Prénom Nom :   Groupe :

Université de Rennes 2024-2025

Outils mathématiques 2
Contrôle du vendredi 7 mars 2025
Début 14h - Durée 30mn

Mis à part le formulaire sur les développements limités, la consultation de document et l'utilisation d'outil électronique sont prohibées (passez votre téléphone en mode avion).

1. (10 points) Donner s'ils existent et sans aucune justification les développements limités suivants en $x = 0$ à l'ordre 3 :

   (a) (1 point) $2\sin(x) =$

   Solution: $2\sin(x) = 2x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

   (b) (1 point) $\sin(2x) =$

   Solution: $\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$

   (c) (2 points) $\sin^2(x) =$

   Solution: $\sin^2(x) = x^2 + o(x^3)$

   (d) (2 points) $2\sin(x)\cos(x) =$

   Solution: $2\sin(x)\cos(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$

   (e) (2 points) $\dfrac{1}{\cos(x)} =$

   Solution: $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$

   (f) (1 point) $\dfrac{1}{\sin(x)} =$

   Solution: $\frac{1}{\sin(x)} =$ IMPOSSIBLE

   (g) (1 point) $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) =$

   Solution: $\cos(\frac{1}{x}) =$ IMPOSSIBLE

2. (10 points) Calculer – en détaillant les étapes intermédiaires – le développement limité de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre 2 dans chacun des cas suivants :

(a) (2.5 points) $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$,

Solution: On a $(1 + u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + o(u)$ et donc

$$f(x) = 2\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{4}\right) + o(x^2) = 2 + \frac{x^2}{4} + o(x^2).$$

(b) (2.5 points) $f(x) = e^{x\ln(1+x)}$,

Solution: On a $x\ln(1 + x) = x^2 + o(x^2)$ et $e^u = 1 + u + o(u)$ si bien que

$$f(x) = 1 + x^2 + o(x^2).$$

(c) (2.5 points) $f(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$,

Solution: On a

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x - x^3/6 + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$$

et $\ln(1 + u) = u + o(u)$ si bien que

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^2).$$

(d) (2.5 points) $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 + 2x}}$.

Solution: On a $(1 + u)^{-1/2} = 1 - u/2 + 3u^2/8 + o(u^2)$ et donc

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x(1 + 2x)^{-1/2} \\ &= (1 + x + x^2/2)(1 - x + 3x^2/2) + o(x^2) \\ &= (1 - x + 3x^2/2) + x(1 - x) + x^2/2 + o(x^2) \\ &= 1 + x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$