est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

1.5.3 Homotopies

Exercice 1.11 Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ deux applications continues.

1. Montrer que si $f(X) \cup g(X) \subsetneq \mathbb{S}^n$, alors $f \sim g$.
2. Montrer que la condition $\forall x \in X, f(x) + g(x) \neq 0$ implique que $f \sim g$.

Exercice 1.12 Montrer qu'une application continue $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$ est homotope à une application constante si et seulement si elle se prolonge en une application continue $F : \mathbb{B}^n \rightarrow X$.

Exercice 1.13 1. Montrer que \mathbb{S}^n est un rétract (fort) par déformation de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$.
 2. En déduire que si E est un espace vectoriel de dimension finie et H un sous-espace vectoriel de codimension $k+1$, alors le complémentaire $E \setminus H \sim \mathbb{S}^k$.

Exercice 1.14 1. Montrer que le bouquet $Y = \mathbb{S}((1, 0), 1) \cup \mathbb{S}((-1, 0), 1)$ est un rétract (fort) par déformation de $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$.
 2. Montrer que $Y := \mathbb{S}^n \cup (0 \times \mathbb{B})$ est un rétract (fort) par déformation de $X := \mathbb{B}^{n+1} \setminus (\mathbb{S}^{n-1}(0, 1/2) \times 0)$.

Exercice 1.15 1. Montrer que le groupe U_n est contractile et en déduire que $B_n \sim \Delta_n$.
 2. Montrer que le groupe B_n^+ est contractile et en déduire que $GL_n \sim O_n$.

1.5.4 Chemins et lacets

Exercice 1.16 1. Montrer que \mathbb{S}^n est connexe (par arcs) pour $n > 0$.

2. Montrer que SO_n est connexe ^a (par arcs).
3. En déduire que, si $n > 0$, O_n a deux composantes connexes (par arcs).
4. Même chose pour GL_n .

a. On rappelle que tout élément de SO_n est conjugué à une matrice diagonale par blocs de taille ≤ 2 .

Exercice 1.17 1. Montrer que l'application $[0, 1] \rightarrow \mathbb{S}, t \mapsto e^{2i\pi t}$ induit une bijection entre l'ensemble des applications continues $\hat{\gamma} : \mathbb{S} \rightarrow X$ et l'ensemble des lacets γ dans X .

2. Montrer de même que si γ, γ' sont deux lacets en x dans X , on a une bijection entre l'ensemble des homotopies $\hat{h} : \hat{\gamma} \sim_{\{1\}} \hat{\gamma}'$ et l'ensemble des homotopies $h : \gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma'$.
3. Montrer que si $h' : \hat{\gamma} \sim \hat{\gamma}'$ est une homotopie (quelconque) et qu'on pose pour $t \in [0, 1]$, $\delta(t) = h'(1, t)$, alors $\gamma \cdot \delta \sim_{\{0,1\}} \gamma' \cdot \delta$.

Exercice 1.18 Soit γ un lacet dans X et $\hat{\gamma} : \mathbb{S} \rightarrow X$ l'application correspondante (donnée par $\hat{\gamma}(e^{2i\pi t}) = \gamma(t)$). Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. γ est un lacet trivial.
2. $\hat{\gamma}$ est homotope relativement à 1 à une application constante.
3. $\hat{\gamma}$ est homotope à une application constante.
4. $\hat{\gamma}$ se prolonge en une application continue $\tilde{\gamma} : \mathbb{B}^2 \rightarrow X$.

Exercice 1.19

1. Montrer que si γ est un chemin dans une variété topologique X , alors il existe une suite $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_r = 1$ et, pour $i = 0, \dots, r-1$, un ouvert $U_i \subset X$ homéomorphe à \mathbb{R}^n tel que $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$.
2. En déduire que si $\dim(X) \geq 2$, alors γ est homotope (à extrémités fixées) à un chemin γ' dont le support est rare : $\widehat{\text{im}(\gamma')} = \emptyset$.
3. En déduire que \mathbb{S}^n est simplement connexe pour $n \geq 2$.
4. En déduire que si E est un espace vectoriel de dimension finie et H un sous-espace vectoriel de codimension ≥ 3 , alors $E \setminus H$ est simplement connexe.