Calcul différentiel ordinaire

Bernard Le Stum

19 avril 2023

– La nouvelle science de l'emploi des infiniment petits résout actuellement des questions qui paraissaient jadis insolubles (Léon Tolstoï - Guerre et Paix [1]).

Réalisé en LaTeX à partir du modèle Legrand Orange Book

1. Traduction Paskévitch

Table des matières

Introduction

Il s'agit d'un cours d'introduction aux équations différentielles et aux systèmes différentiels en une variable (c'est à dire *ordinaires*). Nous nous concentrerons essentiellement sur le cas linéaire et plus particulièrement sur celui des coefficients constants. Dans une première partie, nous introduisons la notion d'équation différentielle et nous traitons en détail le cas des équations linéaires de rang un ainsi que celui des équations à coefficients constants de rang deux. En ce qui concerne les équations à coefficients constants, nous travaillons sur le corps des complexes car la situation est bien plus agréable. Dans une seconde partie, nous présentons les éléments de la théorie des espaces vectoriels normés nécessaires à l'étude des systèmes différentiels. Après quelques rappels sur la diagonalisation et la trigonalisation, nous introduisons dans la troisième partie la notion d'exponentielle de matrice et nous discutons la dérivation des fonctions vectorielles. Dans la quatrième et dernière partie, nous définissons la notion de système différentiel. Nous étudions les systèmes à coefficients constants sur le corps des complexes en mettant à profit la notion d'exponentielle de matrice. Enfin, nous démontrons le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire et nous en déduisons le théorème de variation de la constante. Le cours est parsemé d'exemples concrets et chaque partie est suivie d'une session d'exercices corrigés (pour la plupart).

1. Équations différentielles

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.1 Une *équation différentielle (implicite) d'ordre n* est une égalité

$$(\mathcal{E}) \quad g(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0 \tag{1.1}$$

où $g : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ est une fonction de $n+2$ variables et $x : I \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle n fois dérivable sur un intervalle I. Si l'égalité est satisfaite pour tout $t \in I$, on dit que x est *solution* de l'équation.

En pratique, on écrira plus simplement

$$g(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0.$$

Déterminer toutes les solutions de l'équation s'appelle *résoudre* ou *intégrer* l'équation différentielle et le graphe d'une solution est une *courbe intégrale*. Souvent l'ensemble U et l'intervalle I ne sont pas explicités lors de l'énonciation du problème.

Attention : on utilise aussi parfois x pour le nom de la variable et y pour celui de la fonction et il faut savoir jongler entre les deux notations.

Exemple

1. Les solutions de l'équation $x' = \cos(t)$ (c'est à dire $x'(t) - \cos(t) = 0$) sont les fonctions $x(t) = \sin(t) + k$ pour $k \in \mathbb{R}$.
2. Les solutions de l'équation $x' = x - 1$ sont les fonctions $x(t) = 1 + ke^t$ avec $k \in \mathbb{R}$.
3. Les solutions de l'équation $tx' = 2x$ sont les fonctions

$$x(t) = \begin{cases} kt^2 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ lt^2 & \text{si } t < 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

avec $k, l \in \mathbb{R}$.

FIGURE 1.1 – Courbes intégrales de $x' = \cos(t)$

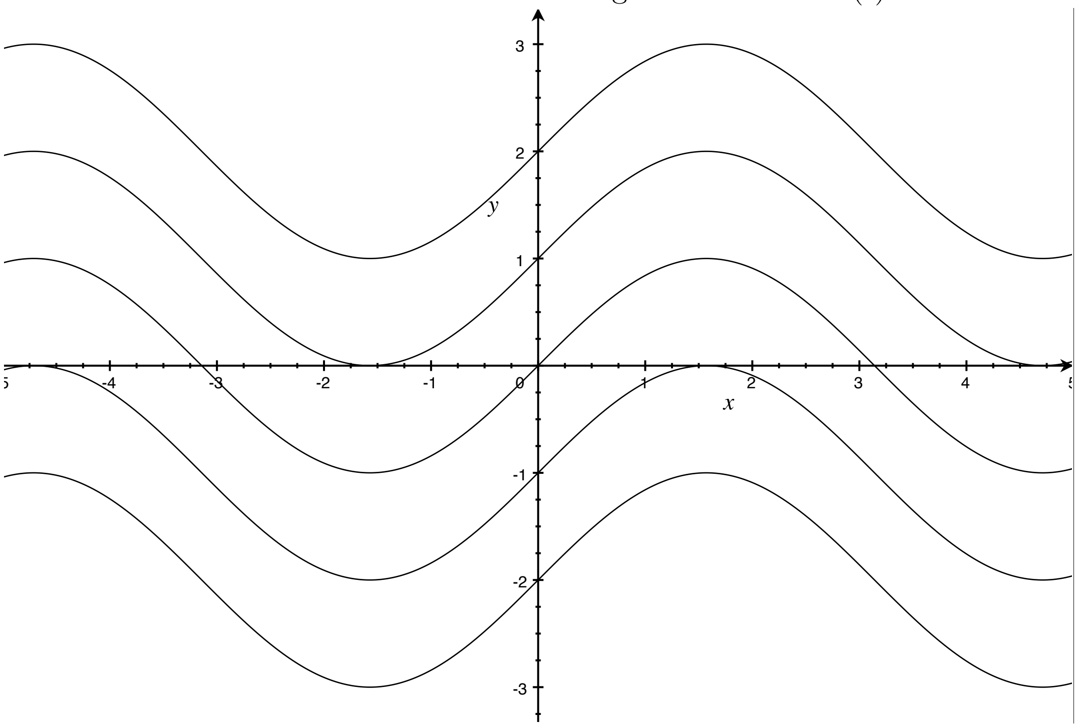


FIGURE 1.2 – Courbes intégrales de $x' = x - 1$

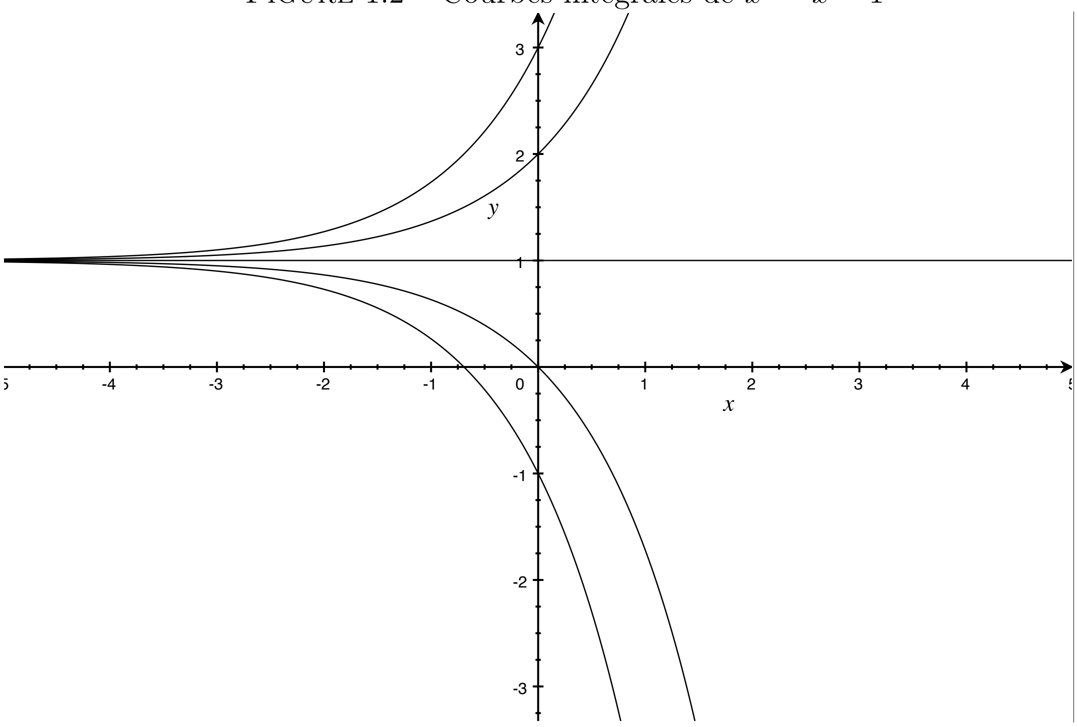
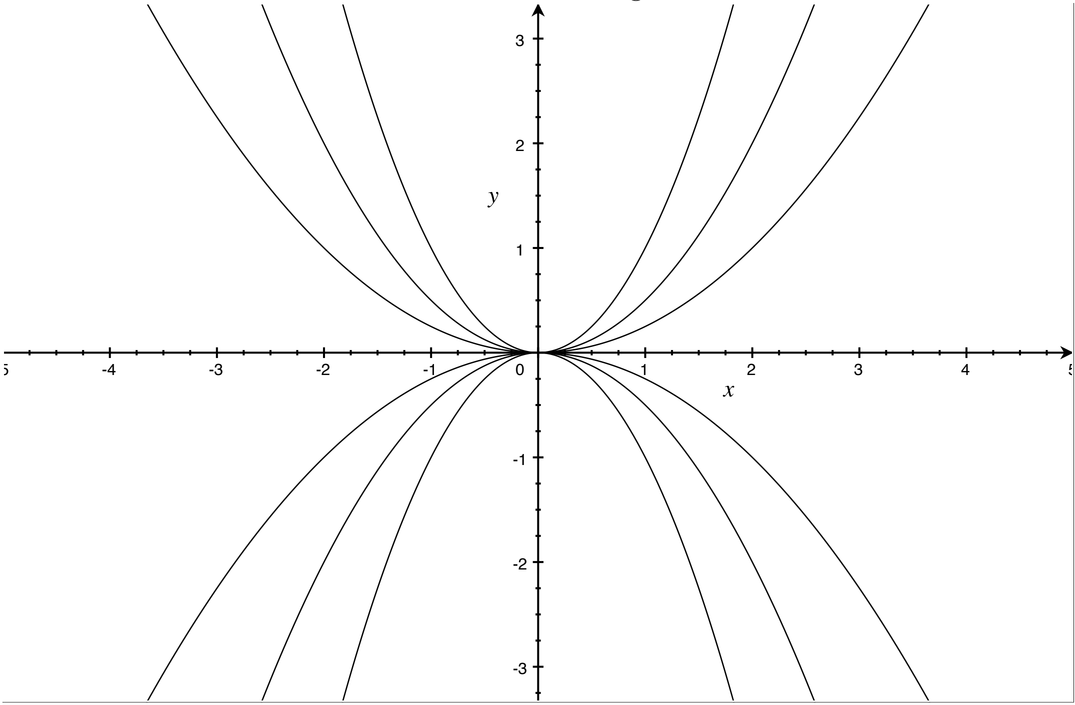


FIGURE 1.3 – Courbes intégrales de $tx' = 2x$



4. Les solutions de l'équation $xx' = t$ sont les fonctions $x(t) = \pm\sqrt{t^2 + c^2}$ avec $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ainsi que les fonctions $x(t) = \pm\sqrt{t^2 - c^2}$ définies sur $]-\infty, -c[$ et sur $]c, +\infty[$ avec $c \in \mathbb{R}_{>0}$.
5. Les solutions de l'équation $x' = x^2$ sont la fonction nulle ainsi que les fonctions $x(t) = \frac{1}{c-t}$ définies sur $]-\infty, c[$ ainsi que sur $]c, +\infty[$.
6. Les solutions de l'équation $x'' + x = 0$ sont les fonctions $x(t) = k\cos(t) + l\sin(t)$ avec $k, l \in \mathbb{R}$ (par exemple $x(t) = \cos(t - \pi/4)$ avec $k = l = \sqrt{2}/2$).
7. Les solutions de l'équation $x^{(n)} = 0$ sont tous les polynômes $k_{n-1}t^{n-1} + \cdots + k_1 t + k_0$ de degré au plus $n - 1$.

Définition 1.1.2 Une *équation différentielle explicite d'ordre n* est une égalité

$$(\mathcal{E}) \quad x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)) \tag{1.3}$$

où $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de $n+1$ variables et $x : I \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle n fois dérivable sur un intervalle ouvert I.

On écrira alors plus simplement

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}).$$

On passe d'une équation explicite à une équation implicite par la formule

$$g(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = x^{(n)} - f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})$$

(mais on ne peut pas toujours passer d'une équation implicite à une équation explicite).

Exemple Les équations $x' = \cos(t)$, $x' = ax$, $x' = x^2$, $x'' + x = 0$ ou $x^{(n)} = 0$ sont explicites mais les équations $tx' = 2x$ et $xx' = t$ ne sont *pas* explicites.

FIGURE 1.4 – Courbes intégrales de $xx' = t$

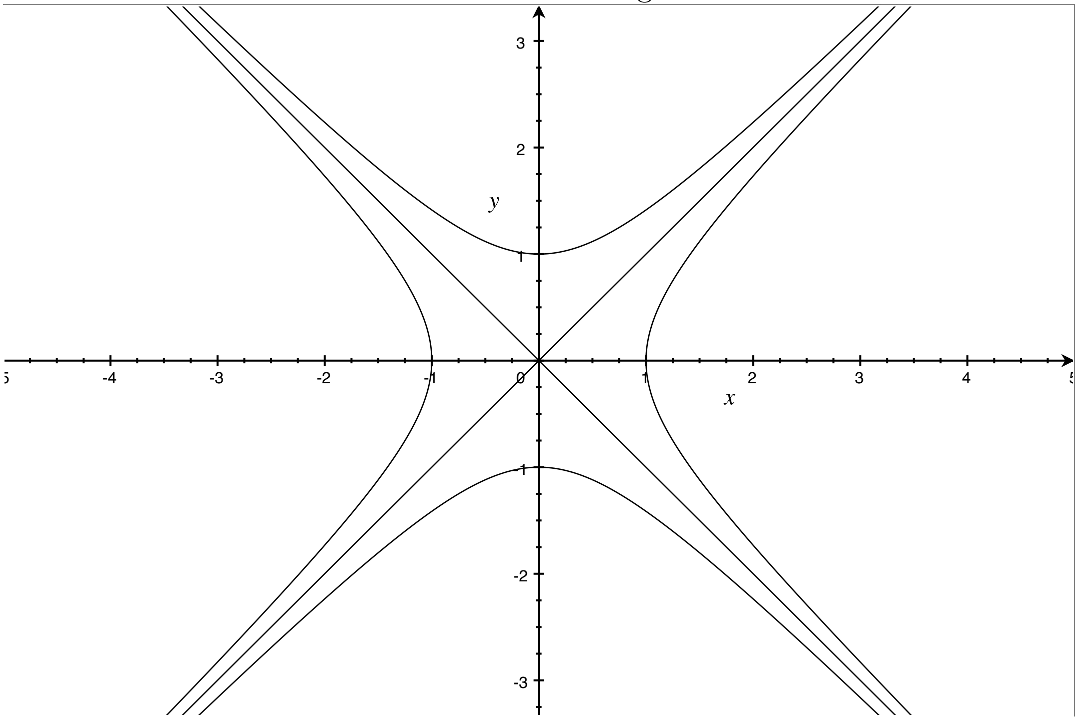
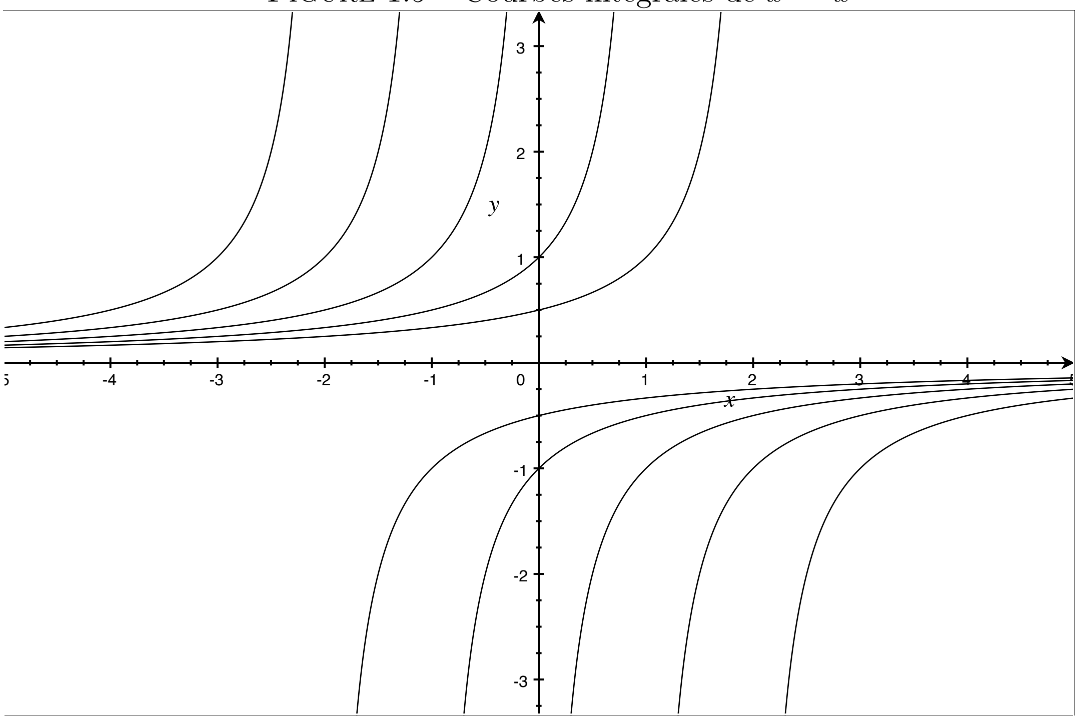


FIGURE 1.5 – Courbes intégrales de $x' = x^2$



Définition 1.1.3 On appelle *conditions initiales* une suite d'égalités

$$x(t_0) = k_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = k_{n-1}$$

où $k_0, \dots, k_{n-1}$ sont des réels, $x : I \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I et $t_0 \in I$. Un *problème de Cauchy* est la conjonction d'une équation différentielle et de conditions initiales :

$$g(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0 \quad \text{et} \quad x(t_0) = k_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = k_{n-1}. \tag{1.4}$$

Exemple

1. Le problème de Cauchy $x' = \cos(t)$ et $x(0) = 0$ a pour unique solution $x(t) = \sin(t)$.
2. Le problème de Cauchy $x' = x - 1$ et $x(0) = 0$ a pour unique solution $x(t) = 1 - e^t$.
3. Le problème de Cauchy $tx' = 2x$ et $x(0) = 0$ a une infinité de solutions : toutes les fonctions décrites en (1.2).
4. Le problème de Cauchy $xx' = t$ et $x(0) = 0$ a deux solutions $x(t) = t$ et $x(t) = -t$.
5. Le problème de Cauchy $x' = x^2$ et $x(0) = 1$ a pour unique solution $x(t) = \frac{1}{1-t}$.
6. Le problème de Cauchy $x'' + x = 0$ et $x(0) = x'(0) = 0$ a pour unique solution $x(t) = 0$.
7. Le problème de Cauchy $x^{(n)} = 0$ et $x^{(n-1)}(0) = \cdots = x(0) = 1$ a pour unique solution
$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2} + \cdots + t + 1.$$

Remarque Le *principe de Cauchy-Lipschitz* stipule qu'un problème de Cauchy *explicite* possède une unique solution. Géométriquement, cela signifie que les courbes intégrales recouvrent tout le plan ($I \times \mathbb{R}$ plus exactement) et ne se coupent pas. Afin de transformer ce principe en théorème, il faudrait préciser les hypothèses – et le démontrer. Nous traiterons uniquement le cas linéaire à la fin du cours.

Remarque Pour résoudre une *équation différentielle à variables séparées*

$$f(x)x' = g(t)$$

(où on a écrit $f(x)$ pour $f \circ x$), on choisit des primitives[1] F et G de f et g respectivement et on a alors

$$f(x)x' = g(t) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, F(x) = G(t) + k.$$

Exemple

1. Résoudre $xx' = t$. On a
$$xx' = t \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{t^2}{2} + k \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{t^2 + 2k} \text{ et } t^2 + 2k \geq 0.$$
Si $k \geq 0$, on écrit $2k = c^2$ et on trouve donc $x(t) = \pm\sqrt{t^2 + c^2}$. Si $k < 0$, on écrit $2k = -c^2$ et on trouve donc $x(t) = \pm\sqrt{t^2 - c^2}$ sur $]-\infty, c[$ et sur $]c, +\infty[$.

1. Il faut bien sûr que de telles primitives existent, par exemple que f et g soient continues par morceau.

2. Résoudre $x' = x^2$. On cherche d'abord les solutions qui ne s'annulent pas. On a alors
$$x' = x^2 \Leftrightarrow \frac{x'}{x^2} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} = t + k \Leftrightarrow x = \frac{-1}{t+k} \text{ et } t + k \neq 0.$$
On pose $c = -k$ et on trouve donc les solutions
$$x = \frac{1}{c-t} \text{ sur }]-\infty, c[\text{ et }]c, +\infty[.$$
Pour conclure, il faut aussi montrer que si x s'annule quelque part, alors x est partout nulle [2] : si X est une primitive de x sur un intervalle I et qu'on pose $y = xe^{-X}$, on a $y' = (x' - x^2)e^{-X} = 0$ si bien que y est constante. Si $x(t_0) = 0$, alors $y(t_0) = x(t_0)e^{-X(t_0)} = 0$. On a donc $y = 0$ si bien que $x = ye^X = 0$.

Définition 1.1.4 Une *équation différentielle linéaire* est une égalité de la forme
$$(\mathcal{E}) \quad a_n(t)x^{(n)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t)$$
où $a_0, \ldots, a_n$ et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle I. L'équation différentielle est *à coefficients constants* si $a_0, \ldots, a_n$ sont des constantes (mais pas nécessairement g). L'équation différentielle est *homogène* si $g = 0$. En général, *l'équation différentielle homogène associée* est l'équation
$$(\mathcal{E}_0) \quad a_n(t)x^{(n)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0.$$

Ici encore, en pratique, on écrira plus simplement
$$a_n(t)x^{(n)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = g(t). \tag{1.5}$$
On pourra bien sûr considérer la notion d'*équation différentielle linéaire explicite*
$$x^{(n)} = a_0(t)x \cdots + \cdots + a_{n-1}(t)x^{n-1} + g(t).$$
Lorsque a_n ne s'annule pas sur I, on peut transformer l'équation implicite (1.5) en équation explicite
$$x^{(n)} = -\frac{a_0(t)}{a_n(t)}x \cdots - \cdots - \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x^{(n-1)} + \frac{g(t)}{a_n(t)}.$$

Exemples
1. Les équations $x' = \cos(t)$, $x' = x - 1$, $tx' = 2x$, $x'' + x = 0$, et $x^{(n)} = 0$ sont linéaires mais les équations $xx' = t$ et $x' = x^2$ ne sont *pas* linéaires.
2. Les équations (linéaires) $x' = \cos(t)$, $x' = x - 1$, $x'' + x = 0$ ou $x^{(n)} = 0$ sont à coefficients constants mais *pas* $tx' = 2x$.
3. Les équations (linéaires) $x'' + x = 0$ et $tx' = 2x$ et ou $x^{(n)} = 0$ sont homogènes mais *pas* $x' = \cos(t)$ ou $x' = x - 1$.

2. Cela résulte du *théorème de Cauchy-Lipschitz* qu'on ne démontrera pas dans ce cours.

Proposition 1.1.5 — Principe de linéarité. Si, pour $i = 1, 2$, x_i est solution de

$$a_n(t)x^{(n)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = g_i(t),$$

et $\lambda_i \in \mathbb{R}$, alors $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ est solution de

$$a_n(t)x^{(n)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = \lambda_1 g_1(t) + \lambda_2 g_2(t).$$

Démonstration. On sait que la dérivation est linéaire si bien que

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^{(k)} = \lambda_1 x_1^{(k)} + \lambda_2 x_2^{(k)}.$$

pour tout $k = 0, \dots, n$. Or, par hypothèse, on a

$$\begin{cases} a_n(t)x_1^{(n)} + \cdots + a_1(t)x_1' + a_0(t)x_1 = g_1(t), \\ a_n(t)x_2^{(n)} + \cdots + a_1(t)x_2' + a_0(t)x_2 = g_2(t). \end{cases}$$

Il suffit donc d'effectuer la combinaison linéaire des deux équations. ■

Corollaire 1.1.6 L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène (définies sur un intervalle fixé I) est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ de toutes les fonction réelles définies sur I.

Démonstration. Bien sûr, l'application nulle est toujours solution. Il suffit ensuite d'appliquer le principe de linéarité dans le cas ou $g_1 = g_2 = 0$. Les détails sont laissés en exercice. ■

Exemples
1. Une base de solutions pour l'équation $x'' + x = 0$ est $\{\cos(t), \sin(t)\}$.
2. Une base de solutions pour l'équation $tx' = 2x$ est donnée par les fonctions

$$x_+(t) := \begin{cases} t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x_-(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 0 \\ t^2 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

3. L'ensemble des solutions de l'équation $x^{(n)} = 0$ est l'espace $k[t]_{<n}$ de polynômes de degré au plus $n - 1$.

On rappelle qu'un sous-ensemble F d'un espace vectoriel E est un *sous-espace affine* s'il existe $v_1 \in F$ et un sous-espace vectoriel F_0 de E tel que

$$F = v_1 + F_0 := \{v_1 + v, v \in F_0\}.$$

L'espace F_0 ne dépend pas du choix de v_1 et s'appelle l'*espace directeur* de F. De plus, la propriété est alors satisfaite pour tout $v_1 \in F$. La *dimension* de F est celle de F_0. L'exemple typique est une droite du plan ne passant pas nécessairement par l'origine (qui est donc un espace affine de dimension un).

Corollaire 1.1.7 Si une équation différentielle linéaire possède des solutions sur un intervalle I, alors celles-ci forment sous-espace affine $\mathcal{S}$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dont l'espace directeur est l'espace $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation différentielle homogène associée.

Démonstration. Il s'agit de montrer le *principe de superposition* : si x_1 est solution de $\mathcal{E}$, alors les solutions de $\mathcal{E}$ sont les fonctions $x_1 + x$ ou x est solution de $\mathcal{E}_0$. Pour montrer cela, il suffit d'appliquer le principe de linéarité, d'abord avec $g_1 = g$, $g_2 = 0$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, puis avec $g_1 = g_2 = g$, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ pour la réciproque. Les détails sont laissés en exercice. ∎

Exemples

1. Pour résoudre $x' = \cos(t)$, on cherche d'abord la solution générale $x(t) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ de l'équation (homogène) $x' = 0$ puis une solution particulière $x_0(t) = \sin(t)$ de l'équation $x' = \cos(t)$ et on ajoute les deux. Les solutions de $x' = \cos(t)$ sont donc les fonctions $x(t) = \sin(t) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
2. Pour résoudre $x' = x - 1$, on cherche d'abord la solution générale $x(t) = ke^t$ avec $k \in \mathbb{R}$ de l'équation (homogène) $x' = x$ puis une solution particulière $x_0(t) = 1$ de l'équation $x' = x - 1$ et on ajoute les deux. Les solutions de $x' = x - 1$ sont donc les fonctions $x(t) = 1 + ke^t$ avec $k \in \mathbb{R}$.

1.2 Équations linéaires du premier ordre

Théoreme 1.2.1 Les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène explicite du premier ordre $x' = a(t)x$ sont les fonctions

$$x = ke^{A(t)}$$

ou $k \in \mathbb{R}$ et A est une primitive (fixée) de a.

Démonstration. On pose $y(t) = x(t)e^{-A(t)}$ si bien que $x(t) = y(t)e^{A(t)}$. On a donc

$$\begin{aligned}
x'(t) = a(t)x(t) &\Leftrightarrow y'(t)e^{A(t)} + y(t)a(t)e^{A(t)} = a(t)y(t)e^{A(t)} \\
&\Leftrightarrow y'(t)e^{A(t)} = 0 \\
&\Leftrightarrow y'(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow y(t) = k \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow x(t) = ke^{A(t)}, k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

∎

Remarque Comme conséquence, on voit que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'une équation différentielle linéaire explicite du premier ordre est un espace de dimension un.

On peut être plus précis :

Proposition 1.2.2 Les solutions d'une équation différentielle linéaire explicite du premier ordre $x' = a(t)x + b(t)$ sont les fonctions

$$x(t) = C(t)e^{A(t)} + ke^{A(t)}$$

ou $k \in \mathbb{R}$, A est une primitive (fixée) de a et C est une primitive (fixée) de $b(t)e^{-A(t)}$.

Démonstration. Par principe de superposition, il suffit de vérifier que la fonction $x(t) = C(t)e^{A(t)}$ est solution de l'équation. On aura :

$$x'(t) = b(t)e^{-A(t)}e^{A(t)} + C(t)a(t)e^{A(t)} = a(t)x(t) + b(t). \qquad \blacksquare$$

Remarque En pratique, on n'applique pas la formule, on fait le changement de variable $x = ye^{A(t)}$ (variation de la constante), ce qui permet de trouver $y(t) = C(t)+k$ que l'on substitue afin d'obtenir $x(t)$.

Exemple Résoudre

$$x' = \tan(t)x + \sin(t) \quad \text{sur} \quad]-\pi/2, \pi/2[.$$

On considère d'abord l'équation homogène $x' = \tan(t)x$. Une primitive de $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ est $-\ln(\cos(t))$ et on trouve donc

$$x(t) = ke^{-\ln(\cos(t))} = \frac{k}{\cos(t)}$$

comme solution générale de l'équation homogène. On fait ensuite varier la constante en posant

$$x = \frac{y}{\cos(t)}.$$

L'équation originale devient alors

$$\frac{y'\cos(t) + y\sin(t)}{\cos^2(t)} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\frac{y}{\cos(t)} + \sin(t),$$

soit après simplification $y' = \sin(t)\cos(t)$. On intègre pour trouver $y(t) = \frac{1}{2}\sin^2(t)+k$ si bien que

$$x(t) = \frac{\frac{1}{2}\sin^2(t) + k}{\cos(t)}.$$

On déduit de la dernière proposition le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires (explicites) d'ordre un :

Corollaire 1.2.3 — Cauchy-Lipschitz. Il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$x'(t) = a(t)x + b(t) \quad \text{et} \quad x(t_0) = k_0.$$

Démonstration. Avec les notations de la proposition, il s'agit de résoudre $C(t_0)e^{A(t_0)} + ke^{A(t_0)} = k_0$ pour trouver $k = k_0e^{-A(t_0)} - C(t_0)$ et donc

$$x(t) = (C(t) - (C(t_0))e^{A(t)} + k_0e^{(A(t)-A(t_0))}. \qquad \blacksquare$$

Exemple Le problème de Cauchy

$$x' = \tan(t)x + \sin(t) \quad \text{et} \quad x(0) = 1$$

a pour solution $x(t) = \dfrac{\frac{1}{2}\sin^2(t) + 1}{\cos(t)}$.

On dispose aussi d'une méthode de variation de la constante (plus compliquée) pour les équations d'ordre *deux* :

Proposition 1.2.4 — Variation de la constante. Supposons que x_1 et x_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée à

$$(\mathcal{E}) \quad a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = g(t).$$

Soient $u_1, u_2 : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que

$$\begin{cases} u_1x_1 + u_2x_2 = x \\ u_1'x_1 + u_2'x_2 = 0. \end{cases}$$

Alors, l'équation originale est équivalente à

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' = g(t)/a(t)$$

sur tout intervalle ou a ne s'annule pas.

Démonstration. On calcule

$$x' = (u_1x_1 + u_2x_2)' = u_1'x_1 + u_1x_1' + u_2'x_2 + u_2x_2' = u_1x_1' + u_2x_2'$$

puis

$$x'' = (u_1x_1' + u_2x_2')' = u_1'x_1' + u_1x_1'' + u_2'x_2' + u_2x_2''$$

et on remplace dans l'équation en utilisant le fait que

$$a(t)x_1'' + b(t)x_1' + c(t)x_1 = a(t)x_2'' + b(t)x_2' + c(t)x_2 = 0$$

pour obtenir

$$a(t)(u_1'x_1' + u_2'x_2') = g(t). \qquad \blacksquare$$

Remarque En pratique, on résout le système

$$\begin{cases} u_1'x_1 + u_2'x_2 = 0 \\ u_1'x_1' + u_2'x_2' = g(t)/a(t), \end{cases} \tag{1.6}$$

on intègre u_1' et u_2' et on fait $x = u_1x_1 + u_2x_2$. On peut avantageusement écrire le système (1.6) sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g(t)}{a(t)} \end{bmatrix}.$$

Exemple Résoudre

$$x'' + x = \frac{1}{\cos(t)} \quad \text{sur} \quad]-\pi/2, \pi/2[.$$

L'équation homogène $x''+x=0$ a pour solutions $x(t) = k\cos(t)+l\sin(t)$ avec $k, l \in \mathbb{R}$ (voir plus loin). On cherche donc des solutions de la forme $x(t) = u(t)\cos(t)+v(t)\sin(t)$ (variation des constantes) et on considère pour cela le système

$$\begin{cases} u'\cos(t) + v'\sin(t) = 0 \\ -u'\sin(t) + v'\cos(t) = \frac{1}{\cos(t)}. \end{cases}$$

On aura

$$v' = \sin(t)(u'\cos(t) + v'\sin(t)) + \cos(t)(-u'\sin(t) + v'\cos(t)) = 1,$$

si bien que $v(t) = t + l$. On en déduit aussi que

$$u' = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

et donc $u(t) = \ln(\cos(t)) + k$. Donc finalement :

$$x(t) = u(t)\cos(t) + v(t)\sin(t) = \ln(\cos(t))\cos(t) + t\sin(t) + k\cos(t) + l\sin(t).$$

Remarque Une *équation de Bernoulli*

$$a(t)x' + b(t)x + c(t)x^\alpha = 0$$

avec $\alpha \neq 1$ se ramène à une équation linéaire par le changement de variable $y = x^{1-\alpha}$. En pratique, on divise l'équation par x^α.

Exemple Résoudre $t^3x' + x^4 = t^2x$. Soit x une fonction dérivable qui ne s'annule pas. On fait le changement de variable $y = 1/x^3$ (si bien que $y' = -3x'/x^4$) et on a donc

$$t^3x' + x^4 = t^2x \Leftrightarrow \frac{t^3x'}{x^4} + 1 = \frac{t^2}{x^3} \Leftrightarrow -\frac{t^3y'}{3} + 1 = t^2y \Leftrightarrow y' = -\frac{3y}{t} + \frac{3}{t^3}$$

(et $t \neq 0$). La solution générale de l'équation homogène $y' = -\frac{3y}{t}$ est

$$y(t) = ke^{-3\ln|t|} = \frac{k}{|t|^3}, \quad k \in \mathbb{R},$$

et quitte à changer k en $-k$ si $t < 0$, on peut écrire $y(t) = k/t^3$ avec $k \in \mathbb{R}$. On fait ensuite le changement de variable $y = z/t^3$ (variation de la constante). On aura

$$y' = -\frac{3y}{t} + \frac{3}{t^3} \Leftrightarrow \frac{z'}{t^3} - \frac{3z}{t^4} = -\frac{3z}{t^4} + \frac{3}{t^3} \Leftrightarrow z' = 3 \Leftrightarrow z(t) = 3t + k.$$

Il n'y a plus qu'à rappeler que $y = z/t^3$ si bien que $x = \sqrt[3]{1/y} = t/\sqrt[3]{z}$ et changer la constante en posant $k = -3c$ pour trouver

$$x(t) = \frac{t}{\sqrt[3]{3(t-c)}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

On vérifie aisément que cette fonction est bien solution sur $]-\infty, c[$ et $]c, +\infty[$. On remarque que la fonction nulle est aussi solution et il faudrait montrer qu'il n'y en a pas d'autre (mais c'est toujours difficile).

Remarque Une *équation de Riccati*

$$a(t)x' + b(t)x + c(t)x^2 + d(t) = 0$$

se ramène à une équation de Bernoulli (avec $\alpha = 2$) dès que l'on connaît une solution particulière x_0 : on fait le changement de variable $y = x - x_0$.

Exemple Résoudre $t^3x' + t^2x + x^2 + 2t^4 = 0$ sachant que $x(t) = -t^2$ est solution. On fait le changement de variable $y = x + t^2$ (si bien que $y' = x' + 2t$). On a donc

$$\begin{aligned} t^3x' + t^2x + x^2 + 2t^4 = 0 &\Leftrightarrow t^3(y' - 2t) + t^2(y - t^2) + (y - t^2)^2 + 2t^4 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^3y' - t^2y + y^2 = 0. \end{aligned}$$

C'est une équation de Bernoulli et on fait le changement de variable $z = 1/y$ (si bien que $z' = -y'/y^2$) pour trouver les solutions qui ne s'annulent pas :

$$t^3y' - t^2y + y^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^3y'}{y^2} - \frac{t^2}{y} + 1 = 0 \Leftrightarrow -t^3z' - t^2z + 1 = 0 \Leftrightarrow z' + \frac{z}{t} - \frac{1}{t^3} = 0$$

(et $t \neq 0$). L'équation homogène $z' + \frac{z}{t} = 0$ a pour solution générale $z(t) = ke^{-\ln|t|} = k/|t|$ et en fait peut écrire $z(t) = k/t$ quitte à changer k en $-k$. On fait alors varier la constante en posant $z = u/t$ si bien que

$$z' + \frac{z}{t} - \frac{1}{t^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{u'}{t} - \frac{u}{t^2} + \frac{u}{t^2} - \frac{1}{t^3} = 0 \Leftrightarrow u' = \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow u(t) = -\frac{1}{t} + k.$$

On a plus qu'à remplacer successivement pour trouver

$$z(t) = \frac{kt - 1}{t^2}, \quad y(t) = \frac{t^2}{kt - 1} \quad \text{et} \quad x(t) = -t^2 + \frac{t^2}{kt - 1}$$

avec la condition $t \neq 1/k$, ainsi que la solution originale $x(t) = -t^2$ qui correspond au cas ou y est partout nulle.

1.3 Équations à coefficients constants

On rappelle qu'une *fonction complexe d'une variable réelle* est une application $f : I \to \mathbb{C}$ ou I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou plus généralement une partie de $\mathbb{R}$). On peut alors considérer la fonction conjuguée $\overline{f}$ ainsi que les parties réelles et imaginaires de f (qui sont des fonctions réelles) et on a

$$\begin{cases} f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f) \\ \overline{f} = \mathrm{Re}(f) - i\,\mathrm{Im}(f) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(f) = \frac{f+\overline{f}}{2} \\ \mathrm{Im}(f) = \frac{f-\overline{f}}{2i}. \end{cases}$$

La fonction f est *continue* sur I si pour tout $t_0 \in I$, on a

$$\lim_{t \to t_0} |f(t) - f(t_0)| = 0.$$

On rappelle que si $f, g : I \to \mathbb{C}$ sont deux fonctions continues, alors $f+g$ et fg aussi. La fonction f est *dérivable* sur I si elle possède une *dérivée* $f' : I \to \mathbb{C}$, c'est une fonction qui satisfait

$$\forall t_0 \in I, \quad \lim_{t \to t_0} \left| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - f'(t_0) \right| = 0.$$

On rappelle que si $f, g : I \to \mathbb{C}$ sont deux fonctions dérivables, alors $f+g$ et fg aussi et que

$$(f+g)' = f' + g' \quad \text{et} \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

On a aussi

$$f' = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{C}, f = k$$

(f est constante sur I). Enfin, on peut aussi définir par récurrence la dérivée $f^{(n)}$ de f à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.

Exemple Rappelons que la fonction complexe $f : t \mapsto e^{\lambda t}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ est définie par

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t} \cos(\beta t) + i e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

si $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrons que f est infiniment dérivable et que $f^{(n)}(t) = \lambda^n e^t$.

Démonstration. Par récurrence sur n, il suffit de traiter le cas $n = 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
(e^{\lambda t})' &= (e^{\alpha t} \cos(\beta t) + i e^{\alpha t} \sin(\beta t))' \\
&= e^{\alpha t}(\alpha \cos(\beta t) - \beta \sin(\beta t) + i e^{\alpha t}(\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t)) \\
&= e^{\alpha t}(\alpha + i\beta)(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t) \\
&= \lambda e^{\lambda t}.
\end{aligned}$$

■

On ne considérera ici que des équations différentielles complexes (linéaires) à coefficients constants.

Définition 1.3.1 Une *équation différentielle complexe à coefficients constants* est une égalité de la forme

$$(\mathcal{E}) \quad a_n x^{(n)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = g(t)$$

où $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ et g est une fonction complexe continue sur un intervalle I. L'équation différentielle est *homogène* si $g = 0$. En général, *l'équation différentielle homogène associée* est l'équation

$$(\mathcal{E}_0) \quad a_n x^{(n)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0.$$

Une *solution* est une fonction complexe n fois dérivable sur I qui satisfait l'égalité.

Remarques 1. Le principe de linéarité s'applique ici aussi (cas complexe) ainsi que ses corollaires. Plus généralement, tous les résultats obtenus sur les équations réelles restent valides avec des équations complexes. Attention cependant que, même lorsqu'on considère des *équations complexes*, on se limite au cas d'une *variable réelle*.

2. La théorie s'applique en particulier lorsque $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et g est une fonction réelle mais nous allons alors trouver toutes les solutions complexes et pas seulement les solutions réelles.
3. Plus généralement, lorsque $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mais que g est une fonction complexe, alors les solutions réelles de

$$a_n x^{(n)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = \mathrm{Re}(g)(t)$$

sont les parties réelles des solutions complexes (principe de linéarité) de $(\mathcal{E})$. Idem avec les parties imaginaires.

Exemples 1. L'équation $x' = e^{it}$ a pour solution $x(t) = -ie^{it} + k$ avec $k \in \mathbb{C}$.

2. L'équation $x' = i(x+1)$ a pour solution $x(t) = ke^{it} - 1$ avec $k \in \mathbb{C}$.

Proposition 1.3.2 Si $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et $\lambda := -b/a$, alors l'équation différentielle homogène d'ordre un

$$(\mathcal{E}_0) \quad ax' + bx = 0$$

a pour solutions les $ke^{\lambda t}$ avec $k \in \mathbb{C}$.

Démonstration. On fait le changement de variables $x = ye^{\lambda t}$, ce qui fournit l'équation $ay' + (a\lambda + b)y = 0$. Comme $a\lambda + b = 0$ et $a \neq 0$, on trouve $y' = 0$, c'est à dire $y = k \in \mathbb{C}$. ∎

Proposition 1.3.3 Soient $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, $r \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{C}[t]$ avec $\deg(p) \leq n$. L'équation

$$(\mathcal{E}) \quad ax' + bx = p(t)e^{rt}$$

a une solution de la forme
1. $x(t) = P(t)e^{rt}$ si $r \neq \lambda := -b/a$,
2. $x(t) = tP(t)e^{rt}$ si $r = \lambda$,

avec $P \in \mathbb{C}[t]$ et $\deg(P) \leq n$.

Démonstration. On suppose d'abord que $r = 0$ si bien que l'équation s'écrit

$$ax' + bx = p(t).$$

Supposons pour l'instant que $b \neq 0$. Puisque $\deg(p) \leq n$, on peut écrire $p = ct^n + dt^{n-1} + s(t)$ avec $\deg(s) \leq n-2$. Donc, si on pose $q(t) := (d - n\frac{ac}{b})t^{n-1} + s(t)$, on a

$$p(t) = ct^n + n\frac{ac}{b}t^{n-1} + q(t)$$

avec $\deg(q) \leq n-1$. Par récurrence sur n, l'équation $ax' + bx = q(t)$ a une solution de la forme $Q(t)$ avec $\deg(Q) \leq n-1$. Il suffit alors de poser $P(t) = \frac{c}{b}t^n + Q(t)$. On aura bien

$$aP'(t) + bP(t) = an\frac{c}{b}t^{n-1} + aQ'(t) + b\frac{c}{b}t^n + Q(t) = ct^n + n\frac{ac}{b}t^{n-1} + q(t) = p(t).$$

Lorsque $b = 0$, on procède manière analogue. L'équation devient $ax' = p(t)$ avec $p = ct^n + q$, on peut supposer $q = 0$ et on pose $P(t) = \frac{c}{(n+1)a}t^n$. On vérifie.

Dans le cas général, on fait le changement de variable $x = ye^{rt}$ et l'équation devient

$$ay' + (ar+b)y = p(t).$$

Il suffit alors d'appliquer le cas précédent avec b remplacé par $ar + b$. ∎

Corollaire 1.3.4 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, $r, \theta \in \mathbb{R}$ et $p, q \in \mathbb{R}[t]$ avec $\deg(p), \deg(q) \leq n$. L'équation

$$(\mathcal{E}) \quad ax' + bx = p(t)e^{rt}\cos(\theta t) + q(t)e^{rt}\sin(\theta t)$$

a une solution de la forme

1. $x(t) = P(t)e^{rt}\cos(\theta t) + Q(t)e^{rt}\sin(\theta t)$ avec $P, Q \in \mathbb{R}[t]$ et $\deg(P), \deg(Q) \leq n$ si $r \neq \lambda := -b/a$ ou $\theta \neq 0$,
2. $x(t) = tP(t)e^{rt}$ avec $P \in \mathbb{R}[t]$ et $\deg(P) \leq n$ si $\theta = 0$ et $r = \lambda$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$p(t)e^{rt}\cos(\theta t) + q(t)e^{rt}\sin(\theta t) = \mathrm{Re}((p(t) - iq(t))e^{(r+i\theta)t}).$$ ∎

Exemples 1. Résoudre $x' + x = t\cos(t)$. On pose

$$x(t) = (a+bt)\cos(t) + (c+dt)\sin(t)$$

et notre équation devient

$$b\cos(t) - (a+bt)\sin(t) + d\sin(t) + (c+dt)\cos(t)$$
$$+ (a+bt)\cos(t) + (c+dt)\sin(t) = t\cos(t)$$

et on doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} b+c+a = 0 \\ d+b = 1 \\ -a+d+c = 0 \\ -b+d = 0. \end{cases}$$

On trouve $b = d = 1/2$, $c = -1/2$ et et $a = 0$ si bien que

$$x(t) = \frac{1}{2}t\cos(t) + \frac{1}{2}(-1+t)\sin(t) + ke^{-t}.$$

2. Résoudre $x' + x = te^{it}$. On pose
$$x(t) = (a + bt)e^{it}$$
(avec $a, b \in \mathbb{C}$ maintenant) et notre équation devient
$$be^{it} + i(a + bt)e^{it} + (a + bt)e^{it} = te^{it}$$
et on doit donc résoudre le système
$$\begin{cases} (1 + i)a + b = 0 \\ (1 + i)b = 1 \end{cases}$$
On trouve $b = (1 - i)/2$ puis $a = i/2$ si bien que
$$x(t) = \frac{1}{2}(i + (1 - i)t)e^{it} + ke^{-t}.$$
On pourra remarquer qu'en considérant la partie réelle, on retrouve l'exemple précédent.
3. Résoudre $x' - x = te^{t}$. On pose
$$x(t) = t(a + bt)e^{t},$$
et notre équation devient
$$(a + 2bt)e^{t} + t(a + bt)e^{t} - t(a + bt)e^{t} = te^{t}$$
et on doit donc résoudre le système
$$\begin{cases} a = 0 \\ 2b = 1. \end{cases}$$
On trouve $a = 0$ et $b = 1/2$. On obtient donc
$$x(t) = \frac{1}{2}t^2e^{t} + ke^{t}.$$

Définition 1.3.5 L'*équation caractéristique* de l'équation différentielle d'ordre deux à coefficients constants
$$(\mathcal{E}) \quad ax'' + bx' + cx = g(t)$$
est l'équation $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Proposition 1.3.6 Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, et λ, μ les racines de l'équation caractéristique de l'équation différentielle homogène
$$(\mathcal{E}_0) \quad ax'' + bx' + cx = 0.$$
Alors, les solutions de $\mathcal{E}_0$ sont
1. $x(t) = ke^{\lambda t} + le^{\mu t}$ avec $k, l \in \mathbb{C}$ si $\lambda \neq \mu$,
2. $x(t) = ke^{\lambda t} + lte^{\lambda t}$ avec $k, l \in \mathbb{C}$ si $\lambda = \mu$.

Démonstration. On fait le changement de variables $x = ye^{\lambda t}$ et l'équation devient

$$ay'' + (2a\lambda + b)y' + (a\lambda^2 + b\lambda + c)y = 0.$$

Puisque $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ et $\lambda + \mu = -b/a$, l'équation se simplifie en

$$ay'' + a(\lambda - \mu)y' = 0$$

et on peut appliquer la proposition 1.3.2 qui nous donne $y' = me^{(\mu-\lambda)t}$ avec $m \in \mathbb{C}$. Si $\lambda \neq \mu$, on trouve donc $y = le^{(\mu-\lambda)t} + k$ avec $k, l \in \mathbb{C}$ et finalement $x(t) = ke^{\lambda t} + le^{\mu t}$. Lorsque $\lambda = \mu$, on trouve $y = lt + k$ avec $k, l \in \mathbb{C}$ et donc $x(t) = ke^{\lambda t} + lte^{\lambda t}$. ■

Corollaire 1.3.7 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et λ, μ les racines de l'équation caractéristique de

$$(\mathcal{E}_0) \quad ax'' + bx' + cx = 0.$$

Les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont
1. $x(t) = ke^{\lambda t} + le^{\mu t}$ avec $k, l \in \mathbb{R}$ si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda \neq \mu$,
2. $x(t) = ke^{\lambda t} + lte^{\lambda t}$ avec $k, l \in \mathbb{R}$ si $\lambda = \mu \in \mathbb{R}$,
3. $x(t) = ke^{\alpha t}\cos(\beta t) + le^{\alpha t}\sin(\beta t)$ avec $k, l \in \mathbb{R}$ si $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \neq 0$.

Démonstration. Seul le dernier cas mérite une explication mais il suffit de faire le changement de base de $\{e^{\lambda t}, e^{\overline{\lambda} t}\}$ vers $\{e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t)\}$. En d'autres termes, on passe de l'écriture exponentielle à l'écriture trigonométrique :

$$\begin{aligned} ke^{\lambda t} + le^{\overline{\lambda} t} &= k(e^{\alpha t}\cos(\beta t) + ie^{\alpha t}\sin(\beta t)) + l(e^{\alpha t}\cos(\beta t) - ie^{\alpha t}\sin(\beta t)) \\ &= k'e^{\alpha t}\cos(\beta t) + l'e^{\alpha t}\sin(\beta t)). \end{aligned}$$

avec $k' = k + l$ et $l' = (k - l)i$. ■

Remarques
1. Comme conséquence, on voit que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle d'ordre deux à coefficients constants est un espace de dimension deux.
2. Comme autre conséquence, on obtient aussi un théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles (explicites) à coefficients constants d'ordre deux (unicité de la solution et existence dans le cas homogène).

Exemple
1. L'équation $x'' - x = 0$ a pour solutions les $ke^t + le^{-t}$.
2. L'équation $x'' - 2x' + x = 0$ a pour solutions les $ke^t + lte^{-t}$.
3. L'équation $x'' + x = 0$ a pour solutions les $k\cos(t) + l\sin(t)$ (ou bien $ke^{it} + le^{-it}$ sur $\mathbb{C}$).

Proposition 1.3.8 Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, $r \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{C}[t]$ avec $\deg(p) \leq n$. Alors, l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \quad ax'' + bx' + cx = p(t)e^{rt}.$$

a une solution de la forme

1. $x(t) = P(t)e^{rt}$ si r n'est pas solution de l'équation caractéristique,
2. $x(t) = tP(t)e^{rt}$ si r est racine simple,
3. $x(t) = t^2P(t)e^{rt}$ si r est racine double,

avec $P \in \mathbb{C}[t]$ et $\deg(P) \leq n$.

Démonstration. Désignons par λ, μ les solutions de l'équation caractéristique. On fait le changement de variables $x = ye^{\lambda t}$ et l'équation devient

$$(\mathcal{E}) \quad ay'' + a(\lambda - \mu)y' = p(t)e^{(r-\lambda)t}.$$

On utilise alors la proposition 1.3.3.

1. Si $r \neq \lambda, \mu$, il existe une solution avec $y'(t) = Q(t)e^{(r-\lambda)t}$ puis $y(t) = P(t)e^{(r-\lambda)t}$ et donc $x(t) = P(t)e^{rt}$.
2. Si $r = \lambda \neq \mu$, il existe une solution avec $y'(t) = Q(t)e^{(r-\lambda)t}$ si bien que $y(t) = tP(t)e^{(r-\lambda)t}$ et donc $x(t) = tP(t)e^{rt}$.
3. Si $r = \lambda = \mu$, il existe une solution avec $y'(t) = tQ(t)e^{(r-\lambda)t}$ si bien que $y(t) = t^2P(t)e^{(r-\lambda)t}$ (argument supplémentaire nécessaire ici) et donc $x(t) = t^2P(t)e^{rt}$.

■

Proposition 1.3.9 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, $r, \theta \in \mathbb{R}$ et $p, q \in \mathbb{R}[t]$ avec $\deg(p), \deg(q) \leq n$. Alors, l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \quad ax'' + bx' + cx = p(t)e^{rt}\cos(\theta t) + q(t)e^{rt}\sin(\theta t).$$

a une solution de la forme

1. $x(t) = P(t)e^{rt}\cos(\theta t) + Q(t)e^{rt}\sin(\theta t)$ avec $P, Q \in \mathbb{R}[t]$ et $\deg(P,)\deg(Q) \leq n$ si $r + i\theta$ n'est pas solution de l'équation caractéristique,
2. $x(t) = tP(t)e^{rt}\cos(\theta t) + tQ(t)e^{rt}\sin(\theta t)$ avec $P, Q \in \mathbb{R}[t]$ et $\deg(P), \deg(Q) \leq n$ si $r + i\theta$ est racine simple,
3. $x(t) = t^2P(t)e^{rt}$ avec $P \in \mathbb{R}[t]$ et $\deg(P) \leq n$ si $\theta = 0$ et r est racine double.

Démonstration. Là encore, il suffit de regarder les parties réelles. ■

Exemples

1. L'équation $x'' - x = \cos(t)$ a une solution de la forme $x(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$. Pour la trouver, on remplace dans l'équation :
$$-a\cos(t) - b\sin(t) - a\cos(t) - b\sin(t) = \cos(t),$$
ce qui nous amène au système
$$\begin{cases} -2a = 1 \\ -2b = 0. \end{cases}$$
et on trouve donc $x(t) = -\frac{1}{2}\cos(t)$.
2. L'équation $x'' + x = \cos(t)$ a une solution de la forme $x(t) = at\cos(t) + bt\sin(t)$. Pour la trouver, on remplace dans l'équation :
$$-2a\sin(t) - at\cos(t) + 2b\cos(t) - bt\sin(t) + at\cos(t) + bt\sin(t) = \cos(t),$$

ce qui nous amène au système

$$\begin{cases} 2b = 1 \\ -2a = 0. \end{cases}$$

et on trouve donc $x(t) = \frac{1}{2} t \sin(t)$.

3. L'équation $x'' - 2x' + x = te^t$ a une solution de la forme $x(t) = t^2(a + bt)e^t$. Pour la trouver, on calcule

$$x'(t) = (2at + 3bt^2)e^t + t^2(a + bt)e^t$$

et

$$x''(t) = (2a + 6bt)e^t + (2at + 3bt^2)e^t + t^2(a + bt)e^t$$

Ensuite, on remplace dans l'équation (et on simplifie par e^t) :

$$(2a+6bt)+2(2at+3bt^2)+t^2(a+bt)-2((2at+3bt^2)+t^2(a+bt))-t^2(a+bt) = t,$$

ce qui nous amène au système

$$\begin{cases} 2a = 0 \\ 6b + 4a - 4a = 1 \\ 6b + a - 6b - a = 0 \\ b - b = 0 \end{cases}$$

et on trouve donc $x(t) = \frac{1}{6} t^3 e^t$.

1.4 Exercices

Ces exercices sont pour l'essentiel issus du site exo7.

Exercice 1.1 Chercher une solution simple mais non nulle de l'équation différentielle $x' = 2x$. Même question avec $x'' = -x$, $x'' + \cos(2t) = 0$ et $tx'' = x'$.

Solution Si $x = e^{2t}$, on a $x' = 2e^{2t} = 2x$.
Si $x = \cos(t)$, on a $x' = -\sin(t)$ et $x'' = -\cos(t) = -x$.
Si $x = \frac{1}{4}\cos(2t)$, on a $x' = -\frac{1}{2}\sin(2t)$ et $x'' + \cos(2t) = -\cos(2t) + \cos(2t) = 0$.
Si $x = 1$, on a $x' = 0$ et $x'' = 0$ et donc $tx' = 0 = x''$.

Exercice 1.2 Résoudre l'équation à variables séparées $x'x^2 = t$. Même technique avec $x' = x\ln(t)$ et $x' = \dfrac{1}{x^n}$, $n \geq 1$.

Solution On a $x'x^2 = t \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{2}t^2 + k, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + c}, c \in \mathbb{R}$.
Si x ne s'annule pas, alors

$$\begin{aligned} x' = x\ln(t) \Leftrightarrow \frac{x'}{x} = \ln(t) &\Leftrightarrow \ln|x| = t\ln(t) - t + c, c \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow |x| = e^c t^t e^{-t}, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = Kt^t e^{-t}, K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Enfin il résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz que si x s'annule quelque-part, alors elle s'annule partout.

Pour la dernière, on remarque d'abord qu'une solution ne peut pas s'annuler et on a alors

$$x' = \frac{1}{x^n} \Leftrightarrow x^n x' = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}x^{n+1} = t + k, k \in \mathbb{R}.$$

Si n est pair, on trouve $x = \sqrt[n+1]{(n+1)(t-c)}, c \in \mathbb{R}$ sur $]-\infty, c[$ ou sur $]c, +\infty[$. Si n est impair, on trouve seulement $x = \pm\sqrt[n+1]{(n+1)(t-c)}, c \in \mathbb{R}$ sur $]c, +\infty[$.

Exercice 1.3 Soit l'équation $x' = x(1-x)$. Montrer que si x est une solution non nulle de cette équation alors $y = 2x$ n'est pas solution.

Solution En effet, on aura $y' = 2x' = 2x(1-x)$ et $y(1-y) = 2x(1-2x)$ si bien que $y' = y(1-y) \Leftrightarrow 2x(1-x) = 2x(1-2x) \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Exercice 1.4 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
1. $x' + 2x = t^2$,
2. $x' + x = 2\sin(t)$,
3. $x' - x = (t+1)e^t$,
4. $x' + x = t - e^t + \cos(t)$.

Solution On cherche à chaque fois une solution qui a la « même forme » que le second membre.

Si $x := at^2 + bt + c$ et qu'on remplace dans l'équation 1), on trouve $(2at + b) + 2(at^2 + bt + c) = t^2$ ou encore $2at^2 + 2(a + b)t + b + 2c) = t^2$ si bien que $a = 1/2, b = -1/2, c = 1/4$. Comme e^{-2t} est solution de l'équation homogène, on trouve la solution générale

$$x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + Ke^{-2t}, K \in \mathbb{R}.$$

Si $x := a\cos(t)+b\sin(t)$ et qu'on remplace dans l'équation 2), on trouve $-a\sin(t)+b\cos(t) + a\cos(t) + b\sin(t) = 2\sin(t)$, ce qui fournit $a + b = 0$ et $-a + b = 2$, c'est à dire $a = -1$ et $b = 1$. Comme e^{-t} est solution de l'équation homogène, on trouve la solution générale

$$x = -\cos(t) + \sin(t) + Ke^{-t}, K \in \mathbb{R}.$$

Si $x := (at^2 + bt)e^t$ et qu'on remplace dans l'équation 3), on trouve $(2at + b)e^t + (at^2 + bt)e^t - (at^2 + bt)e^t = (t + 1)e^t$, ce qui fournit $2a = 1$ et $b = 1$ si bien que $a = \frac{1}{2}$ et $b = 1$. Comme e^t est solution de l'équation homogène, on trouve la solution générale

$$x = \left(\frac{1}{2}t^2 + t + K\right) e^t, K \in \mathbb{R}.$$

Pour l'équation 4), on traite les trois termes du second membre séparément et on ajoute tout à la fin. Si $x = at + b$, on a $x' + x = t \Leftrightarrow a + at + b = t$ si bien que $a = 1$ et $b = -1$ et donc $x = t - 1$. Si $x = ae^t$, on a $x' + x = e^t \Leftrightarrow ae^t + ae^t = e^t$ si bien que $a = 1/2$ et donc $x = \frac{1}{2}e^t$. Enfin, Si $x = a\cos(t) + b\sin(t)$, on a $x' + x = \cos(t) \Leftrightarrow -a\sin(t) + b\cos(t) + a\cos(t) + b\sin(t) = \cos(t)$ si bien que $a + b = 1$ et $b - a = 0$ ou encore $a = b = 1/2$ si bien que $x = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)$. Finalement,

$$x = t - 1 - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) + Ke^{-t}, K \in \mathbb{R}.$$

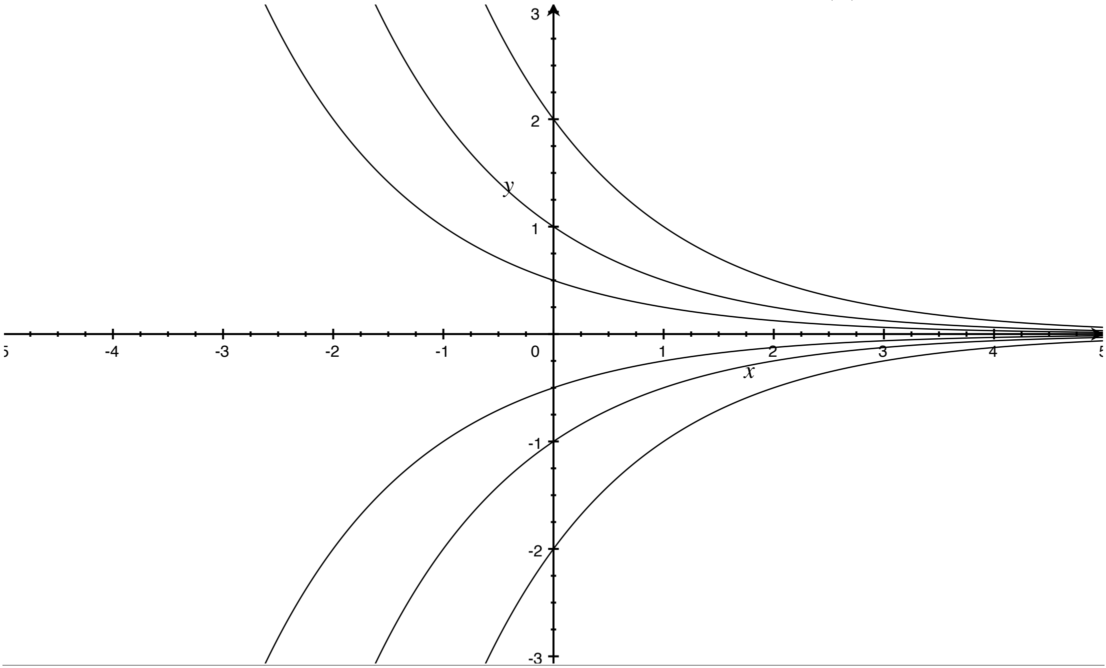
Exercice 1.5 Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Solution On résout d'abord l'équation différentielle $f' + f = c$ avec $c \in \mathbb{R}$. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre et $f \equiv c$ est une solution évidente. La solution générale est donc $f = Ke^{-x} + c$ avec $K \in \mathbb{R}$. Mais on veut aussi que $c = f(0) + f(1)$, ce qu'on traduit par $c = (K + c) + (K/e + c)$. On en tire $c = -(1 + 1/e)K$ et donc finalement $f(x) = K(e^{-x} - 1 - 1/e)$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.6
1. Résoudre l'équation différentielle $x' + x\ln(2) = 0$. Tracer les courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $x(1) = \frac{1}{2}$.
2. Mêmes questions avec $2x' + 3x = 5$ et $x(0) = -\frac{1}{3}$.
3. Mêmes questions avec $2tx' + x = 1$ et $x(1) = 2$.

FIGURE 1.6 – Courbes intégrales de $x' + x\ln(2) = 0$



4. Mêmes questions avec $tx' - x = t^2$ et $x(1) = 2$.

Solution L'équation $x' + x\ln(2) = 0$ est une équation linéaire homogène de rang un qui a pour solution générale $x = Ke^{-t\ln(2)} = \frac{K}{2^t}$. On peut alors tracer les courbes intégrales (figure 1.6).

Pour trouver la solution qui satisfait $x(1) = \frac{1}{2}$, on résout $\frac{K}{2^1} = \frac{1}{2}$ et on trouve $K = 1$ si bien que $x = \frac{1}{2^t}$.

L'équation linéaire de rang un $2x' + 3x = 5$ a pour solution évidente la constante $x \equiv \frac{5}{3}$ et l'équation homogène associée $2x' + 3x$ a pour solution générale $x = Ke^{-\frac{3}{2}t}$. On en déduit que l'équation $2x' + 3x = 5$ a pour solution générale $x = \frac{5}{3} + Ke^{-\frac{3}{2}t}$ ainsi que les courbes intégrales (figure 1.7) et la solution $x = \frac{5}{3} - 2e^{-\frac{3}{2}t}$ telle que $x(0) = -\frac{1}{3}$.

On considère l'équation $2tx' + x = 0$. Sur un intervalle ne contenant pas l'origine, cette équation est équivalente à $x' = -\frac{1}{2t}x$ qui a pour solution générale $x = Ke^{-\ln|t|/2} = K/\sqrt{|t|}$. La seule autre solution est est la solution nulle. L'équation $2tx' + x = 1$ a pour solution évidente la constante $x \equiv 1$ et donc pour solution générale $x = 1 + K/\sqrt{|t|}$ (sur tout intervalle ou elle est définie). On en déduit les courbes intégrales (figure 1.8) et la solution $x = 1 + \sqrt{\frac{2}{t}}$ qui satisfait $x(1) = 2$.

L'équation $tx' - x = 0$ a une solution évidente $x = t$ et l'équation $tx' - x = t^2$ a aussi une solution presque évidente $x = t^2$ (au pire, on fait varier la constante en posant $x = yt$). On en déduit que la solution générale de l'équation est $x = t^2 + Kt$, les courbes intégrales (figure 1.9) ainsi que la solution $x = t^2 + t$ telle que $x(1) = 2$.

Exercice 1.7 1. Résoudre l'équation différentielle $(t^2 + 1)x' + 2tx = 3t^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Tracer les courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $x(0) = 3$.

FIGURE 1.7 – Courbes intégrales de $2x' + 3x = 5$

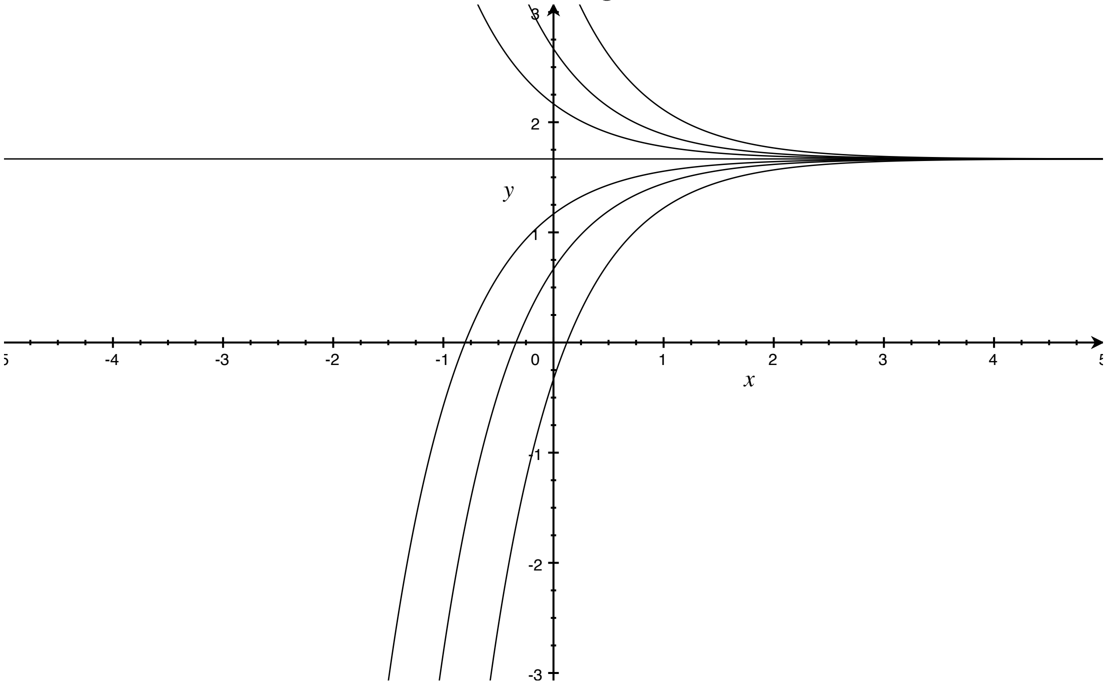


FIGURE 1.8 – Courbes intégrales de $2tx' + x = 1$

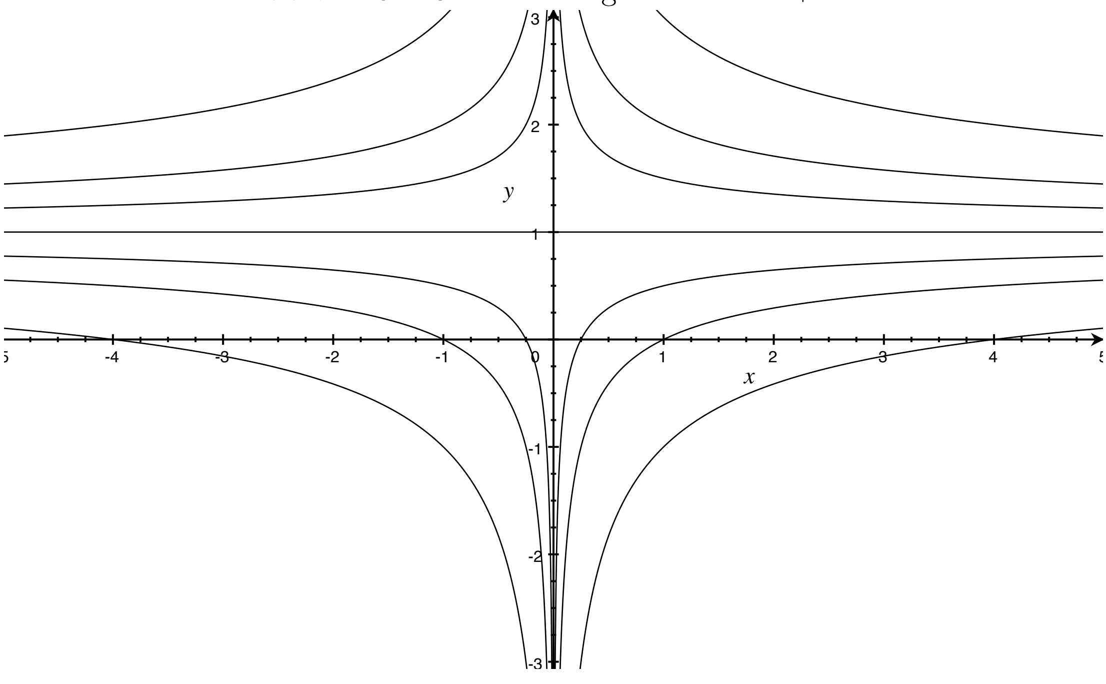
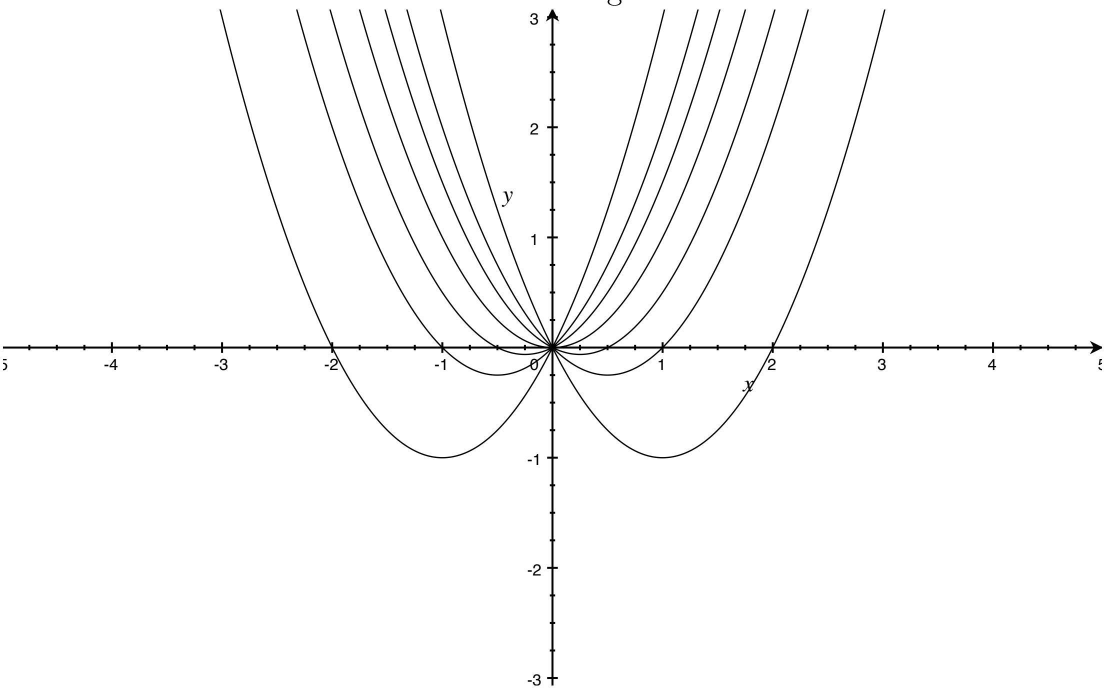


FIGURE 1.9 – Courbes intégrales de $tx' - t = t^2$



2. Mêmes questions avec $x'\sin(t) - x\cos(t) + 1 = 0$ sur $]0, \pi[$ et $x(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Solution Puisque $-\ln(t^2+1)$ est une primitive de $-\frac{2t}{t^2+1}$, l'équation linéaire homogène de rang un $(t^2+1)x' + 2tx = 0$ a pour solution générale $x = Ke^{-\ln(t^2+1)} = \frac{K}{t^2+1}$. On cherche maintenant une solution polynomiale (on pourrait aussi faire varier la constante) pour l'équation $(t^2+1)x' + 2tx = 3t^2 + 1$ et on essaie avec $x = at + b$. L'équation devient $(t^2+1) \times a + 2t(at+b) = 3t^2 + 1$ qui donne le système $3a = 3$ et $a + 2b = 1$ si bien que $a = 1$ et $b = 0$. La solution générale de notre équation est donc $x = t + \frac{K}{t^2+1}$ et on peut tracer les courbes intégrales (figure 1.10). On voit immédiatement que la solution pour laquelle $x(0) = 3$ est donnée par $x = t + \frac{3}{t^2+1}$.

L'équation homogène $x'\sin(t) - x\cos(t) = 0$ a pour solution évidente $\sin(t)$ et l'équation $x'\sin(t) - x\cos(t) + 1 = 0$ a pour solution évidente $\cos(t)$. On en déduit que la solution générale est $x = \cos(t) + K\sin(t)$ et on peut tracer les courbes intégrales (figure 1.11). Pour trouver la solution telle que $x(\frac{\pi}{4}) = 1$, on résout $1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + K\frac{\sqrt{2}}{2}$ si bien que $K = \sqrt{2} - 1$ et on trouve donc $x = \cos(t) + (\sqrt{2} - 1)\sin(t)$.

Exercice 1.8 Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $x' - 2tx = 3te^{t^2}$,
2. $x' + 2x = \sin(3t)e^{-2t}$.

Solution L'équation homogène $x' - 2tx = 0$ a pour solution générale $x = Ke^{t^2}$. Si on pose $x = ye^{t^2}$, l'équation $x' - 2tx = 3te^{t^2}$ devient donc $y'e^{t^2} + 2tye^{t^2} - 2tye^{t^2} = 3te^{t^2}$ et on doit donc résoudre $y' = 3t$ qui donne $y = \frac{3}{2}t^2 + k$ si bien que finalement $x = \frac{3}{2}t^2e^{t^2} + ke^{t^2}$.

FIGURE 1.10 – Courbes intégrales de $(t^2+1)x' + 2tx = 3t^2 + 1$

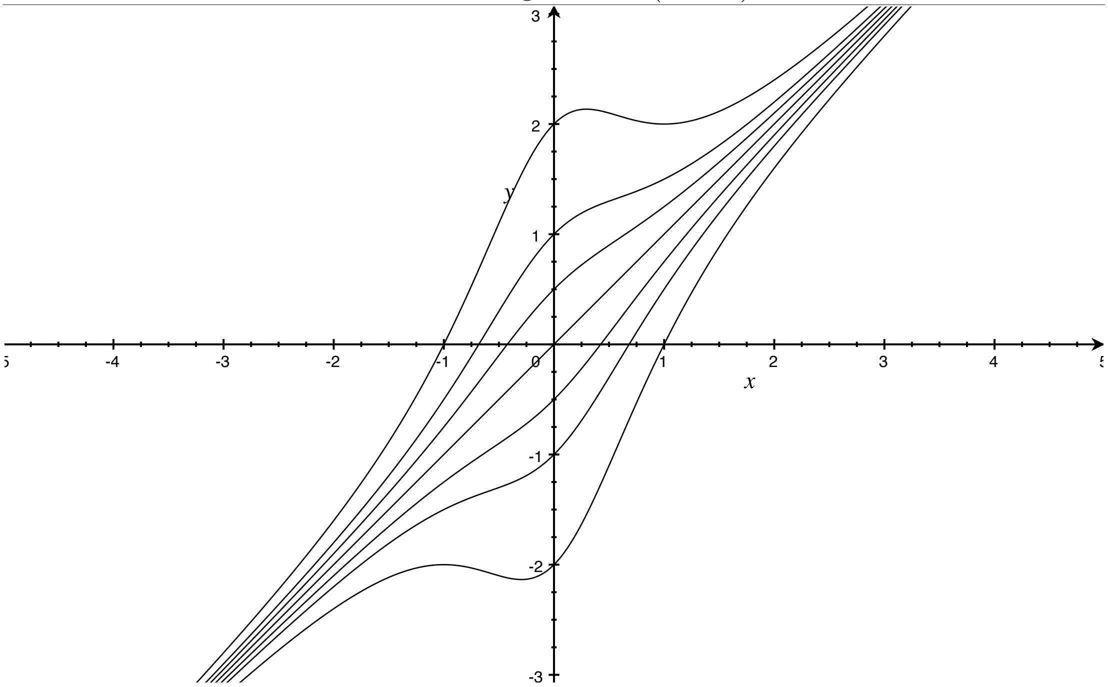
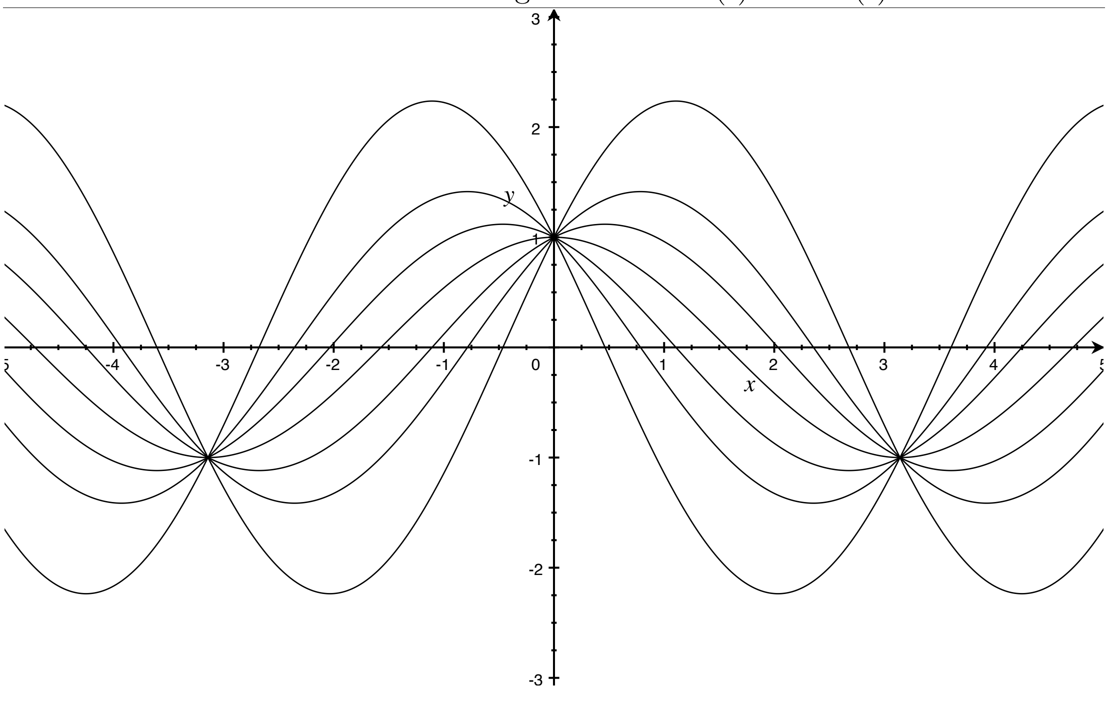


FIGURE 1.11 – Courbes intégrales de $x' \sin(t) - x\cos(t) + 1 = 0$



L'équation homogène $x' + 2x = 0$ a pour solution générale $x = Ke^{-2t}$. Si on pose $x = ye^{-2t}$, l'équation $x' - 2tx = \sin(3t)e^{-2t}$ devient donc $y'e^{-2t} - 2ye^{t^2} + 2ye^{t^2} = \sin(3t)e^{-2t}$ et on doit donc résoudre $y' = \sin(3t)$ qui donne $y = -\frac{1}{3}\cos(t) + k$ si bien que finalement $x = -\frac{1}{3}\cos(t)e^{-2t} + ke^{-2t}$.

Exercice 1.9 Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $x' - \left(2t - \frac{1}{t}\right) x = 1$ sur $]0, +\infty[$,
2. $x' - x = t^k e^t$ sur $\mathbb{R}$ avec $k \in \mathbb{N}$,
3. $t(1 + \ln^2(t))x' + 2\ln(t)x = 1$ sur $]0, +\infty[$.

Solution L'équation homogène $x' = \left(2t - \frac{1}{t}\right) x$ a pour solution générale $x = Ke^{t^2 - \ln(t)} = \frac{Ke^{t^2}}{t}$. Si on pose $x = \frac{ye^{t^2}}{t}$, l'équation originale devient donc

$$\frac{(y'e^{t^2} - 2tye^{t^2})t - ye^{t^2}}{t^2} - \left(2t - \frac{1}{t}\right)\frac{ye^{t^2}}{t} = 1,$$

c'est à dire $y't - 2t^2y - y - (2t^2 - 1)y = t^2e^{-t^2}$ et finalement $y' = te^{-t^2}$. On aura donc $y = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + K$ et ainsi $x = (-\frac{1}{2}e^{-t^2} + K)\frac{e^{t^2}}{t} = -\frac{1}{2t} + K\frac{e^{t^2}}{t}$.

Pour l'équation $x' - x = t^k e^t$, on fait varier la constante et on pose donc $x = ye^t$. L'équation devient $(y'e^t + ye^t) - ye^t = t^k e^t$, c'est à dire $y' = t^k$. On trouve donc $y = \frac{1}{t^{k+1}}t^{k+1} + K$, c'est à dire $x = \frac{1}{t^{k+1}}t^{k+1}e^t + Ke^t$.

On cherche d'abord une primitive de $-\frac{2ln(t)}{t(1+\ln^2(t))}$. Pour cela, on fait le changement de variable $u = \ln(t)$ si bien que $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et donc

$$\int -\frac{2ln(t)}{t(1 + \ln^2(t))}\mathrm{d}t = \int -\frac{2u}{1 + u^2}\mathrm{d}t = -\ln(1 + u^2) + c.$$

La solution générale de l'équation homogène $t(1 + \ln^2(t))x' + 2\ln(t)x = 0$ sera donc

$$x = Ke^{-\ln(1+u^2)} = \frac{K}{1 + u^2} = \frac{K}{1 + \ln^2(t)}.$$

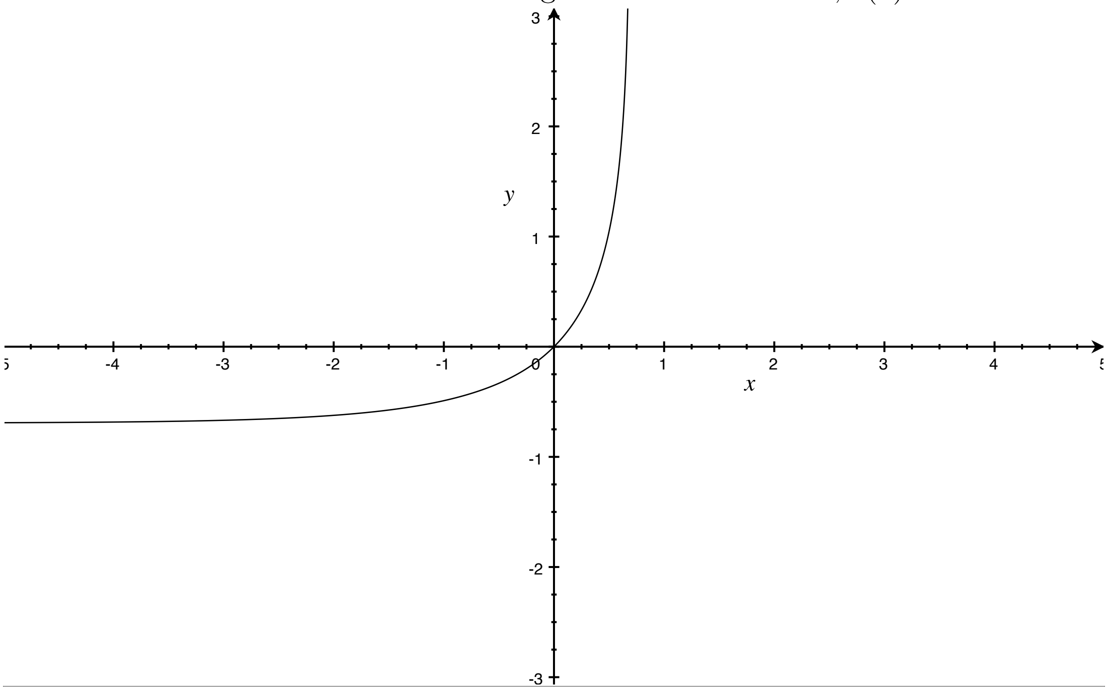
On fait ensuite varier la constante et on pose donc $x = \frac{y}{1+\ln^2(t)}$. L'équation $t(1 + \ln^2(t))x' + 2\ln(t)x = 1$ devient donc

$$t(1 + \ln^2(t))\left(\frac{y'(1 + \ln^2(t)) - 2y\ln(t)/t}{(1 + \ln^2(t))^2}\right) + 2\ln(t)\frac{y}{1 + \ln^2(t)} = 1,$$

c'est à dire $ty' = 1$ si bien que $y' = 1/t$ et $y = \ln(t) + K$. Finalement, la solution générale de notre équation est

$$x = \frac{\ln(t) + K}{1 + \ln^2(t)}.$$

FIGURE 1.12 – Courbe intégrale de $x' - e^t e^x = a, x(0) = 0$



Exercice 1.10 On considère l'équation différentielle $x' - e^t e^x = a$. Déterminer ses solutions en précisant soigneusement leurs intervalles de définition pour $a = 0$ et pour $a = -1$ (faire alors le changement de variable $y = x + t$). Dans chacun des cas, construire la courbe intégrale qui passe par l'origine.

Solution Pour $a = 0$, on trouve une équation à variable séparée $e^{-x}x' = -e^t$ que l'on intègre pour trouver $e^{-x} = -e^t + k$. Nécessairement $k > 0$ et donc $k = e^c$ avec $c \in \mathbb{R}$. On trouve donc $x = -\ln(e^c - e^t)$ sur $]-\infty, c[$. On résout $x(0) = 0$ pour trouver $\ln(e^c - 1) = 0$ et donc $c = \ln(2)$ et on peut tracer le graphe de $x = -\ln(2 - e^t)$ (figure 1.12).

Lorsque $a = -1$, on fait le changement de variable $y = x + t$ et l'équation devient $(y' - 1) - e^t e^{y-t} = -1$ qui se sépare en $-e^{-y}y' = -1$. On intègre pour trouver $e^{-y} = -t + c$ et donc $y = -\ln(c - t)$ si bien que $x = -t - \ln(c - t)$ sur $]-\infty, c[$ avec $c \in \mathbb{R}$. On résout $x(0) = 0$ pour trouver $\ln(c) = 0$ et donc $c = 1$ et on peut tracer le graphe de $x = -t - \ln(1 - t)$ (figure 1.13).

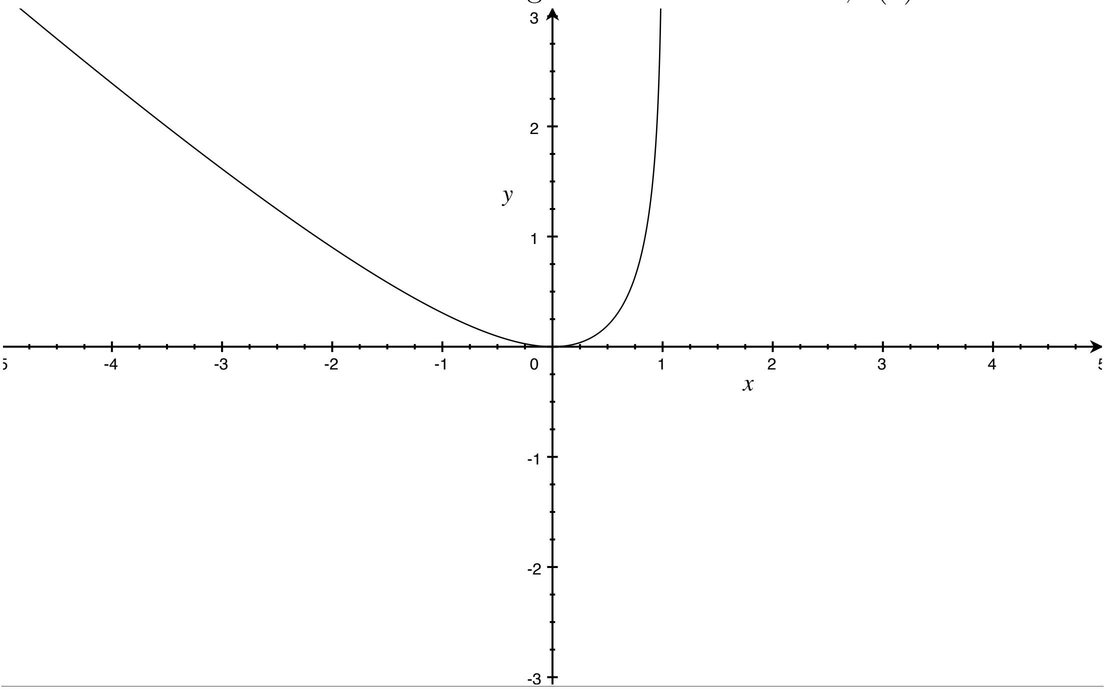
Exercice 1.11 Pour les équations différentielles suivantes, trouver les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $t^2x' - x = 0$,
2. $tx' + x - 1 = 0$.

Solution On traite la première question. On trouve $x = Ke^{-\frac{1}{t}}$ avec $K \in \mathbb{R}$ sur tout intervalle I ne contenant pas 0. Les candidats pour les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme

$$x(t) = \begin{cases} K_+e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ c & \text{si } t = 0 \\ K_-e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

FIGURE 1.13 – Courbe intégrale de $x' - e^t e^x = -1, x(0) = 0$



avec $K_+, K_-, c \in \mathbb{R}$. La condition pour que x soit continue s'écrit

$$\lim_{t \overset{>}{\to} 0} K_+ e^{-\frac{1}{t}} = c = \lim_{t \overset{<}{\to} 0} K_- e^{-\frac{1}{t}},$$

ce qui signifie que $c = 0$ et $K_- = 0$. La condition pour que x soit dérivable[3] s'écrit alors

$$\lim_{t \overset{>}{\to} 0} \frac{K_+ e^{-\frac{1}{t}}}{t} = 0.$$

Cette condition est toujours satisfaite. On en conclut que les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier sont les fonctions

$$x(t) = \begin{cases} K e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

avec $K \in \mathbb{R}$ (on vérifie que l'équation et bien satisfaite si $t = 0$).

Exercice 1.12 Résoudre

1. $x'' - 3x' + 2x = 0$,
2. $x'' + 2x' + 2x = 0$,
3. $x'' - 2x' + x = 0$,
4. $x'' + x = 2\cos^2(t)$.

3. On pourrait regrouper les deux conditions en une seule puisqu'une fonction dérivable est toujours continue.

Solution On traite la dernière question. On sait déjà que les solutions de l'équation homogènes sont les $x = k\cos(t) + l\sin(t)$ avec $k, l \in \mathbb{R}$. On peut alors utiliser la méthode de variation de la constante ou remarquer plus simplement que $2\cos^2(t) = 1 + \cos(2t)$. L'équation $x'' + x = 1$ a pour solution évidente $x \equiv 1$ et l'équation $x'' + x = \cos(2t)$ a une solution de la forme $x = a\cos(2t) + b\sin(2t)$. On dérive deux fois pour trouver $x' = -2a\sin(2t) + 2b\cos(2t)$ puis $x'' = -4a\cos(2t) - 4b\sin(2t)$. On doit donc résoudre

$$(-4a\cos(2t) - 4b\sin(2t)) + a\cos(2t) + b\sin(2t) = \cos(2t).$$

On trouve donc $b = 0$ et $a = -1/3$. Pour finir notre équation a donc pour solution générale

$$x = 1 - \frac{1}{3}\cos(2t) + k\cos(t) + l\sin(t) \quad \left(= \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\cos^2(t) + k\cos(t) + l\sin(t)\right)$$

avec $k, l \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.13
1. Résoudre l'équation différentielle $x'' + \omega^2 x = 0$ avec $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Trouver la solution vérifiant $x(0) = x'(0) = 1$. Tracer la courbe intégrale. Résoudre l'équation différentielle $x'' + \omega^2 x = \sin(\omega t)$.
2. Mêmes questions avec l'équation homogène $x'' + x' - 6x = 0$, les conditions initiales $x(-1) = 1$ et $x'(-1) = 0$ et l'équation $x'' + x' - 6x = e^t$.
3. Mêmes questions avec l'équation homogène $2x'' - 2x' + \frac{x}{2} = 0$, la condition $|\lim_{t\to+\infty} x(t)| < +\infty$ et l'équation $2x'' - 2x' + \frac{x}{2} = t - 1$.

Solution Traitons la troisième question. Le polynôme caractéristique $2\lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2}$ se factorise sous la forme $2(\lambda - \frac{1}{2})^2$ (identité remarquable). On en déduit la forme générale de la solution de l'équation homogène $x = ke^{\frac{t}{2}} + lte^{\frac{t}{2}}$ avec $k, l \in \mathbb{R}$. La seule solution ayant une limite finie à l'infini est la fonction nulle. On cherche maintenant une solution particulière de la forme $x = at + b$ pour l'équation $2x'' - 2x' + \frac{x}{2} = t - 1$ qui devient alors $0 - 2a + \frac{1}{2}(at + b) = t - 1$ si bien que $a = 2$ et $b = 6$. La solution générale est donc $x = 2t + 6 + ke^{\frac{t}{2}} + lte^{\frac{t}{2}}$ avec $k, l \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.14 On considère l'équation $x'' - 4x' + 4x = d(t)$. Résoudre l'équation homogène associée puis trouver une solution particulière lorsque $d(t) = e^{2t}$ et lorsque $d(t) = e^{-2t}$. Donner la forme générale des solutions lorsque $d(t) = 2\cosh(2t)$.

Solution L'équation caractéristique est $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ qui a pour solution double $\lambda = 2$. L'équation homogène a donc pour solution générale $x = ke^{2t} + lte^{2t}$. Pour trouver une solution particulière à l'équation $x'' - 4x' + 4x = e^{2t}$, on pose $x = at^2e^{2t}$ si bien que $x' = (2at + 2at^2)e^{2t}$ et $x'' = (2a + 4at + 2(2at + 2at^2))e^{2t}$. On doit donc résoudre

$$(2a + 4at + 2(2at + 2at^2))e^{2t} - 4(2at + 2at^2)e^{2t} + 4at^2e^{2t} = e^{2t},$$

ce qui se simplifie en $2a = 1$ si bien que la solution est $x = \frac{1}{2}t^2e^{2t}$. Pour trouver une solution particulière à l'équation $x'' - 4x' + 4x = e^{-2t}$, c'est un peu plus simple :

on pose $x = ae^{-2t}$ si bien que $x' = -2ate^{-2t}$ et $x'' = 4ae^{-2t}$. On doit donc résoudre $4ae^{-2t} + 8ae^{-2t} + 4ate^{-2t} = e^{-2t}$ si bien que $a = \frac{1}{16}$ et donc $x = \frac{1}{16}e^{-2t}$. Finalement, on a $2\cosh(2t) = e^{2t} + e^{-2t}$ et, par linéarité, l'équation $x'' - 4x' + 4x = 2\cosh(2t)$ a donc pour solution générale

$$x = \frac{1}{2}t^2e^{2t} + \frac{1}{16}e^{-2t} + ke^{2t} + lte^{2t}$$

avec $k, l \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.15 Résoudre sur $]0,\pi[$ l'équation différentielle $x'' + x = \cot(t)$.

Solution L'équation homogène a pour solution générale $x = k\cos(t) + l\sin(t)$ et on fait varier les constantes en posant $x = u\cos(t) + v\sin(t)$. On rappelle que par définition, $\cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ et on veut résoudre le système

$$\begin{cases} u'\cos(t) + v'\sin(t) = 0 \\ -u'\sin(t) + v'\cos(t) = \cot(t) \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} v' = -u'\cot(t) \\ -u'(\sin(t) + \cot(t)\cos(t)) = \cot(t). \end{cases}$$

Or

$$\sin(t) + \cot(t)\cos(t) = \sin(t) + \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\cos(t) = \frac{\sin^2(t) + \cos^2(t)}{\sin(t)} = \frac{1}{\sin(t)}$$

et notre système devient donc

$$\begin{cases} v' = \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} \\ u' = -\cos(t) \end{cases}$$

On en déduit que $u = -\sin(t) + k$ et on calcule avec le changement de variable $s = \cos(t)$ et donc $\mathrm{d}s = -\sin(t)\mathrm{d}t$,

$$v = \int \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t = \int \frac{-s^2}{1-s^2}\mathrm{d}s.$$

Il faut ensuite effectuer une décomposition en éléments simples

$$\frac{-s^2}{1-s^2} = a + \frac{b}{1-s} + \frac{c}{1+s}.$$

On trouve $a = 1$ et $b = c = -\frac{1}{2}$ si bien que

$$\begin{aligned}
v &= \int \left(1 - \frac{1/2}{1-s} - \frac{1/2}{1+s}\right) \mathrm{d}s \\
&= s + \frac{1}{2}\ln(1-s) - \frac{1}{2}\ln(1+s) + l \\
&= s + \ln\sqrt{\frac{1-s}{1+s}} + l \\
&= s + \ln\left(\frac{\sqrt{1-s^2}}{1+s}\right) + l \\
&= \cos(t) + \ln\left(\frac{\sin(t)}{1+\cos(t)}\right) + l.
\end{aligned}$$

La solution générale de notre équation est donc

$$\begin{aligned}
x &= (-\sin(t) + k)\cos(t) + \left(\cos(t) + \ln\left(\frac{\sin(t)}{1+\cos(t)}\right) + l\right)\sin(t) \\
&= \ln\left(\frac{\sin(t)}{1+\cos(t)}\right)\sin(t) + k\cos(t) + l\sin(t)
\end{aligned}$$

avec $k, l \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.16 Résoudre les équations différentielles suivantes avec le changement de variable suggéré

1. $t^2x'' + tx' + x = 0$ sur $]0, +\infty[$ en posant $t = e^s$.
2. $(1+t^2)^2x'' + 2t(1+t^2)x' + mx = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $m \in \mathbb{R}$ en posant $t = \tan(s)$.

Solution Pour la première équation, en posant $t = e^s$ (puisque $t > 0$), on peut considérer $y(s) := x(t) := x(e^s)$. On aura donc $y'(s) = x'(e^s)e^s$ et

$$y''(s) = (x''(e^s)e^s + x'(e^s))e^s = t^2x''(t) + tx'(t).$$

Notre équation se réécrit donc $y'' + y = 0$ qui a pour solution générale $y = k\cos(s) + l\sin(s)$ si bien que $x = k\cos(\ln(t)) + l\sin(\ln(t))$ avec $k, l \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.17
1. Trouver les solutions de l'équation de Bernoulli $tx' + x - tx^3 = 0$ (faire changement de variable $y = 1/x^2$).
2. Trouver les solutions de l'équation de Riccati $t^2(x' + x^2) = tx - 1$ en montrant d'abord que $x_0 := 1/t$ est une solution particulière (faire ensuite les changements de variables $y = x - x_0$ puis $z = 1/y$).

Solution On traite la première question. On cherche les solutions x qui ne s'annulent pas et on peut donc poser $y = 1/x^2$ si bien que $y' = -2x'/x^3$. En divisant notre équation par x^3, celle ci devient

$$t\frac{x'}{x^3} + \frac{1}{x^2} - t = 0,$$

c'est à dire $-\frac{t}{2}y' + y = t$. L'équation homogène associée a pour solution générale $y = Ke^{2\ln|t|} = Kt^2$. On cherche maintenant une solution particulière en posant $y = at$ si bien que l'équation devient $-\frac{t}{2}a + at = t$ et donc $a = 2$ (on pourrait aussi faire varier la constante). On a donc $y = 2t + Kt^2$ avec $K \in \mathbb{R}$ et alors $x = \pm\frac{1}{\sqrt{y}}$ lorsque $y > 0$. Il est pratique de poser $c = 2/|K|$ quand $K \neq 0$ et on trouve donc

$$x = \begin{cases} \pm\frac{1}{\sqrt{2t\left(1-\frac{t}{c}\right)}} & \text{sur }]0, c[\\ \pm\frac{1}{\sqrt{2t}} & \text{sur }]0, +\infty[\\ \pm\frac{1}{\sqrt{2t\left(1+\frac{t}{c}\right)}} & \text{sur }]-\infty, -c[\text{ et }]0, +\infty[\end{cases}$$

avec $c > 0$ et il faut rajouter la solution nulle (il n'y en a pas d'autre à cause des asymptotes verticales).

Exercice 1.18
1. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $x' + e^{t^2}x = 0$ tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $x'' + e^{t^2}x = 0$ est bornée (on pourra poser $y := x^2 + e^{-t^2}(x')^2$).

Solution Soit A la primitive [4] de e^{t^2} qui s'annule en 0. Alors les solutions de l'équation $x' + e^{t^2}x = 0$ sont les $x = Ke^{-A(t)}$ avec $K \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$, il (faut et) suffit de montrer que $\lim_{t\to+\infty} A(t) = +\infty$. Or $A(t) = \int_0^t e^{\tau^2}\mathrm{d}\tau \geq \int_0^t \mathrm{d}\tau = t \to \infty$. Cela répond à la première question.

Pour l'autre, on pose donc $y := x^2 + e^{-t^2}(x')^2$ et on calcule

$$y' = 2xx' - 2te^{-t^2}(x')^2 + 2e^{-t^2}x'x'' = -2te^{-t^2}(x')^2 + 2e^{-t^2}(x'' + e^{t^2}x)x' = -2te^{-t^2}(x')^2.$$

On voit donc que $y' \geq 0$ pour $t \leq 0$ et $y' \leq 0$ pour $t \geq 0$. Il suit que y est croissante pour $t \leq 0$ et décroissante pour $t \geq 0$. Il suit que y est majorée (par $y(0)$ su bien que x^2 aussi et x est donc bornée.

Exercice 1.19
1. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $t^2x'' + x = 0$ (on pourra poser $t = e^s$).
2. Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(x) = f(1/x)$ lorsque $x \neq 0$.

Solution Si on pose $t = e^s$ et $y(s) = x(t) = x(e^s)$, on a $y'(s) = x'(e^s)e^s = tx'(t)$ et $y''(s) = (x''(e^s)e^s + x'(e^s))e^s = t^2x''(t) + tx'(t)$. En d'autres termes, $y = x$, $y' = tx'$ et $y'' = t^2x'' + tx'$. On a donc $t^2x'' + x = y'' - y' + y$ et notre équation se réécrit donc $y'' - y' + y = 0$. Le polynôme caractéristique $\lambda^2 - \lambda + 1$ a pour racine $-j = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (et son conjugué) si bien que les solutions sont les $y = ke^{s/2}\cos(\frac{\sqrt{3}s}{2}) + le^{s^2}\sin(\frac{\sqrt{3}s}{2})$, c'est à dire $x = k\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln(t)}{2}\right) + l\sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln(t)}{2}\right)$ avec $k, l \in \mathbb{R}$. Nous avons ainsi répondu à la première question.

Si une fonction dérivable f satisfait $f'(x) = f(1/x)$ lorsque $x \neq 0$, on aura aussi $f'(1/x) = f(x)$ (quitte à changer x en $1/x$). De plus, f' sera aussi dérivable en

4. Attention : on ne sait pas comment la calculer.

$x \neq 0$ et on aura $f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'(1/x) = -\frac{1}{x^2} f(x)$. En d'autres termes, f satisfera $x^2 f'' + f = 0$ lorsque $x \neq 0$. On sait qu'alors il existe $k, l \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = k\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\right) + l\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2}\right)$$

lorsque $x > 0$. Par continuité de f, on aura

$$f(0) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0.$$

On va montrer que si $k \neq 0$ ou $l \neq 0$, alors $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite en 0^+. On en déduira que f n'est pas dérivable en 0 à moins que f ne soit la fonction nulle. Supposons donc que $k \neq 0$ (resp. $l \neq 0$). On pose alors $x_n := e^{-\frac{4n\pi}{\sqrt{3}}}$ (resp. $x_n := e^{-\frac{(4n-1)\pi}{\sqrt{3}}}$). On a bien $x_n \to 0$ mais

$$\frac{f(x_n)}{x_n} = k\frac{1}{\sqrt{x_n}} \to \pm\infty \quad \left(\text{resp. } \frac{f(x_n)}{x_n} = l\frac{1}{\sqrt{x_n}} \to \pm\infty\right).$$

En conclusion, la fonction nulle est l'unique fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ tout entier telle que $f'(x) = f(1/x)$ pour tout $x \neq 0$.

2. Espaces vectoriels normés

2.1 Norme

La notion de norme consiste à associer une taille à un objet et plus précisément un réel positif à un vecteur :

Définition 2.1.1 Une *norme* sur un espace vectoriel réel E est une application

$$\| \ \| : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

telle que

1. $\forall v \in E, \quad \|v\| = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow v = 0_E,$
2. $\forall v, w \in E, \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|,$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in E, \quad \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|.$

Un espace vectoriel muni d'une norme est un *espace vectoriel normé*.

Remarques

1. En fait, il n'est pas nécessaire de demander que $\|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$: on aura automatiquement $\|0_E\| = \|0_{\mathbb{R}} 0_E\| = 0_{\mathbb{R}} \|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$.
2. Il n'est pas non plus nécessaire de demander que que $\|v\| \geq 0$: on aura automatiquement
$$\|v\| = \frac{\|v\| + \|v\|}{2} = \frac{\|v\| + \|-v\|}{2} \geq \frac{\|v - v\|}{2} = 0.$$
3. On a toujours $\|-v\| = \|v\|$: en effet,
$$\|-v\| = \|(-1)v\| = |-1|\|v\| = 1\|v\| = \|v\|.$$
4. On aura toujours
$$|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\| :$$

quitte à échanger v et w, il suffit de remarquer que

$$\|v\| = \|v - w + w\| \leq \|v - w\| + \|w\|.$$

5. Lorsque E est un espace vectoriel complexe (et pas seulement réel), on demande parfois que l'égalité $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ soit aussi satisfaite pour $\lambda \in \mathbb{C}$.

Rappel : si X est un ensemble quelconque et E un espace vectoriel, alors l'ensemble $\mathcal{F}(X, E)$ de toutes les applications $f : X \to E$ est un espace vectoriel pour les lois

1. $\forall f, g \in \mathcal{F}(X, E), \quad \forall x \in X, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $\forall f \in \mathcal{F}(X, E), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Exemple 1. La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$. De même, le module est une norme sur $\mathbb{C}$. Tout ce qui suit a un analogue avec $\mathbb{C}$ à la place de $\mathbb{R}$.

2. On munira *toujours* $\mathbb{R}^n$ de la norme

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Mais on dispose aussi sur $\mathbb{R}^n$ de la *norme euclidienne*

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

(bien utile en géométrie) et plus généralement la norme

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p := (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$$

pour $p \geq 1$ (mais c'est difficile de vérifier que c'est bien une norme). Par exemple, si $v = (-3, 4) \in \mathbb{R}^2$, on aura $\|v\|_\infty = 4$, $\|v\|_2 = 5$ et $\|v\|_1 = 7$.

3. On peut définir différentes norme sur $\mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ comme les normes $\| \ \|_p$ (en considérant les $m \times n$ coefficients) mais on préférera

$$\left\| \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \right\| = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{i,j}|$$

4. On peut munir l'espace (de dimension infinie) des polynômes $\mathbb{R}[t]$ de la norme

$$\left\| \sum_{i=0}^{d} a_i t^i \right\|_\infty = \max_{i=0}^{d} |a_i|.$$

5. Sur l'espace $\ell_\infty(\mathbb{R})$ des suites *bornées* de nombres réels, on pose

$$\|(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)\|_\infty := \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|.$$

6. Soit E un espace vectoriel normé et X un ensemble quelconque. Une application $f : X \to E$ est dite *bornée* s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X, \|f(x)\| \leq k$. Les applications bornées forment un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}^{\mathrm{b}}(X, E)$ de $\mathcal{F}(X, E)$ que l'on munit de la norme

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} \|f(x)\|.$$

On pourra remarquer que $\ell_\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{F}^b(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et que l'exemple précédent n'est donc qu'un cas particulier de celui-ci.

7. On peut munir l'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de la norme

$$\|f\|_\infty := \max_{a\leq t\leq b}|f(t)| \quad \text{ou} \quad \|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } p\geq 1.$$

Par exemple, avec $[a,b]=[0,1]$ et $f(t)=t$, on aura $\|f\|_\infty = 1$, $\|f\|_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\|f\|_1 = 1/2$.

Remarques 1. La condition 2 de la définition 2.1.1 est l'*inégalité triangulaire.* C'est la partie délicate des conditions mais elle est facile à vérifier pour les $\|\ \|_\infty$.

2. L'inégalité triangulaire pour les $\|\ \|_p$ s'appelle l'inégalité l'*inégalité de Minkovski.* Elle repose sur *l'inégalité de Holder* lorsque $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

ou

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leq \left(\int_a^b f(t)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g(t)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Lorsque $p=2$, l'inégalité de Holder s'appelle aussi *inégalité de Cauchy-Schwarz.*

On rappelle que si E et F sont deux espaces vectoriels, leur produit

$$E\times F := \{(v,w), v\in E, w\in F\}$$

est muni des lois (terme à terme)

1. $\forall (v_1,w_1),(v_2,w_2)\in E\times F, (v_1,w_1)+(v_2,w_2) = (v_1+v_2, w_1+w_2)$,
2. $\forall \lambda\in\mathbb{R}, (v,w)\in E\times F, \lambda(v,w) = (\lambda v, \lambda w)$.

Proposition 2.1.2 1. Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E, alors alors la norme de E induit une norme sur F.

2. Si E et F sont deux espaces vectoriels normés, alors l'application

$$(v,w)\mapsto \max(\|v\|,\|w\|)$$

est une norme sur $E\times F$. ■

Démonstration. La première assertion est conséquence immédiate de la définition et la seconde n'est pas plus difficile mais nous pouvons tout de même développer. Si $v\in E$ et $w\in F$, on a $\|v\|\geq 0$ et $\|w\|\geq 0$ si bien que

$$\begin{aligned}(v,w)=(0,0) &\Leftrightarrow v=0 \text{ et } w=0\\ &\Leftrightarrow \|v\|=0 \text{ et } \|w\|=0\\ &\Leftrightarrow \max\{\|v\|,\|w\|\}=0\\ &\Leftrightarrow \|(v,w)\|=0.\end{aligned}$$

Si on se donne $v_1, v_2 \in E$ et $w_1, w_2 \in F$, on a

$$\begin{aligned}\|(v_1, w_1) + (v_2, w_2)\| &= \|(v_1 + v_2, w_1 + w_2)\| \\ &= \max\{\|v_1 + v_2\|, \|w_1 + w_2\|\} \\ &\leq \max\{\|(v_1\| + \|v_2\|, \|w_1\| + \|w_2\| \\ &\leq \max\{\|(v_1\|, \|w_1\|\} + \max\{\|v_2\|, \|w_2\|\} \\ &= \|(v_1, w_1)\| + \|(v_2, w_2)\|.\end{aligned}$$

On a utilisé l'inégalité $\max\{a + b, c + d\} \leq \max\{a, c\} + \max\{b, d\}$. Enfin, si on se donne $v \in E$, $w \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on aura

$$\begin{aligned}\|\lambda(v, w)\| &= \|(\lambda v, \lambda w)\| \\ &= \max\{\|\lambda v\|, \|\lambda w\|\} \\ &= \max\{|\lambda|\|v\|, |\lambda|\|w\|\} \\ &= |\lambda| \max\{\|v\|, \|w\|\} \\ &= |\lambda|\|(v, w)\|.\end{aligned}$$

■

Définition 2.1.3 Si E est un espace vectoriel normé, on définit la *boule ouverte*, la *boule fermée* et la *sphère* de centre $v_0 \in E$ et de rayon $R \geq 0$:

$$\mathbb{B}^-(v_0, R) = \{v \in E, \|v - v_0\| < R\},$$

$$\mathbb{B}^+(v_0, R) = \{v \in E, \|v - v_0\| \leq R\}.$$

et

$$\mathbb{S}(v_0, R) = \{v \in E, \|v - v_0\| = R\}.$$

Lorsque $v_0 = 0_E$ et $R = 1$, on dit *boule unité* ou *sphère unité*.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}$, une boule ouverte est un intervalle $]a, b[$ avec $a \leq b \in \mathbb{R}$ (et une boule fermée est un intervalle $[a, b]$) :

$$\mathbb{B}^-(c, R) =]c - R, c + R[\quad \text{et} \quad]a, b[= \mathbb{B}^-\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right).$$

2. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la *norme euclidienne*, une boule est un disque et une sphère est un cercle. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la *norme euclidienne*, une boule (resp. sphère) est ce qu'on appelle communément une boule (resp. sphère).
3. Attention, dans $\mathbb{R}^2$ muni de la *norme infinie*, la sphère unité est un *carré*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \max\{|x|, |y|\} = 1\}$$

(de coté 2) et dans $\mathbb{R}_3$, c'est le cube. Avec la norme 1, on trouve un carré de coté $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}^2$ et un octaèdre dans $\mathbb{R}^3$.

2.2 Continuité

Définition 2.2.1 Soient E et F deux espaces vectoriels et $X \subset E, Y \subset F$. Une application $f : X \to Y$ est *continue en* $v \in X$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall w \in X, \quad \|w - v\| \leq \eta \Rightarrow \|f(w) - f(v)\| \leq \epsilon.$$

Elle est *continue* sur X si elle est continue en tout $v \in X$. Elle est *uniformément continue* si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall v, w \in X, \quad \|w - v\| \leq \eta \Rightarrow \|f(w) - f(v)\| \leq \epsilon.$$

Enfin, f est *lipschitzienne* s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall v, w \in X, \quad \|f(w) - f(v)\| \leq k\|w - v\|.$$

Remarques
1. Une application lipschitzienne est toujours uniformément continue (poser $\eta = \epsilon/k$) et une application uniformément continue est toujours continue.
2. On définit plus généralement la notion d'*espace métrique* qui est un ensemble muni d'une *distance*. Dans notre cas, la distance est $\mathrm{d}(v, w) = \|w - v\|$. On peut alors considérer les différentes notions de continuités dans ce contexte.

Exemples
1. Pour une fonction réelle $f : I \to \mathbb{R}$ d'une variable réelle, on retrouve les notions usuelles. Rappelons que si f est dérivable en $t \in I$, alors f est continue en t. Donc, si elle est dérivable sur I, elle est aussi continue sur I.
2. On rappelle aussi le *théorème de Heine* : si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors elle est uniformément continue
3. Une application

$$f : I \to \mathbb{R}^n, t \mapsto (f_1(t), \ldots, f_r(t))$$

est continue (pour $\| \ \|_\infty$) en $t \in I$ si et seulement si ses composantes $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ sont continues en t (et idem avec $\mathbb{C}^n$).

Proposition 2.2.2 Si $f : X \to Y$ est continue et $g : Y \to Z$ est continue, alors $g \circ f$ aussi est continue en v.

Démonstration. La démonstration est identique au cas classique (fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et est laissée en exercice. ■

Remarques
1. Le résultat reste valide pour les applications continues en v et $f(v)$ respectivement, uniformément continues ou lipschitziennes.
2. Si $Y \subset Z \subset F$, alors une application $f : X \to Y$ est continue en v, etc. si et seulement si l'application composée $X \to Y \hookrightarrow Z$ est continue en v, etc. C'est pourquoi en pratique, on peut souvent supposer que $Y = F$.
3. Si $X \subset E$ et $Y \subset F_1 \times F_2$, alors une application

$$f : X \to Y, \quad v \mapsto (f_1(v), f_2(v))$$

est continue, etc. si et seulement si f_1 et f_2 sont continues, etc..

Proposition 2.2.3 Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $X \subset E$. Alors l'ensemble $\mathcal{C}(X, F)$ des applications continues de X dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, F)$.

Démonstration. Ça se démontre exactement comme dans le cas classique ($X = I \subset \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$). ■

Remarques
1. Le résultat reste valide pour les applications continues en $v \in X$, uniformément continues ou lipschitziennes.
2. Si E est un espace vectoriel normé, alors l'addition $E \times E \to E$ est une application continue (et même 2-lipschitzienne $\|v + w\| \leq 2\max(\|v\|, \|w\|)$).
3. La multiplication $\mathbb{R} \times E \to E$ aussi est continue (en fait *bilinéaire* continue - voir plus loin).
4. Si E est en fait un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, alors la multiplication $\mathbb{C} \times E \to E$ aussi est (bilinéaire) continue.
5. La norme $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ est toujours une application continue (et même 1-lipschitzienne : $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\|$).

2.3 Applications linéaires continues

Lemme 2.3.1 Pour une application linéaire $a : E \to F$ entre deux espaces vectoriels normés et une constante $k \in \mathbb{R}$, les conditions suivantes sont équivalentes :
1. $\forall v \in E, \quad \|a(v)\| \leq k\|v\|$,
2. $\forall v \in E, \quad \|v\| \leq 1 \Rightarrow \|a(v)\| \leq k$,
3. $\forall v \in E, \quad \|v\| = 1 \Rightarrow \|a(v)\| \leq k$.

Démonstration. Il suffit bien sûr de montrer que la dernière condition implique la première. Or si v est un vecteur non nul de E, alors le vecteur $\frac{1}{\|v\|}v$ est de norme un. On aura donc (puisque a est linéaire)

$$\frac{\|a(v)\|}{\|v\|} = \left\|\frac{1}{\|v\|}a(v)\right\| = \left\|a\left(\frac{1}{\|v\|}v\right)\right\| \leq k$$

si bien que $\|a(v)\| \leq k\|v\|$. Lorsque $v = 0_E$, l'inégalité est aussi satisfaite puisqu'alors $a(v) = 0_F$ (puisque a est linéaire) si bien que $\|a(v)\| = 0 = k\|v\|$. ■

Définition 2.3.2 On dit alors que a est *bornée* par k (sur la sphère ou sur la boule unité).

Théoreme 2.3.3 Soit $a : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :
1. a est bornée,
2. a est lipschitzienne,
3. a est uniformément continue,
4. a est continue,
5. a est continue en 0_E.

Démonstration. On fait une démonstration circulaire. On suppose d'abord que a est bornée si bien qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $v \in E$ on ait $\|a(v)\| \leq k\|v\|$. En particulier, si $v, w \in E$, on aura (puisque a est linéaire)

$$\|a(w) - a(v)\| = \|a(w - v)\| \leq k\|w - v\|$$

et a est donc lipschitzienne. Les implications suivantes sont automatiques et il reste à montrer que a est toujours bornée lorsque a est continue en 0. En prenant $\epsilon = 1$ dans la définition, on voit qu'il existe $\eta > 0$ tel que, lorsque $\|v\| \leq \eta$, on a $\|a(v)\| \leq 1$ et on pose $k := \frac{1}{\eta}$. Si $v \in E$ est un vecteur de norme un, on a $\left\|\frac{1}{k}v\right\| = \eta$ et donc (puisque a est linéaire) :

$$\frac{\|a(v)\|}{k} = \left\|\frac{1}{k}a(v)\right\| = \left\|a\left(\frac{1}{k}v\right)\right\| \leq 1.$$

On voit donc que $\|av\| \leq k$. ∎

Exemples 1. Toute application linéaire $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est continue (pour les $\| - \|_\infty$) : si

$$a(x_1, \ldots, x_m) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m, \ldots, a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m),$$

alors pour tout vecteur v, on a

$$\|a(v)\|_\infty \leq \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{i,j}| \|v\|_\infty.$$

et on peut donc prendre

$$k = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{i,j}|.$$

2. On montrera plus tard (théorème 2.5.4) que toute application linéaire entre espaces vectoriels normés *de dimension finie* est continue (quelles que soient les normes).
3. L'application

$$a : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}, \quad P \to P(2)$$

est linéaire mais n'est pas continue. En effet, supposons qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\|P\|_\infty = 1 \Rightarrow |a(P)| \leq k$. On peut appliquer ça à $P_n := t^n \in \mathbb{R}[t]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $a(t^n) = P_n(2) = 2^n$, on aurait $2^n \leq k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Contradiction.

On désignera par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires *continues* de E dans F et on écrira $\mathcal{L}(E)$ lorsque $F = E$.

Proposition 2.3.4 Si E et F sont deux espaces vectoriels normés, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$ et

$$\|a\| := \sup_{v \neq 0_E} \frac{\|a(v)\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|a(v)\|$$

définit une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

Démonstration. On rappelle que l'ensemble $\mathrm{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$. D'autre part, on a montré dans le corollaire 2.2.3 que $\mathcal{C}(E,F)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$. Il suit que

$$\mathcal{L}(E,F) := \mathrm{L}(E,F) \cap \mathcal{C}(E,F)$$

est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$. Maintenant, l'existence de la borne supérieure résulte du théorème 2.3.3 et la dernière égalité résulte du lemme 2.3.1. Il reste à vérifier que cela définit bien une norme. Clairement si $\|a\| = 0$, alors $\|a(v)\| = 0$ pour tout $v \neq 0_E$ et cela implique que $a(v) = 0_F$. Puisque a est linéaire, c'est aussi vrai si $v = 0_E$ et on a donc nécessairement $a = 0_{E,F}$. Ensuite, si $a, b \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\|v\| = 1$, on aura

$$\|(a+b)(v)\| = \|a(v) + b(v)\| \leq \|a(v)\| + \|b(v)\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

Ceci étant vrai chaque fois que $\|v\| = 1$, on aura bien $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$. Enfin, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\|v\| = 1$, on aura $\|(\lambda a)(v)\| = |\lambda|\|a(v)\|$ si bien que

$$\|\lambda a\| = \sup_{\|v\|=1} \|\lambda a(v)\| = \sup_{\|v\|=1} |\lambda|\|a(v)\| = |\lambda| \sup_{\|v\|=1} \|a(v)\| = |\lambda|\|a\|. \qquad \blacksquare$$

On munira toujours $\mathcal{L}(E,F)$ de cette norme, dite *subordonnée* (qui dépend des normes choisies sur E et F).

Remarque Si a est une application linéaire continue, on a toujours

$$\|a(v)\| \leq \|a\|\|v\|$$

si bien que $\|a\|$ est une borne pour a (sur la sphère unité). C'est la plus petite borne.

Proposition 2.3.5 Si $a : E \to F$ et $b : F \to G$ sont deux applications linéaires continues, alors $\|b \circ a\| \leq \|b\|\|a\|$.

Démonstration. En effet, si $\|v\| = 1$, on a

$$\|(b \circ a)v\| = \|b(a(v))\| \leq \|b\|\|a(v)\| \leq \|b\|\|a\|. \qquad \blacksquare$$

On rappelle que si E, F, G sont trois espaces vectoriels, une application $b : E \times F \to G$ est *bilinéaire* si elle est linéaire en *chaque* variable (lorsqu'on fixe l'autre).

Exemples

1. La multiplication sur $\mathbb{R}$ ou sur n'importe quelle algèbre (voir plus loin) est bilinéaire.

2. Si E et F sont deux espaces vectoriels, l'action
$$\mathrm{L}(E,F)\times E\to F,\quad (a,v)\mapsto a(v)$$
est bilinéaire.
3. Si E,F,G sont trois espaces vectoriels, la composition
$$\mathrm{L}(E,F)\times \mathrm{L}(F,G)\to \mathrm{L}(E,G),\quad (a,b)\mapsto b\circ a$$
est bilinéaire.

Le théorème 2.3.3 s'étend aux applications bilinéaires :

Proposition 2.3.6 Soient E,F,G des espaces vectoriels normés. Alors, une application bilinéaire $b:E\times F\to G$ est continue si et seulement si
$$\exists k\in\mathbb{R},\forall v\in E,w\in F,\quad \|b(v,w)\|\leq k\|v\|\|w\|.$$

Démonstration. Si b est continue, alors il existe $\eta>0$ tel que si $\|v\|,\|w\|\leq\eta$, alors $\|b(v,w)\|\leq 1$ et il suffit de poser $k=\frac{1}{\eta^2}$. En effet, si $v\in E$ et $w\in F$ sont non nuls, on applique ça à $\frac{\eta}{\|v\|}v$ et $\frac{\eta}{\|w\|}w$.

Supposons que réciproquement, la condition est satisfaite. Donnons nous deux vecteurs $v_0\in E$ et $w_0\in F$ ainsi que $\epsilon>0$. Posons $M=\max\{\|v_0\|,\|w_0\|\}$ et $\eta=\min\{M,\epsilon/3kM\}$ si $M\neq 0$ et $M=\sqrt{\epsilon/k}$ sinon. Puisque b est bilinéaire, si $v\in E$ et $w\in F$, on a
$$b(v,w)-b(v_0,w_0)=b(v-v_0,w-w_0)+b(v-v_0,w_0)+b(v_0,w-w_0).$$
Si $\|v-v_0\|,\|w-w_0\|\leq\eta$, on aura donc
$$\begin{aligned}\|b(v,w)-b(v_0,w_0)\|&\leq k(\|v-v_0\|\|w-w_0\|+\|v-v_0\|\|w_0\|+\|v_0\|\|w-w_0)\|)\\&\leq k(\eta^2+\eta M+M\eta)\\&\leq 3k\eta M\\&\leq\epsilon.\end{aligned}$$
∎

Exemple Si E,F,G sont trois espaces vectoriels normés, la composition et l'action
$$\mathcal{L}(E,F)\times\mathcal{L}(F,G)\to\mathcal{L}(E,G)\quad\text{et}\quad \mathcal{L}(E,F)\times E\to F$$
sont des applications bilinéaires continues.

2.4 Suites et séries

Définition 2.4.1 Soit E un espace vectoriel normé. Une suite $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E *converge* vers $v\in E$, et on écrit $\lim_i v_i=v$, si
$$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{R},\forall i\geq N,\quad \|v-v_i\|\leq\epsilon.$$

C'est une suite *de Cauchy* si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}, \forall i, j \geq N, \quad \|v_i - v_j\| \leq \epsilon.$$

Remarques 1. Si la limite existe, elle est unique. En effet, si v' est une autre limite et $\epsilon > 0$, alors il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\|v - v_i\| \leq \epsilon/2$ et $\|v' - v_i\| \leq \epsilon/2$ si bien que $\|v - v'\| \leq \epsilon$. Cela étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a $\|v - v'\| = 0$ et donc $v = v'$.
2. La suite v_i converge si et seulement si la suite $\|v - v_i\|$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$. De même, la suite est de Cauchy si et seulement si la double suite $\|v_i - v_j\|$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$.
3. Une suite convergente est toujours une suite de Cauchy : c'est la réciproque qui n'est pas toujours vraie.
4. Une suite $(v_i, w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge dans $E \times F$ si et seulement si $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ convergent. Idem pour les suites de Cauchy.

Exemples 1. La suite (x_i, y_i) converge vers (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si x_i tend vers x et y_i tend vers y dans $\mathbb{R}$. Même chose pour les suites de Cauchy. Même chose sur $\mathbb{R}^n$. Ou sur $\mathbb{C}^n$.
2. Une suite z_i converge vers z dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z_i)$ tend vers $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z_i)$ tend vers $\mathrm{Im}(z)$. Même chose pour les suites de Cauchy.

Proposition 2.4.2 Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $X \subset E$ et $Y \subset F$. Une application $f : X \to Y$ est continue en $v \in X$ si et seulement si, pour toute suite v_i qui converge vers v dans X, la suite $f(v_i)$ converge vers $f(v)$.

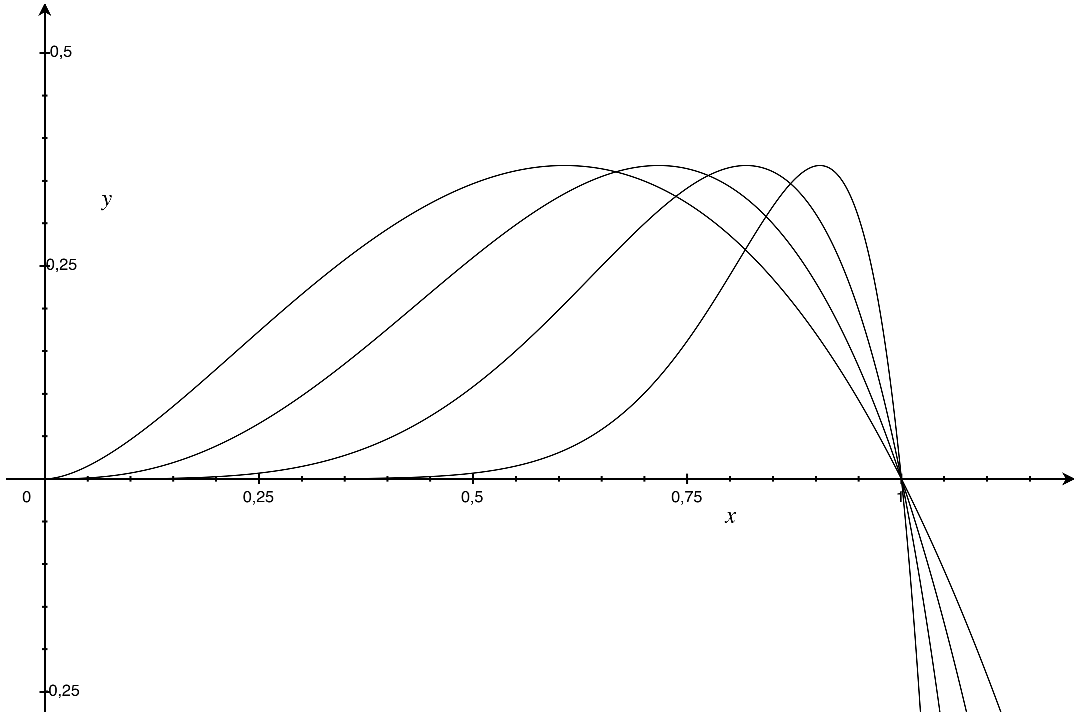
Démonstration. La démonstration est identique au cas classique (fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Supposons que f est continue en v et que la suite v_i converge vers v. Puisque f est continue, si on se donne $\epsilon > 0$, alors il existe $\eta > 0$ tel que, chaque fois que $\|w - v\| \leq \eta$, on a $\|f(w) - f(v)\| \leq \epsilon$. Puisque v_i converge vers v, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que chaque fois que $i \geq N$, on a $\|v - v_i\| \leq \eta$. On a alors nécessairement $\|f(v_i) - f(v)\| \leq \epsilon$. Réciproquement, supposons que f n'est pas continue en v. Il existe alors $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ il existe $w \in X$ avec $\|w - v\| \leq \eta$ mais $\|f(w) - f(v)\| > \epsilon$. En particulier, pour $\eta = 1/i$, il existe $v_i \in X$ tel que $\|v - v_i\| \leq 1/i$ mais $\|f(v_i) - f(v)\| > \epsilon$. On voit donc que la suite v_i converge vers v mais que $f(v_i)$ ne converge pas vers $f(v)$. ∎

Définition 2.4.3 Soient E un espace vectoriel normé et X un ensemble quelconque.
1. Une suite de fonctions $f_i : X \to E$ *converge simplement* vers une fonction f si la suite $f_i(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in X$.
2. Elle *converge uniformément* si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}, \forall i \geq N, \forall x \in X, \quad \|f(x) - f_i(x)\| \leq \epsilon.$$

Exemples 1. Si f_i converge uniformément vers f, alors f_i converge simplement vers f.

FIGURE 2.1 – suite (non uniformément) convergente



2. Le contraire est faux même lorsque $X = [0,1]$ et $E = \mathbb{R}$ comme le montre l'exemple des « vagues » $f_i(x) = x^i \ln(1/x^i)$ si $x \neq 0$ et $f_i(0) = 0$, qui tendent simplement vers 0 bien que $\sup_{0\leq t\leq 1} |f_i(t)| = 1/e$.
3. Si une suite de fonctions continues $f_i : X \to E$ converge uniformément vers une fonction f, alors f est nécessairement continue (c'est un théorème qui se démontre comme dans le cas classique).
4. Une suite f_i converge vers f dans $\mathcal{F}^b(X,E)$ pour $\| \ \|_\infty$ si et seulement si f_i converge uniformément vers f.

Définition 2.4.4 Soit E un espace vectoriel normé. Une partie $U \subset E$ est *ouverte* si c'est une union (éventuellement infinie) de boules ouvertes :

$$U = \bigcup_{v_i \in E} \mathbb{B}^-(v_i, R_i).$$

Une partie $Z \subset E$ est *fermée* si son complémentaire $U = E \setminus Z$ est ouvert.

Exemples 1. Dans $\mathbb{R}$, un intervalle ouvert est ouvert, un intervalle fermé est fermé et un intervalle borné qui est ouvert d'un coté et fermé de l'autre n'est ni ouvert, ni fermé.
2. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{N}$ est fermé mais pas l'ensemble $X := \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$.
3. Plus généralement, une boule ouverte est ouverte et une boule fermée (ou une sphére) est fermée.

Proposition 2.4.5

1. Une partie $U \subset E$ est ouverte si et seulement si
$$\forall v \in U, \exists \epsilon > 0, \quad \mathbb{B}^-(v,\epsilon) \subset U \quad (\text{ou } \mathbb{B}^+(v,\epsilon) \subset U).$$
2. Une partie $Z \subset E$ est fermée si et seulement si, pour toute suite $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans E, on a
$$\begin{cases} \forall i \in \mathbb{N}, v_i \in Z \\ \lim_{i\to\infty} v_i = v \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v \in Z.$$

Démonstration. Si la condition sur U est satisfaite, il suffit de remarquer qu'on peut alors écrire
$$U = \bigcup_{v\in U} \mathbb{B}^-(v,\epsilon_v).$$
Réciproquement, si $v \in U = \cup_{i\in I}\mathbb{B}^-(v_i,R_i)$, alors il existe $i \in I$ tel que $v \in \mathbb{B}^-(v_i,R_i)$. On pose alors $\epsilon := \frac{1}{2}(R_i - \|v - v_i\|)$ et on aura
$$\mathbb{B}^-(v,\epsilon) \subset \mathbb{B}^-(v_i,R_i) \subset U.$$
En effet, si $w \in \mathbb{B}^-(v,\epsilon)$, alors
$$\|w - v_i\| \le \|w - v\| + \|v - v_i\| \le \epsilon + \|v - v_i\| < R_i.$$
Supposons maintenant que Z est fermé et donnons nous une suite qui satisfait les hypothèses de la condition. Comme $E \setminus Z$ est ouvert, si $v \notin Z$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{B}(v,\epsilon) \cap Z = \emptyset$. On a donc $\|v - v_i\| \ge \epsilon$ et la suite ne converge pas. Inversement, si Z n'est pas fermé, alors il existe $v \notin Z$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on ait $\mathbb{B}^+(v,1/i) \cap Z \neq \emptyset$. Il existe donc $v_i \in Z$ tel que $\|v - v_i\| \le 1/i$ et donc $v_i \to v$. ■

Remarques

1. Plus généralement, lorsque $Y \subset X \subset E$, on dit que Y est *ouverte dans* X s'il existe une partie ouverte $U \subset E$ telle que $Y = U \cap X$. On dit que Y est *fermée dans* X si son complémentaire est ouvert *dans* X.
2. Les parties fermées de X sont stable par intersection quelconque et union finie. Les parties ouvertes de X sont stables par union quelconque et intersection finie. Un ensemble muni d'une telle structure est appelé *espace topologique*.
3. Important : une application $f : X \to Y$ est continue si et seulement si pour ouvert $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X. Même chose avec les parties fermées.
4. On dit que X est *connexe* si X et $\emptyset$ sont les seules parties qui sont à la fois ouvertes et fermées. On peut montrer qu'un espace vectoriel normé est connexe.

Définition 2.4.6 Un espace vectoriel normé E est un *espace de Banach* si toute suite de Cauchy converge dans E.

Exemples

1. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces de Banach.
2. Plus généralement, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces de Banach.
3. $\mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ sont des espaces de Banach.
4. $\ell_\infty(\mathbb{R})$ et $\ell_\infty(\mathbb{C})$ sont des espaces de Banach.

5. Si E est un espace de Banach et X un ensemble, alors $\mathcal{F}^{\mathrm{b}}(X,E)$ est un espace de Banach.
6. L'espace des polynômes n'est *pas* un espace de Banach : $P_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^n}{n!}$ est une suite de Cauchy qui ne converge pas dans $\mathbb{R}[t]$.
7. L'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour $\| \ \|_\infty$ mais pas pour $\| \ \|_1$ (considérer la suite de fonctions
$$f_n(x)=\begin{cases} n \text{ si } x\leq 1/n^2\\ 1/\sqrt{x} \text{ si } x>1/n^2,\end{cases}$$
sur $[0,1|)$.
8. L'espace $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continûment dérivables sur $[a,b]$ muni de $\| \ \|_\infty$ n'est *pas* un espace de Banach.

Proposition 2.4.7 1. Soit E un espace vectoriel normé et $F\subset E$ est un sous-espace vectoriel. Si E est un espace de Banach et F est fermé dans E, alors F est un espace de Banach. Réciproquement, si F est un espace de Banach, alors F est fermé.
2. Si E et F sont des espaces de Banach, alors $E\times F$ aussi.

Démonstration. 1. Soit $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F. Si c'est une suite de Cauchy et que E est un espace de Banach, alors elle converge vers $v\in E$. Si F est fermé alors $v\in F$ et la suite converge dans F. Réciproquement, si la suite converge vers $v\in E$, alors c'est une suite de Cauchy. Si F est un espace de Banach, alors elle converge dans F et alors $v\in F$.
2. On voit immédiatement qu'une suite (u_i,v_i) est convergente ou de Cauchy si et seulement si les suites u_i et v_i sont toutes les deux convergentes ou de Cauchy. L'assertion en résulte.

■

Remarques 1. Plus généralement, on dit qu'un sous-ensemble X d'un espace vectoriel normé E est *complet* si toute suite de Cauchy dans X converge vers un élément de X.
2. Si $Y\subset X\subset E$ et Y est complet alors Y est fermée dans X.
3. Réciproquement, si X est complet et Y est fermée dans X, alors Y est complet.

Définition 2.4.8 Soit $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace vectoriel normé E. Si la suite des *sommes partielles* $S_k:=\sum_{i\leq k}v_i$ est convergente, alors la *série* $\sum v_i$ est *convergente* et on pose
$$\sum_{i=0}^{\infty}v_i:=\lim_k S_k.$$
La série $\sum v_i$ est *normalement convergente* si la série $\sum\|v_i\|$ est convergente (dans $\mathbb{R}$).

Exemples 1. La série de terme général $\dfrac{x^k}{k!}$ converge dans $\mathbb{R}$ (idem dans $\mathbb{C}$) : on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Elle est normalement convergente.

2. La série de terme général $\frac{(-1)^k}{k+1}$ converge dans $\mathbb{R}$: on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2).$$

Mais elle n'est *pas* normalement convergente.

Proposition 2.4.9 Si une série $\sum v_i$ est normalement convergente dans un espace *de Banach* E, alors elle est convergente.

Démonstration. La démonstration est identique au cas classique. On a toujours $\left\|\sum_{k_1}^{k_2} v_i\right\| \leq \sum_{k_1}^{k_2} \|v_i\|$. Il suit que si la suite des sommes partielles $\sum_{i \leq k} \|v_i\|$ est de Cauchy, il en va de même de la suite des sommes partielles $\sum_{i \leq k} v_i$. ■

Remarques 1. Une suite réelle *croissante* est convergente si et seulement si elle est bornée. Comme conséquence, une série réelle à termes positifs est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont bornées. On en déduit qu'une série de terme général v_i est normalement convergente si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$$\exists c \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{k} \|v_i\| \leq c.$$

2. Comme cas particulier, on voit qu'une série de terme général v_i est normalement convergente lorsque la condition suivante est satisfaite

$$\exists a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall i \in \mathbb{N}, \quad \|v_i\| \leq a\frac{b^i}{i!}.$$

En effet, on peut alors prendre $c = ae^b$.

3. On en déduit un critère de convergence pour une *suite* $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans un espace de Banach (que nous utiliserons plus tard dans la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire) :

$$\exists a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall i \in \mathbb{N}, \quad \|u_{i+1} - u_i\| \leq a\frac{b^i}{i!}.$$

En effet, il suffit de poser $v_0 = u_0$ et $v_i := u_i - u_{i-1}$ pour $i > 0$.

2.5 Normes équivalentes

Lemme 2.5.1 Soit E un espace vectoriel normé. Une forme [a] linéaire $l : E \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si son noyau $\ker l$ est fermé dans E.

a. C'est à dire une application à valeur dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. La condition est nécessaire car $\ker l = p^{-1}(\{0\})$ et que $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ (l'image inverse d'un fermé par une application continue est fermée). Réciproquement, supposons que l n'est pas continue. Cela signifie que l n'est pas bornée (sur la sphère unité) et il existe donc une suite v_i avec $\|v_i\| = 1$ telle que $|l(v_i)| \to \infty$. En particulier, il existe N tel que $l(v_i) \neq 0$ lorsque $i \geq N$ et on peut poser

$$w_i := v_N - \frac{l(v_N)}{l(v_i)} v_i$$

pour $i \geq N$. Puisque l est linéaire, on a

$$l(w_i) = l(v_N) - \frac{l(v_N)}{l(v_i)} l(v_i) = 0$$

si bien que $w_i \in \ker l$. Mais

$$\left\| \frac{l(v_N)}{l(v_i)} v_i \right\| = \frac{|l(v_N)|}{|l(v_i)|} \|v_i\| = \frac{|l(v_N)|}{|l(v_i)|} \to 0$$

si bien que w_i converge vers v_N. Or $v_n \notin \ker l$ puisque $l(v_N) \neq 0$. ■

Définition 2.5.2 Une application linéaire $p : E \to F$ est un *isomorphisme* d'espaces vectoriels normés si elle est continue bijective et que l'application réciproque aussi est continue. On dit que E et F sont des espace vectoriels normés *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre eux. Deux normes $\|\ \|$ et $\|\ \|'$ sur un même espace vectoriel E sont *équivalentes* si l'identité

$$(E, \|\ \|) \to (E, \|\ \|'), \quad v \mapsto v$$

est un isomorphisme.

Remarques

1. On voit aisément qu'une application linéaire bijective $p : E \to F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R}_{>0}, \forall v \in E, \quad \frac{1}{k}\|v\| \leq \|p(v)\| \leq k\|v\|.$$

2. On en déduit que deux normes $\|\ \|$ et $\|\ \|'$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R}_{>0}, \forall v \in E, \quad \frac{1}{k}\|v\| \leq \|v\|' \leq k\|v\|.$$

3. Une application linéaire bijective $p : E \to F$ est un isomorphisme si elle satisfait la propriété suivante : une suite v_i converge vers v dans E si et seulement si la suite $p(v_i)$ converge vers $p(v)$ dans F. On voit aussi aisément qu'une suite v_i est de Cauchy si et seulement si la suite $p(v_i)$ est de Cauchy.
4. On en déduit que deux normes $\| \ \|$ et $\| \ \|'$ sont équivalentes si et seulement si les suites convergentes pour $\| \ \|$ et pour $\| \ \|'$ sont les mêmes. On a aussi identité pour les suites de Cauchy.
5. Une application linéaire bijective $p : E \to F$ est un isomorphisme si et seulement si pour tout $X \subset E$, on a X ouvert (resp. fermé) dans E si et seulement si $p(X)$ ouvert (resp. fermé) dans F.
6. Deux normes $\| \ \|$ et $\| \ \|'$ sur E sont équivalentes si et seulement si pour tout $X \subset E$, on a X ouvert (resp. fermé) pour $\| \ \|$ si et seulement si X ouvert (resp. fermé) pour $\| \ \|'$.

Exemples 1. Les $\| \ \|_p$ pour $1 \leq p \leq +\infty$ sont toutes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$ (ou sur $\mathbb{C}^n$) : par exemple, on a $\frac{1}{n}\|f\|_\infty \leq \|f\|_1 \leq n\|f\|_\infty$.

2. Les $\| \ \|_p$ ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$: par exemple, la suite

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx \text{ si } x \leq 1/n \\ 0 \text{ si } x > 1/n, \end{cases}$$

converge vers 0 sur $[0, 1]$ pour $\| \ \|_1$ mais converge vers 1 lorsque $x = 0$ (et donc ne converge *pas* pour $\| \ \|_\infty$).

Lemme 2.5.3 Soit E un espace vectoriel normé et $n \in \mathbb{N}$ (on munit $\mathbb{R}^n$ de $\| \ \|_\infty$).
1. Toute application linéaire $a : \mathbb{R}^n \to E$ est continue
2. Toute application linéaire bijective $p : \mathbb{R}^n \to E$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés.
3. Si $\dim E = n$, alors E est est un espace de Banach.

Démonstration. On montre d'abord la première assertion et on procède ensuite par récurrence sur la dimension n de E, le cas $n = 0$ étant trivial, pour les deux autres.

1. Si on désigne par $v_1, \ldots, v_n \in E$ les images des vecteurs de la base canonique, on a

$$a(x_1, \ldots, x_n) = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n,$$

et donc

$$\|a(x_1, \ldots, x_n)\| \leq |x_1|\|v_1\| + \cdots + |x_n|\|v_n\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|\right) \max_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Cela montre que a est continue.

2. Pour montrer que p^{-1} est continue, il suffit de s'assurer que ses composantes $l_i : E \to \mathbb{R}$ le sont. Or $H_i := \ker l_i$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$. Par récurrence, c'est un espace de Banach et donc fermé dans E. Et on conclut avec le lemme 2.5.1.

3. Si E est de dimension finie n, alors il existe une application linéaire bijective $p : \mathbb{R}^n \simeq E$ qui est nécessairement un isomorphisme. Puisque $\mathbb{R}^n$ est un espace de Banach, il en va de même de E. ■

Théoreme 2.5.4
1. Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.
2. Toute application linéaire entre espaces vectoriels normés de dimension finie est continue.

Démonstration. La première assertion a été démontrée dans le lemme. Pour la seconde, on considère une application linéaire $a : E \to F$ entre espaces vectoriels normés de dimension finie. Grâce au lemme, on peut choisir un isomorphisme d'espaces vectoriels normés $p : \mathbb{R}^n \simeq E$. L'application $a \circ p : \mathbb{R}^n \to F$ est linéaire et donc, comme on l'a déjà vu, continue. Il suffit de composer avec p^{-1} à droite pour voir que a aussi est continue. ■

Corollaire 2.5.5 Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. ■

Corollaire 2.5.6 Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé. ■

2.6 Exercices

On utilisera systématiquement le fait qu'une application linéaire entre espaces vectoriels normés *de dimension finie* est automatiquement continue.

Exercice 2.1 Montrer que

$$\forall v \in \mathbb{R}^2, \quad \|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{2}\|v\|_\infty.$$

Vérifiez numériquement ces inégalités lorsque $v = (-3, 4)$.

Solution Si $v =: (x, y)$, on a

$$\|v\|_1 = |x| + |y|, \quad \|v\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \|v\|_\infty = \max(|x|, |y|).$$

En élevant au carré, on doit donc montrer que

$$\max(|x|^2, |y|^2) \leq x^2 + y^2 \leq x^2 + 2|xy| + y^2$$

et

$$\frac{1}{2}(x^2 + 2|xy| + y^2) \leq x^2 + y^2 \leq 2\max(|x|^2, |y|^2).$$

Toutes ces inégalités sont évidentes sauf peut-être l'avant-dernière. Mais celle-ci se réécrit

$$0 \leq \frac{1}{2}(x^2 - 2|xy| + y^2) = \frac{1}{2}(|x| - |y|)^2.$$

Lorsque $v = (-3, 4)$, on a $\|v\|_\infty = 4$, $\|v\|_2 = 5$ et $\|v\|_1 = 7$. On a bien $4 \leq 5 \leq 7$ et $7\sqrt{2}/2 \sim 4,9 \leq 5 \leq 5,7 \sim 4\sqrt{2}$.

Exercice 2.2 Soit E un espace vectoriel normé et $v, w \in E$. Montrer que

$$\|v\| \leq \|w\| + \|w - v\|.$$

En déduire que si $v, w \neq 0$ et $c \in [0, 1[$, alors

$$\frac{\|w - v\|}{\|v\|} \leq c \Rightarrow \frac{\|w - v\|}{\|w\|} \leq \frac{c}{1 - c}.$$

Solution On a

$$\|v\| = \|w + v - w\| \leq \|w\| + \|v - w\| = \|w\| + \|w - v\|.$$

On voit donc que si $\|w - v\| \leq c\|v\|$, alors $\|w - v\| \leq c\|w\| + c\|w - v\|$ et donc $(1 - c)\|w - v\| \leq c\|w\|$, puis la formule annoncée.

Exercice 2.3 Soit E un espace vectoriel normé et $v, w \in E$. Montrer que

$$\|v\| \leq \frac{\|v+w\| + \|v-w\|}{2}.$$

En déduire que

$$\|v\| + \|w\| \leq \|v+w\| + \|v-w\|,$$

puis que

$$\|v\| + \|w\| \leq 2\max\{\|v+w\|, \|v-w\|\}.$$

La constante 2 est elle optimale ?

Solution On a

$$2\|v\| = \|2v\| = \|(v+w) + (v-w)\| \leq \|v+w\| + \|v-w\|$$

et par symétrie $2\|w\| \leq \|v+w\|+\|v-w\|$ puisque $\|v-w\| = \|w-v\|$. En additionnant, on trouve $2\|v\| + 2\|w\| \leq 2\|v+w\| + 2\|v-w\|$ et il n'y a qu'à diviser par deux. La majoration suivante est alors immédiate. Enfin, la constante est optimale : si on munit $E = \mathbb{R}^2$ de la norme infinie $\|(a,b)\| = \max\{|a|, |b|\}$ et qu'on pose $v = (1,0)$ et $w = (1,0)$ si bien que $v+w = (1,1)$ et $v-w = (1,-1)$, on a bien $1+1 = 2\max\{1,1\}$.

Exercice 2.4 Soit E un espace vectoriel et

$$E \times E \to \mathbb{R}, \quad (v,w) \mapsto \langle v, w\rangle$$

un *produit scalaire* ($\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w\rangle = \lambda_1\langle v_1, w\rangle + \lambda_2\langle v_2, w\rangle$, $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ et $\langle v, v\rangle > 0 \Leftrightarrow v \neq 0$)). Montrer que l'application

$$E \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

est une norme (on pourra d'abord montrer l'inégalité de de Cauchy-Schwarz ($|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$) en considérant le discriminant du polynôme $\|tv+w\|^2 \in \mathbb{R}[t]$).

Solution Montrons d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On peut supposer $u \neq 0$ sinon c'est clair. Dans ce cas, le polynôme

$$\|tu+v\|^2 = \langle tu+v, tu+v\rangle = t^2\langle u, u\rangle + 2t\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 t^2 + 2\langle u, v\rangle t + \|v\|^2$$

étant toujours positif, son discriminant est négatif et on a donc

$$4\langle u, v\rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0.$$

On en déduit que $\langle v, w\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$ et il suffit de prendre les racines carrées. En prenant $t = 1$ maintenant, on a

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|^2\|v\|^2 + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

et il suffit de nouveau de prendre les racines carrées pour obtenir l'inégalité triangulaire. On vérifie aisément les deux autres propriétés.

Exercice 2.5 Soit E un espace vectoriel normé non nul, $v_0, v_0' \in E$ et $R, R' > 0$. Montrer que

1. si $\mathbb{B}^+(v_0, R) \subset \mathbb{B}^+(v_0, R')$, alors $R \leq R'$ (considérer $v = v_0 + Ru$ avec $\|u\| = 1$).
2. si $\mathbb{B}^+(v_0, R) \subset \mathbb{B}^+(v_0', R)$, alors $v_0 = v_0'$ (considérer $v = v_0 + Ru$ avec $u = (v_0 - v_0')/d$ si $d := \|v_0 - v_0'\| \neq 0$).
3. si $\mathbb{B}^+(v_0, R) = \mathbb{B}^+(v_0', R')$, alors $v_0 = v_0'$ et $R = R'$ (par symétrie, on pourra supposer que $R' \leq R$).

Solution Pour la première question, avec les indication données, on a

$$\|v - v_0\| = \|(v_0 + Ru) - v_0\| = R\|u\| = R$$

si bien que $v \in \mathbb{B}^+(v_0, R) \subset \mathbb{B}^+(v_0, R')$ et donc $R = \|v - v_0\| \leq R'$.

Pour la seconde question, avec les indication données, on a toujours

$$\|v - v_0\| = \|(v_0 + Ru) - v_0\| = R\|u\| = R$$

si bien que $v \in \mathbb{B}^+(v_0, R) \subset \mathbb{B}^+(v_0', R)$ et donc $\|v - v_0'\| \leq R$. Mais

$$v - v_0' = v_0 + Ru - v_0' = Ru + (v_0 - v_0') = Ru + du = (R + d)u.$$

Il suit que $\|v - v_0'\| = R + d$ et $R + d \leq R$ si bien que $d = 0$.

Enfin, pour la dernière question et avec l'indication, on aura $\mathbb{B}^+(v_0, R) = \mathbb{B}^+(v_0', R') \subset \mathbb{B}^+(v_0', R)$ si bien que $v_0' = v_0$ par la question 2) et on conclut grâce à la question 1).

Exercice 2.6 Soit E un espace vectoriel normé et $X \subset E$ une partie non vide. Montrer que l'application

$$d_X : E \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \inf_{w \in X} \|v - w\|$$

est continue (on pourra montrer qu'elle est lipschitzienne).

Solution Soient $v_1, v_2 \in E$. Si $w \in X$, alors

$$\|v_1 - w\| \leq \|v_1 - v_2\| + \|v_2 - w\|.$$

En prenant la borne inférieure sur w, on en déduit que

$$d_X(v_1) \leq \|v_1 - v_2\| + d_X(v_2)$$

et donc (par symétrie entre v_1 et v_2),

$$|d_X(v_1) - d_X(v_2)| \leq \|v_1 - v_2\|.$$

Cela montre que d_X est 1-lipschitzienne et donc continue.

Exercice 2.7 Montrer que

$$\|F\| := \sum_{k=0}^{n} |F^{(k)}(k)|$$

définit une norme sur $\mathbb{R}[t]_{\leq n}$. En déduire que

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall F \in \mathbb{R}[t]_{\leq n}, \qquad \left|\int_0^1 F(t)e^t \mathrm{d}t\right| \leq M \sum_{k=0}^{n} |F^{(k)}(k)|.$$

Solution On remarque que $\|F\| = |F(0)| + \|G\|$ avec $G(t) = F'(t+1)$. Supposons que $\|F\| = 0$. On a alors obligatoirement $|F(0)| = 0$ et $\|G\| = 0$. Par récurrence sur le degré de F, on a $G = 0$ et donc aussi $F' = 0$ si bien que F est constant. Mais comme $F(0) = 0$, on a nécessairement $F = 0$ (cet argument initialise aussi la récurrence). Alternativement, si $F \neq 0$ et que $d = \deg F$, alors $\deg F^{(d)} = 0$. Or si $\|F\| = 0$, on a $F^{(d)}(d) = 0$. Contradiction (un polynôme de degré nul ne s'annule pas). Les deux autres propriétés d'une norme se vérifient facilement.

Maintenant, comme l'application

$$\mathbb{R}[t]_{\leq n} \to \mathbb{R}, \quad F \mapsto \int_0^1 F(t)e^t \mathrm{d}t$$

est manifestement linéaire et que $\mathbb{R}[t]_{\leq n}$ est de dimension finie, cette application est continue et il existe donc M tel que si $F \in \mathbb{R}[t]_{\leq n}$, on ait

$$\left|\int_0^1 F(t)e^t \mathrm{d}t\right| \leq M \sum_{k=0}^{n} |F^{(k)}(k)|.$$

Exercice 2.8 Montrer que la multiplication $\mathbb{R}[t]_{\leq n} \times \mathbb{R}[t]_{\leq m} \to \mathbb{R}[t]_{\leq m+n}$ est continue pour les normes $\| \ \|_\infty$ (on pourra se rappeler qu'elle est bilinéaire).

Solution Par définition, si $F = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, alors $\|F\|_\infty = \max_{k=0}^{n} |a_k|$. De plus, si $G = \sum_{k=0}^{m} b_k t^k$, alors $FG = \sum_{k=0}^{m+n} c_k t^k$ avec $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$. En particulier, on a pour tout $k = 0, \ldots, n+m$,

$$|c_k| \leq \sum_{i+j=k} |a_i||b_j| \leq \sum_{i+j=k} \|F\|_\infty \|G\|_\infty = (m+n+1)\|F\|_\infty \|G\|_\infty$$

et donc $\|FG\|_\infty \leq (m+n+1)\|F\|_\infty \|G\|_\infty$.

Exercice 2.9 Montrer que la suite

$$F_n = \sum_{0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}[t], \| \ \|_\infty)$ qui ne converge pas.

Solution Pour $m \geq n \geq N$, on a

$$\|F_m - F_n\| = \left\| \sum_{n+1}^{m} \frac{t^k}{k!} \right\| = \max_{n+1}^{m} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{N!} \to 0 \quad \text{quand} \quad N \to +\infty.$$

Mais si la suite convergeait vers un polynôme $F = \sum_{k=0}^{d} a_k t^k$, aurait pour $n > d$,

$$F_n - F = \sum_{k=0}^{d} \left(\frac{1}{k!} - a_k \right) t^k + \sum_{k=d+1}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

et donc

$$\|F_n - F\| = \max \left(\max_{k=0}^{d} \left| \frac{1}{k!} - a_k \right|, \max_{k=d+1}^{n} \frac{1}{k!} \right) \geq \frac{1}{(d+1)!} \not\to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Exercice 2.10 Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers une fonction f.

1. Montrer qu' $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, |(f_n - f_N)(x)| \leq 1$.
2. En déduire que $f_n - f_N = c_n \in \mathbb{R}$ et que $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. En déduire que f est nécessairement aussi une fonction polynomiale.
4. Montrer que le résultat n'est plus valide si la suite n'est pas uniformément convergente.

Solution Si $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$. En prenant $\epsilon = \frac{1}{2}$ et en appliquant ça simultanément à n et N, on a

$$\begin{aligned} |(f_n - f_N)(x)| &= |(f_n(x) - f(x)) - (f_N(x) - f(x))| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| \ + |f_N(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

En particulier, $f_n - f_N$ est une fonction polynomiale bornée et donc constante : on a $f_n - f_N = c_n$ avec $c_n \in \mathbb{R}$. Puisque f_N est fixé et que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est (uniformément) convergente, il est clair que la suite $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que si on désigne par c sa limite, on aura $f - f_N = c$. On en déduit que $f = f_N + c$ est une fonction polynomiale. Enfin, la suite définie par $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{k!}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge (simplement) vers la fonction f donnée par $f(x) = e^x$ qui elle n'est pas polynomiale.

Exercice 2.11 Montrer que

$$\|f\| := |f(0)| + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f\|' := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

définissent des normes sur $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Sont-elles équivalentes entre elles ? Sont elles équivalentes à $\| \ \|_\infty$?

Solution On vérifie aisément que ce sont bien des normes. De plus, si $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $x \in [0,1]$, il existe $\xi \in [0,x]$ tel que $f(x) - f(0) = (x-0)f'(\xi)$, c'est à dire $f(x) = f(0) + xf'(\xi)$. En particulier,

$$|f(x)| \leq |f(0)| + |f'(\xi)| \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty = \|f\|.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in [0,1]$, on a $\|f\|_\infty \leq \|f\|$. Puisqu'on a aussi $\|f'\|_\infty \leq \|f\|$, on en déduit que $\|f\|' \leq 2\|f\|$. Puisqu'on a aussi $\|f\| \leq \|f\|'$, cela montre que les normes sont équivalentes. Pour montrer qu'elles ne sont pas équivalentes à $\| \ \|_\infty$, il suffit de trouver une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ qui converge pour $\| \ \|_\infty$ mais pas pour $\| \ \|$. Il suffit de poser $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$. La suite $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ fournit aussi une contradiction car $f_n \to 0$ pour $\|\|_\infty$ mais par pour $\| \ \|$.

3. Fonction exponentielle

3.1 Rappels d'algèbre linéaire

3.1.1 Notation matricielle

On rappelle quelques résultats d'algèbre linéaire (tout ce qui est dit pour $\mathbb{R}$ reste valable avec $\mathbb{C}$).

Si $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on désignera généralement par

$$V = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

(avec une lettre majuscule) le vecteur colonne associé. On dispose ainsi d'un isomorphisme

$$\mathbb{R}^n \simeq \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}), \quad v \leftrightarrow V,$$

et en pratique, on identifie les deux espaces (et on écrira $\|V\|$ au lieu de $\|v\|$).

Si $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire donnée par

$$a(x_1, \ldots, x_m) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m, \ldots, a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m)$$

on désignera généralement par

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

(avec une lettre majuscule) la matrice associée. Ici encore, on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R}), \quad a \leftrightarrow A.$$

En pratique, on identifiera aussi ces les deux espaces (et on écrira $\|A\|$ au lieu de $\|a\|$).

Si V est le vecteur colonne associé à $v \in \mathbb{R}^m$, alors le vecteur colonne associé à $a(v)$ est AV et on aura donc $\|AV\| \leq \|A\|\|V\|$ pour la norme subordonnée :

$$\|A\| = \sup_{\|V\|=1} \|AV\|.$$

De même, si $b = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une autre application linéaire de matrice B, alors la matrice de $b \circ a$ est BA et on aura $\|BA\| \leq \|B\|\|A\|$ pour les normes subordonnées : On notera que la multiplication des matrices

$$\mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_{m\times p}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$$

est bilinéaire continue.

Exemple La *norme subordonnée* à $\| \ \|_\infty$ sur $\mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ est

$$\left\| \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \right\| = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{i,j}|$$

(attention, en général la norme de la matrice dépend des normes choisies sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$).

3.1.2 Diagonalisation

Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, V est un vecteur colonne non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfont $AV = \lambda V$, alors V est un *vecteur propre* pour A associé à la *valeur propre* λ. L'ensemble des vecteurs propres associés à λ (auquel on rajoute le vecteur nul) est le *sous-espace propre* associé à λ. Les valeurs propres de A sont les racines du *polynôme caractéristique*[1] $\chi_A(\lambda) := \det(\lambda I_n - A)$. La matrice A est *diagonalisable* s'il existe P inversible et D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$. De manière équivalente, cela signifie qu'il existe une base $\{V_1, \ldots, V_n\}$ formée de vecteurs (colonnes) propres pour A. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres associées, on a alors

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = [V_1 \cdots V_n].$$

S'il existe n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable (mais pas réciproquement). S'il existe une unique valeur propre et que A n'est pas diagonale, alors A n'est pas diagonalisable.

On rappelle aussi que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, alors

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{tr}(A) \quad \text{et} \quad \lambda_1 \cdots \lambda_n = \det(A).$$

1. Certains auteurs définissent le polynôme caractéristique à l'envers : $\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$. Ça ne change rien à un signe éventuel près.

Pour calculer P^{-1}, on peut utiliser la méthode du pivot mais en dimension deux, on a aussi une formule

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Exemples 1. La matrice

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a pour unique valeur propre $\lambda = 2$. Elle n'est pas diagonalisable car une matrice diagonalisable avec une unique valeur propre serait automatiquement diagonale.

2. On a

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. On a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{bmatrix}.$$

4. On a

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. La matrice

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a une unique valeur propre $\lambda = 2$ (triple) et la matrice n'est donc pas diagonalisable (car elle n'est pas diagonale).

6. La matrice

$$A := \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

a une valeur propre simple 6 et une valeur propre double -6. La matrice n'est pas diagonalisable car il faudrait une base formée de trois vecteurs propres et le sous-espace propre associé à -6 est seulement de dimension un.

7. On a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 1 & -i & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1+i}{4} & -\frac{1-i}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1-i}{4} & -\frac{1+i}{4} \end{bmatrix}.$$

8. La matrice

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a une valeur propre simple -1 et une valeur propre triple 1. Le sous-espace propre associé à la valeurs propre 1 est seulement de dimension deux et la matrice n'est donc pas diagonalisable.

3.1.3 Décomposition de Jordan

On rappelle maintenant que l'on dispose du *théorème de Jordan* : si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, il existe P inversible et

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_r \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

telles que $A = PJP^{-1}$. Pour calculer P, il faut chercher des vecteurs propres V et suffisamment de « vecteurs caractéristiques » W tels que $AW = \lambda W + V$ afin d'obtenir une base. Bien sûr, si A est diagonalisable, alors $J = D$.

Exemples

1. On a

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Avec

$$A := \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix},$$

on trouve la forme de Jordan et une matrice de passage

$$J = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{13}{12} \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

et il faudrait calculer P^{-1} pour obtenir la décomposition de Jordan.

3. De même, pour la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

on peut écrire $A = PJP^{-1}$ avec

$$J := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.1.4 Décomposition de Dunford

On rappelle qu'on dispose aussi du théorème de Dunford : si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $\Delta, N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ uniques telles que $\Delta N = N\Delta$ avec Δ diagonalisable et N nilpotente telles que $A = \Delta + N$. Bien sûr, is A est diagonalisable, alors $\Delta = A$ et $N = 0$. Si λ est la seule valeur propre, alors $\Delta = \lambda I_n$ (et $N = A - \Delta$). En général, on peut déduire la décomposition de Dunford de celle de Jordan comme suit : on écrit $J = D + T$ avec D diagonale et T triangulaire supérieure stricte (c'est à dire avec des zéros sur la diagonale) puis on pose $\Delta = PDP^{-1}$ et $N = PTP^{-1}$. On remarquera que si A possède une *unique* valeur propre de multiplicité n, alors $\Delta = D$.

Exemples 1. On a la décomposition de Dunford

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. On a la décomposition de Dunford

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. On a la décomposition de Dunford :

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ \frac{25}{2} & 6 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.2 Algèbre normée

Rappel : une *algèbre (associative unitaire)* est un espace vectoriel M muni d'une multiplication interne telle que

1. $\forall a, b, c \in M, (ab)c = a(bc)$,
2. $\exists 1_M \in M, \forall a \in M, 1_M a = a 1_M = a$,
3. $\forall a, b, c \in M, a(b + c) = ab + bc$ et $(a + b)c = ac + bc$,
4. $\forall a, b \in M, \forall \lambda \in \mathbb{R}, a(\lambda b) = \lambda(ab) = (\lambda a)b$.

On connait bien sûr $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui sont des algèbres réelles. Plus généralement, on dispose des algèbres $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre n (on rappelle que $\mathrm{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{M}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$). On peut aussi considérer l'algèbre $\mathrm{L}(E)$ des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans lui même avec la *composition* $\circ$ (qui joue le rôle d'une multiplication). Enfin, si M est une algèbre et X un ensemble quelconque, alors $\mathcal{F}(X, M)$ est naturellement une algèbre. Nous rencontrerons aussi le vocabulaire suivant dans une algèbre M :

1. La *puissance n-ième* de $a \in M$ est défine par $a^0 = 1$ et $a^{n+1} = a^n a$.
2. Deux éléments $a, b \in M$ *commutent* si $ab = ba$. Dans ce cas, on dispose de la formule du binôme : $(a+b)^i = \sum_{k+l=i} \binom{i}{k} a^k b^l$.
3. L'*inverse* de $p \in M$ s'il existe est l'élément $p^{-1} \in M$ tel que $pp^{-1} = p^{-1}p = 1_M$.
4. Un élément $n \in M$ est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n^{k+1} = 0_M$ (et n ne peut alors pas être inversible - sauf si $M = \{0_M\}$).

Exemples
1. Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tous les éléments commutent, tous les éléments non-nuls sont inversibles et seul 0 est nilpotent.
2. Dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, les matrices
$$\begin{bmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\pi & 0 \end{bmatrix}$$
ne commutent pas :
$$\begin{bmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\pi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\pi & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\pi^2 \end{bmatrix},$$
ne sont pas inversibles et sont même nilpotentes :
$$\begin{bmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\pi & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Définition 3.2.1 Une *algèbre normée* est une algèbre M munie d'une norme (d'espace vectoriel) qui satisfait en plus
1. $\forall a, b \in M, \quad \|ab\| \leq \|a\|\|b\|$,
2. $\|1_M\| \leq 1$.

On dit *algèbre de Banach* si M est un espace de Banach.

Exemples
1. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des algèbres de Banach.
2. Si E est un espace vectoriel normé (resp. de dimension finie), alors l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ des applications linéaires continues de E dans E muni de la *composition* et de la norme subordonnée
$$\|a\| = \sup_{a \neq 0} \frac{\|a(v)\|}{\|v\|}$$
est une algèbre normée (resp. de Banach). Cela résulte de la proposition 2.3.5.
3. $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sont des algèbres de Banach pour n'importe quelle norme subordonnée.
4. Si M est une algèbre normée (resp. de Banach) et X un ensemble quelconque, alors $\mathcal{F}^b(X, M)$ est naturellement une algèbre normée (resp. de Banach) pour la norme infinie.
5. $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ est une algèbre normée et même une algèbre de Banach pour $\| \ \|_\infty$ (mais pas pour $\| \ \|_1$ ou pour $\| \ \|_2$).

Remarques
1. Si M est une algèbre normée non nulle, alors $\|1_M\| = 1$.
2. Si M est une algèbre normée et $a \in M$, alors $\|a^n\| \leq \|a\|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Si M est une algèbre normée, alors la multiplication $M \times M \to M$ est une application bilinéaire continue.
4. De manière équivalente, si une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers a et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers b dans M, alors $(a_ib_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers ab.
5. On en déduit que si $\sum a_i$ converge dans M et $b \in M$, alors les sommes suivantes existent aussi et on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i b = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) b \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{\infty} b a_i = b\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right).$$

Lemme 3.2.2 Si M est une algèbre normée et $a \in M$, alors la série $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} a^i$ est *normalement* convergente.

Démonstration. La démonstration est identique au cas classique ($M = \mathbb{R}$). Plus précisément, on a une suite croissante majorée

$$\sum_{i=0}^{N} \left\| \frac{1}{i!} a^i \right\| \leq \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i!} \|a\|^i \leq e^{\|a\|}$$

et elle est donc convergente. ■

Remarques 1. Lorsque M est une *algèbre de Banach*, alors la série converge.
2. Cela s'appliquera en particulier lorsque M est de dimension finie et donc lorsque $M = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ou $M = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 3.2.3 Si M est une algèbre de Banach et $a \in M$, alors l'*exponentielle* de a (qui existe toujours) est

$$\exp(a) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} a^i.$$

On écrit aussi e^a.

Exemples 1. $\exp\left(\begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{\pi} & 0 \\ 0 & e^{-\pi} \end{bmatrix}$.

2. $\exp\left(\begin{bmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3. $\exp\left(\begin{bmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $\exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\pi & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\pi & 1 \end{bmatrix}$.

Lemme 3.2.4 Dans une algèbre de Banach M, si les deux premières sommes convergent *normalement*, alors la dernière aussi et on a l'égalité :

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right).$$

Démonstration. La démonstration est identique au cas classique. Tout d'abord, on a

$$\sum_{k=0}^{N}\left\|\sum_{i+j=k} a_i b_j\right\| \leq \sum_{k=0}^{N}\sum_{i+j=k}\|a_i\|\|b_j\| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty}\|a_i\|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\|b_j\|\right)$$

et une suite croissante bornée est convergente. Cela montre que la série de droite dans le lemme est normalement convergente. Comme M est un espace de Banach, la série est convergente et l'égalité s'obtient en passant à la limite (limite du produit égale produit des limites par continuité de la multiplication). ■

Remarque La convergence *absolue* est nécessaire. Il suffit de considérer $a_i = b_i = \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}}$ dans $\mathbb{R}$. On aura alors

$$\left|\sum_{i+j=k} a_i b_j\right| = \sum_{i+j=k}\frac{1}{\sqrt{(i+1)(j+1)}} \geq (k+1)\frac{1}{k+1} = 1 \not\to 0.$$

La série de droite n'est donc pas convergente.

Proposition 3.2.5 Soit M une algèbre de Banach. Alors,

$$\forall a, b \in M, \quad ab = ba \Rightarrow \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

Démonstration. Comme sur $\mathbb{R}$ encore. On peut utiliser la formule du binôme car a et b *commutent* et on a donc

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(a+b)^i &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\sum_{k+l=i}\binom{i}{k}a^k b^l\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k+l=i}\frac{1}{k!}a^k\frac{1}{l!}b^l\\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}a^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}b^l\right)\end{aligned}$$

grâce au lemme 3.2.4. ■

Remarque L'hypothèse est nécessaire comme le montre par exemple le cas de

$$A := \begin{bmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\pi & 0 \end{bmatrix}.$$

On a

$$\exp(A+B) = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mais

$$\exp(A)\exp(B) = \begin{bmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\pi & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\pi^2 & \pi \\ -\pi & 1 \end{bmatrix}.$$

Corollaire 3.2.6 Soit M une algèbre de Banach. Alors,

1. $\exp(0_M) = 1_M$,
2. Si $a \in M$, alors $\exp(a)$ est inversible et $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$,
3. Si $a \in M$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors $\exp(na) = \exp(a)^n$.

Démonstration. La première assertion est formelle. On obtient alors la seconde en faisant $b = -a$ dans la proposition. On montre la troisième assertion par récurrence pour $n \geq 0$ et on appliquer la seconde lorsque $n < 0$. ■

Proposition 3.2.7 Soit M une algèbre de Banach. Si $a, p \in M$ et p est inversible, alors $\exp(p^{-1}ap) = p^{-1}\exp(a)p$.

Démonstration. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{i!}(p^{-1}ap)^i = p^{-1}\frac{1}{i!}a^i p$$

(faire une récurrence sur i). On en déduit que

$$p^{-1}\exp(a)p = p^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}a^i\right)p$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} p^{-1}\frac{1}{i!}a^i p = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(p^{-1}ap)^i = \exp(p^{-1}ap).$$ ■

Remarque Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{tr}(A)}$. On se ramène au cas ou $A = J$ est une forme de Jordan, puis au cas ou $A = D$ est diagonale (et c'est alors immédiat) ou alors $A = T$ est triangulaire supérieure (et c'est trivial). On utilise au passage les formules générales $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$ et $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. C'est un excellent exercice.

Proposition 3.2.8 Supposons que $n = m + r$, que $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ et que $B \in \mathrm{M}_r(\mathbb{R})$. On a alors

$$\exp\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \exp(A) & 0 \\ 0 & \exp(B) \end{bmatrix}.$$

Démonstration. Cela résulte du fait que

$$\frac{1}{i!}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \frac{1}{i!}A^i & 0 \\ 0 & \frac{1}{i!}B^i \end{bmatrix}.$$

■

Remarques 1. Par récurrence, on en déduit la formule pour une matrice diagonale :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \exp(A) = \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{a_n} \end{bmatrix}.$$

2. Plus généralement, on peut montrer que

$$\exp\left(\begin{bmatrix} A & \star \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \exp(A) & \star \\ 0 & \exp(B) \end{bmatrix}$$

(attention, ce ne sont pas les mêmes étoiles) et en déduire par récurrence ce qui se passe pour une matrice triangulaire :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \exp(A) = \begin{bmatrix} e^{a_1} & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & e^{a_n} \end{bmatrix}.$$

Remarques Les théorèmes de structure en algèbre linéaire nous donnent des méthodes pour calculer les exponentielles de matrices.

1. Si A est diagonalisable, on cherche D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. On connaît $\exp(D)$ et on peut calculer $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$ une fois qu'on a trouvé P^{-1}.
2. Si A est nilpotente, on calcule à la main

$$\exp(A) = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k$$

On remarquera qu'on aura toujours $k \leq n$ (théorème de Cayley-Hamilton).

3. En général, on cherche la décomposition de Dunford $A = \Delta + N$ et on aura

$$\exp(A) = \exp(\Delta)\exp(N).$$

Remarquons que si Δ n'est pas elle même diagonale, il faudra trouver une matrice de passage et calculer son inverse.

Exemples 1. On a

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix}, \quad \exp\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad \exp\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2e^2 & e^2 \\ -e^2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. On a

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e & -e+e^5 & e+e^5 \\ e-e^{-2} & -e+e^{-2}+e^5 & e+e^5 \\ e-e^{-2} & -e+e^{-2} & e \end{bmatrix}.$$

3. On a

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\exp\left(\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ \frac{25}{2} & 6 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{-6} & 0 & 0 \\ \frac{25}{24}(e^6-e^{-6}) & e^6 & \frac{13}{24}(e^6-e^{-6}) \\ 0 & 0 & e^{-6} \end{bmatrix}$$

et

$$\exp\left(\begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2e^{-6} & 0 & e^{-6} \\ \frac{1}{24}(25e^6-37e^{-6}) & e^{-6} & \frac{1}{24}(13e^6-25e^{-6}) \\ -e^{-6} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.3 Fonction vectorielle

On rappelle qu'une *fonction vectorielle* est une application $f : I \to E$ où E est un espace vectoriel et I un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou plus généralement une partie de $\mathbb{R}$). Une fonction réelle $f : I \to \mathbb{R}$ ou une fonction complexe $f : I \to \mathbb{C}$ sont des fonctions vectorielles. Plus généralement, on peut considérer des fonctions $f : I \to \mathbb{R}^n$ ou même $f : I \to \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ (et idem sur $\mathbb{C}$).

En composant une fonction vectorielle $f : I \to \mathbb{R}^n$ avec les projections $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on trouve les composantes $f_i : I \to \mathbb{R}$ de f qui sont des fonctions réelles (et idem avec $\mathbb{C}^n$). On aura

$$\forall t \in I, \quad f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$$

et on écrira parfois $f = (f_1, \ldots, f_n)$. De même, une fonction matricielle $f : I \to \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ aura des composantes f_{ij} et on écrira parfois $f = [f_{ij}]$. Idem sur $\mathbb{C}$.

Définition 3.3.1 Soit E un espace vectoriel normé et $I \subset \mathbb{R}$. Une fonction vectorielle $f : I \to E$ a pour *limite* $v_0 \in E$ en $t_0 \in \mathbb{R}$ (adhérent à $I \setminus \{t_0\}$) si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta \geq 0, \forall t \in I, \quad |t - t_0| \leq \eta \Rightarrow \|f(t) - v_0\| \leq \epsilon.$$

On écrit alors

$$\lim_{t_0} f = v_0 \quad \text{ou} \quad \lim_{t\to t_0} f(t) = v_0$$

et on dit aussi que $f(t)$ *tend* vers v_0 quand t *tend* vers t_0 et on écrit $f(t) \to v_0$ quand $t \to t_0$.

Remarques

1. On ne considére que le cas ou t_0 est *adhérent* à $I \setminus \{t_0\}$, ce qui signifie que tout intervalle ouvert contenant t_0 contient au moins un autre point de I (ou encore que t_0 est dans l'adhérence $\overline{I \setminus \{t_0\}}$: le plus petit fermé contenant $I \setminus \{t_0\}$).
2. Dans le cas classique $E = \mathbb{R}$, on retrouve la notion habituelle.
3. La définition générale se ramène au cas classique car $f(t) \to v_0$ si et seulement si $\|f(t) - v_0\| \to 0$ dans $\mathbb{R}$.
4. Une fonction $I \to E \times F, t \to (f(t), g(t))$ a une limite en t_0 si et seulement si f et g ont une chacune une limite v_0 et w_0 en t_0 et la limite est alors (v_0, w_0).
5. La définition ci-essus, tout comme ce qui suit, se généralise sans problème au cas ou I est remplacé par une partie X d'un espace vectoriel normé et t_0 par un vecteur quelconque.

Exemples

1. Si $f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction complexe et $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a
$$\lim_{t \to t_0} f(t) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} \mathrm{Re} f(t) = \alpha \text{ et } \lim_{t \to t_0} \mathrm{Im} f(t) = \beta.$$
2. Si $f : I \to \mathbb{R}^n, t \mapsto (f_1(t), \ldots, f_1(t))$ est une fonction vectorielle et $v_0 = (k_1, \ldots, k_n)$, alors
$$\lim_{t \to t_0} f(t) = v_0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n, \lim_{t \to t_0} f_i(t) = k_i.$$
3. Idem avec $\mathrm{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Idem sur $\mathbb{C}$.

Proposition 3.3.2

1. Soient E un espace vectoriel normé et $f, g : I \to E$ deux fonctions vectorielles. Si $f(t) \to v$ et $g(t) \to w$ quand $t \to t_0$, alors $(f + g)(t) \to v + w$ quand $t \to t_0$.
2. Soient E un espace vectoriel normé, $f : I \to E$ une fonction vectorielle et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $f(t) \to v$ quand $t \to t_0$, alors $(\lambda f)(t) \to \lambda v$ quand $t \to t_0$.
3. Soient M une algèbre normée et $f, g : I \to M$ des fonctions vectorielles. Si $f(t) \to a$ et $g(t) \to b$ quand $t \to t_0$, alors $(fg)(t) \to ab$ quand $t \to t_0$.

Démonstration. Comme dans le cas classique. ■

Proposition 3.3.3 Si $f(t) \to v$ quand $t \to t_0$ et $g : E \to F$ est une application continue (sur l'image de I), alors $g(f(t)) \to g(v)$ quand $t \to t_0$.

Démonstration. Comme dans le cas classique. ■

Définition 3.3.4 Soient E un espace vectoriel normé et $I \subset \mathbb{R}$. Une application $f : I \to E$ est *dérivable* en $t_0 \in I$ si
$$f'(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$
existe dans E. On dit alors que $f'(t_0)$ est le *vecteur dérivé* de f en t_0.

Remarques 1. Alternativement, cela signifie que

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + (t - t_0)\epsilon(t)$$

avec $\epsilon(t) \to 0_E$ quand $t \to t_0$.

2. Une application

$$I \to E \times F, \quad t \mapsto (f(t), g(t))$$

est dérivable en t_0 si et seulement si f et g sont dérivables et le vecteur dérivé est $(f'(t_0), g'(t_0))$

Exemples 1. Une fonction complexe f est dérivable en t_0 si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaires le sont et alors

$$f'(t_0) = \mathrm{Re}(f)'(t_0) + i\ \mathrm{Im}(f)'(t_0).$$

2. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable en t_0 si et seulement si ses composantes le sont et alors

$$f'(t_0) = (f_1'(t_0), \ldots, f_n'(t_0)).$$

3. Idem avec $\mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Idem sur $\mathbb{C}$.

Proposition 3.3.5 1. Soient E un espace vectoriel normé et $f, g : I \to E$ deux fonctions dérivables en t_0. Alors, $f + g$ est dérivable en t_0 et $(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + f'(t_0)$.

2. Soient E un espace vectoriel normé, $f : I \to E$ une fonction dérivable en t_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, λf est dérivable en t_0 et $(\lambda f)'(t_0) = \lambda f'(t_0)$.

Démonstration. Comme dans le cas classique. ■

Proposition 3.3.6 1. Si $\gamma : I \to J$ est une fonction réelle dérivable en t_0 et si $f : J \to E$ est dérivable en $\gamma(t_0)$, alors $f \circ \gamma : I \to E$ est aussi dérivable en t_0 et

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \gamma'(t_0)f'(\gamma(t_0)).$$

2. Si $a : E \to F$ est une application linéaire continue et $f : I \to E$ est dérivable en t_0, alors $a \circ f : I \to F$ est aussi dérivable en t_0 et

$$(a \circ f)'(t_0) = a(f'(t_0)).$$

Démonstration. 1. Identique au cas classique.

2. En effet, par linéarité, on aura

$$a(f(t)) = a(f(t_0)) + (t - t_0)a(f'(t_0)) + (t - t_0)a(\epsilon(t))$$

ou $\epsilon(t) \to 0_E$ quand $t \to T_0$. Mais comme a est continue, on aura aussi $a(\epsilon(t)) \to a(0_E) = a(0_E) = 0_F$ (puisque a est linéaire).

■

Proposition 3.3.7 Soient $f : I \to E$ et $g : I \to F$ des applications dérivables en $t_0 \in I$ et $b : E \times F \to G$ une application bilinéaire continue. Alors l'application

$$b(f,g) : I \mapsto G, \quad t \mapsto b(f(t),g(t))$$

est aussi dérivable

$$b(f,g)'(t_0) = b(f'(t_0),g(t_0)) + b(f(t_0),g'(t_0)).$$

Démonstration. On écrit

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + (t-t_0)\epsilon(t)$$

et

$$g(t) = g(t_0) + (t-t_0)f'(g_0) + (t-t_0)\eta(t)$$

avec $\epsilon(t) \to 0_E$ et $\eta(t) \to 0_F$quand $t \to t_0$. Par bilinéarité, on aura alors

$$b(f(t),g(t)) = b(f(t_0),g(t_0)) + (t-t_0)(b(f'(t_0),g(t_0)) + b(f(t_0),g'(t_0))) + (t-t_0)\delta(t)$$

avec

$$\delta(t) = b(\epsilon(t),g(t_0) + b(f(t_0),\eta(t)) + (t-t_0)b(\epsilon(t),g'(t_0)) + b(f'(t_0),\eta(t)) \to 0_G. \blacksquare$$

Exemples

1. Soient M une algèbre normée et $f,g : I \to M$ deux applications dérivables en t_0, alors fg est dérivable en t_0 et
$$(fg)'(t_0) = f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0).$$
2. Soient E,F,G trois espaces vectoriels normés et $a : I \to \mathcal{L}(E,F), b : I \to \mathcal{L}(F,G)$ deux applications dérivables en $t_0 \in I$. Alors, l'application
$$b \circ a : I \to \mathcal{L}(E,G), \quad t \mapsto b(t) \circ a(t)$$
est dérivable en t_0 et
$$(b \circ a)'(t_0) = b'(t_0) \circ a(t_0) + b(t_0) \circ a'(t_0).$$
Résultat analogue avec la multiplication des matrices.
3. Soient E,F deux espaces vectoriels normés et $v : I \to E, a : I \to \mathcal{L}(E,F)$ deux applications dérivables en $t_0 \in I$. Alors, l'application
$$a(v) : I \to \mathcal{L}(E,G), \quad t \mapsto a(t)(v(t))$$
est dérivable en t_0 et
$$a(v)'(t_0) = a'(t_0)(v(t_0)) + a(t_0)(v'(t_0)).$$
Résultat analogue avec matrices et vecteurs colonnes.

Définition 3.3.8 Si $f : I \to E$ est dérivable en tout $t \in I$, alors la fonction vectorielle

$$f' : I \to E, \quad t \mapsto f'(t)$$

est la fonction *dérivée* de f. La fonction f est *de classe* $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ si f est k fois dérivable et que $f^{(k)}$ est continue. Elle est *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ si f est k fois dérivable pour tout $k \in \mathbb{N}$).

Théoreme 3.3.9 Si M est une algèbre de Banach et $a \in M$, alors la fonction vectorielle

$$\mathbb{R} \to M, \quad t \mapsto \exp(ta)$$

est $\mathcal{C}^\infty$ et a pour dérivée

$$\mathbb{R} \to M, \quad t \mapsto a\exp(ta).$$

Démonstration. On pose (dans cette démonstration) $f(t) = \exp(ta)$ et on considère d'abord la dérivabilité en 0. On a

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(0) - ta\| &= \|\exp(ta) - 1_M - ta\| \\ &= \left\| \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!}(ta)^i \right\| \\ &\leq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} |t| \|a\|^i \\ &= e^{|t|\|a\|} - 1 - |t|\|a\|. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left\| \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} - a \right\| \leq \frac{e^{|t|\|a\|} - 1 - |t|\|a\|}{|t|} = \left(\frac{e^{|t|\|a\|} - 1}{|t|\|a\|} - 1 \right) \|a\| \to 0$$

quand $t \to 0$, si bien que f est dérivable en 0 et $f'(0) = a$.

On fixe maintenant $t_0 \in \mathbb{R}$ et on considére l'application

$$f_0 : \mathbb{R} \to M, \quad t \mapsto \exp((t - t_0)a).$$

On a $f_0 = f \circ \gamma$ avec $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t - t_0$. Puisque $\gamma(t_0) = 0$ et $\gamma'(t_0) = 1$, on voit que f_0 est dérivable en t_0 et que

$$f_0'(t_0) = (f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = f'(0) = a.$$

On considère maintenant l'application linéaire continue

$$l : M \to M, \quad b \mapsto b\exp(t_0 a)$$

Puisque $ta = (t - t_0)a + t_0 a$ et que ces matrices commutent, on a

$$\exp(ta) = \exp((t - t_0)a)\exp(t_0 a),$$

c'est à dire $f = l \circ f_0$. Puisque l est linéaire, on en déduit que

$$f'(t_0) = l(f_0'(t_0)) = l(a) = a\exp(t_0 a)$$

comme annoncé.

On conclut par récurrence (pour les dérivées successives). ∎

Remarque 1. On a toujours $a\exp(ta) = \exp(ta)a$.

2. Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$), alors $t \mapsto \exp(tA)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et a pour dérivée $t \mapsto A\exp(tA)$.

Exemples 1. Si $A := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, alors

$$\exp(tA) = \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

2. Si $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, alors

$$\exp(tA) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

3. Si

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

alors

$$\exp(tA) = \begin{bmatrix} e^t & -e^t + e^{5t} & e^t + e^{5t} \\ e - e^{-2t} & -e^t + e^{-2} + e^{5t} & e^t + e^{5t} \\ e^t - e^{-2t} & -e^t + e^{-2t} & e^t \end{bmatrix}.$$

4. Enfin, avec

$$A := \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix},$$

on trouve

$$\exp(tA) = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-6t} & 0 & te^{-6t} \\ \frac{1}{24}(25e^{6t} - 25e^{-6t} - 12te^{-6t}) & e^{6t} & \frac{1}{24}(13e^{6t} - 13e^{-6t} - 12te^{-6t}) \\ -te^{-6t} & 0 & (1-t)e^{-6t} \end{bmatrix}.$$

3.4 Exercices

Exercice 3.1 1. Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi qu'une base des sous-espace propres associés. La matrice est-elle diagonalisable ? Si oui, diagonaliser A.

2. Même question avec $A := \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$.
3. Même question avec $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
4. Même question avec $A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.
5. Même question avec $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.
6. Même question avec $A := \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$.
7. Même question avec $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
8. Même question avec $A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solution 1. Les valeurs propres de

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

satisfont $\lambda + \mu = 4$ et $\lambda\mu = 4$ si bien que nécessairement $\lambda = \mu = 2$. La matrice n'est pas diagonalisable car une matrice diagonalisable qui a une unique valeur propre est automatiquement diagonale. Pour trouver un vecteur propre, on doit résoudre

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Cela fournit l'équation $x + y = 0$ et on peut prendre par exemple $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2. Les valeurs propres de $A := \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ satisfont $\lambda + \mu = 5$ et $\lambda\mu = 6$ si bien que $\lambda = 2$ et $\mu = 3$ (ou le contraire). Pour trouver les vecteurs propres, on

résout d'abord $6x + 3y = 2x$ qui fournit $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ puis $6x + 3y = 3x$ qui fournit $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ et on a donc $A = PDP^{-1}$ avec

$$D := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Les valeurs propres de

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

satisfont $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda\mu = 1$ si bien que $\lambda = \pm i$. Pour trouver un vecteur propre pour $\lambda = i$, on doit résoudre

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Cela fournit l'équation $-ix + y = 0$ et on peut prendre par exemple $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$. La matrice est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec

$$D := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix},$$

et on peut calculer

$$P^{-1} = \frac{1}{-2i} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

4. On considère maintenant la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

On calcule son polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & 4 \\ -3 & \lambda - 2 & 4 \\ -3 & 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & 4 \\ \lambda - 1 & \lambda - 2 & 4 \\ \lambda - 1 & 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 1 & \lambda - 2 & 4 \\ 1 & 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ 0 & 7 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ 7 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 5).$$

On a trois valeurs propres distinctes $\lambda = 1$, $\lambda = -2$ et $\lambda = 5$ et la matrice est donc diagonalisable. On cherche un vecteur propre pour $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

fournit les équations $4y - 4z = 0$ et $3x + y - 4z = 0$, c'est à dire $y = z$ et $x = z$ et on peut donc prendre

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On cherche ensuite un vecteur propre pour $\lambda = -2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

fournit les équations $3x + 4y - 4z = 0$ et $3x - 3y + 3z = 0$, c'est à dire $y = z$ et $x = 0$ et on peut donc prendre

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Enfin, on cherche un vecteur propre pour $\lambda = 5$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

fournit les équations $-4x + 4y - 4z = 0$ et $3x - 3y - 4z = 0$, c'est à dire $x = y$ et $z = 0$ et on peut donc prendre

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On trouve donc la matrice diagonale D et une matrice de passage P :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut calculer P^{-1} par la méthode du pivot :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

si bien que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. On considère maintenant la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

On cherche son polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+4) = (\lambda-2)^2.$$

On trouve donc une unique valeur propre 2 (triple) et la matrice n'est donc pas diagonalisable (car elle n'est pas diagonale).

6. On considère maintenant la matrice

$$A := \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

On cherche son polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} \lambda+5 & 0 & -1 \\ -12 & \lambda-6 & -6 \\ 1 & 0 & \lambda+7 \end{vmatrix} = (\lambda-6)\begin{vmatrix} \lambda+5 & -1 \\ 1 & \lambda+7 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-6)(\lambda^2+12\lambda+36) = (\lambda-6)(\lambda+6)^2.$$

On trouve donc une valeur propre simple 6 et une valeur propre double -6. On cherche un vecteur propre pour $\lambda = 6$. On peut remarquer que $AE_2 = 6E_2$ ou faire le calcul :

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

fournit les équations $-11x + z = 0$ et $-x - 13z = 0$, c'est à dire $x = z = 0$ et on peut donc prendre

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On cherche maintenant un vecteur propre pour $\lambda = -6$:

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -6 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

fournit les équations $x + z = 0$ et $12x + 12y + 6z = 0$, c'est à dire $x = -z$ et $z = 2y$, et on peut donc prendre

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

La matrice n'est pas diagonalisable : il faudrait une base formée de trois vecteurs propres et le sous-espace propre associé à -6 est seulement de dimension un.

7. On considère la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On calcule son polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ \lambda - 2 & \lambda - 2 & -1 \\ \lambda - 2 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)[(\lambda - 1)^2 + 1] = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = (\lambda - 2)(\lambda - 1 + i)(\lambda - 1 - i).$$

On en déduit que les valeurs propres sont 2 et $1 \pm i$ et on cherche une base formée de vecteurs propres. Pour $\lambda = 2$, on doit résoudre

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

On trouve les équations $-x + y = 0$ et $x - z = 0$, ce qui donne $x = y = z$ et on peut prendre le vecteur

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lorsque $\lambda = 1+i$, il s'agit de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (1+i) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

qui fournit les équations $-ix + y = 0$ et $x - iz = 0$, c'est à dire $y = ix$ et $z = -ix$ et on peut donc choisir

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{bmatrix}$$

comme vecteurs propres pour $\lambda = 1+i$ et $\lambda = 1-i$ respectivement (par conjugaison). On trouve donc la matrice diagonale D et une matrice de passage P :

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 1 & -i & i \end{bmatrix}.$$

On peut calculer P^{-1} par la méthode du pivot en utilisant les identités remarquables

$$(1+i)(1-i) = 2, \quad (1+i)^2 = 2i \quad \text{et} \quad (1-i)^2 = -2i.$$

On a donc

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & -i & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -i & i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-i) & -(1+i) & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -(1+i) & -(1-i) & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & \frac{1+i}{2} & -\frac{1+i}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -i & \frac{1-i}{2} & 0 & -\frac{1-i}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & \frac{1+i}{2} & -\frac{1+i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2i & -i & \frac{1+i}{2} & -\frac{1-i}{2} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & \frac{1+i}{2} & -\frac{1+i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1-i}{4} & -\frac{1+i}{4} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1+i}{4} & -\frac{1-i}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1-i}{4} & -\frac{1+i}{4} \end{bmatrix}$$

si bien que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1+i}{4} & -\frac{1-i}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1-i}{4} & -\frac{1+i}{4} \end{bmatrix}.$$

8. On considère la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On calcule

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 & 0 \\ \lambda-1 & \lambda & 0 & -1 \\ \lambda-1 & 1 & \lambda-1 & -1 \\ \lambda-1 & 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^3 \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3(\lambda+1).$$

On a donc une valeur propre simple -1 et une valeur propre triple 1. On cherche un vecteur propre pour la valeur propre -1 en résolvant le système

$$\begin{cases} z = -x \\ t = -y \\ -y+z+t = -z \\ -x+z+t = -t \end{cases}$$

et on peut choisir $(1, -1, -1, 1)$. On cherche ensuite des vecteurs propres pour la valeur propre 1 en résolvant le système

$$\begin{cases} z = x \\ t = y \\ -y+z+t = z \\ -x+z+t = t, \end{cases}$$

ce qui donne uniquement deux vecteurs linéairement indépendant, par exemple $(1, 0, 1, 0)$ et $(0, 1, 0, 1)$. La matrice n'est pas diagonalisable.

Exercice 3.2 1. Déterminer la forme de Jordan, une matrice de passage et son inverse pour

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Même question avec

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

3. Même question avec

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solution 1. On a vu que la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a une unique valeur propre 2 et un vecteur propre $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. On cherche alors un vecteur caractéristique associé en résolvant

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

ce qui donne l'équations $x + y = 1$ et on peut donc prendre le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. La forme de Jordan et une matrice de passage sont donc

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On peut aussi calculer P^{-1} (avec la formule) :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. On rappelle que la matrice

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

a 6 pour valeur propre simple et -6 pour valeur propre double et qu'on a trouvé les vecteurs propres

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

pour 6 et -6 respectivement. Il faut maintenant trouver un vecteur « caractéristique » associé au second vecteur propre et donc résoudre le système

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -6\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

On trouve donc les équations $x + z = 2$ et $12x + 12y + 6z = -1$ et on peut prendre le vecteur

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{13}{12} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

On trouve donc la forme de Jordan et une matrice de passage

$$J = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{13}{12} \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Il faut maintenant calculer son inverse.

3. On a vu que la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

n'est pas diagonalisable. On a trouvé une valeur propre simple -1 avec vecteur propre $(1, -1, -1, 1)$ ainsi que la valeur propre triple 1 avec vecteurs propres $(1, 0, 1, 0)$ et $(0, 1, 0, 1)$. Pour trouver la forme de jordan de A, il faut remplacer le second vecteur par un vecteur non nul de la forme $V = a(1, 0, 1, 0) + b(0, 1, 0, 1)$ et chercher un dernier vecteur (caractéristique) W tel que $AW = W + V$. On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} z = x + a \\ t = y + b \\ -y + z + t = z + a \\ -x + z + t = t + b, \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} z = x + a \\ t = y + b \\ a = b, \end{cases}$$

On peut choisir $a = b = 1$, ce qui donne $V = (1, 1, 1, 1)$ et $W = (0, 0, 1, 1)$ par exemple. On aura donc $A = PJP^{-1}$ avec

$$J := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3.3 1. Déterminer la décomposition de Dunford de

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Même question avec

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Même question avec

$$A := \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Solution 1. Puisque la matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a une unique valeur propre 2, on peut lire directement sa décomposition de Dunford sans calculer sa décomposition de Jordan, on a

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. De même, puisque la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a pour unique valeur propre 2, on a la décomposition de Dunford

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. On s'intéresse maintenant à la décomposition de Dunford de

$$A := \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

On a déjà trouvé la forme de Jordan et une matrice de passage :

$$J = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{13}{12} \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Il faut maintenant calculer P^{-1} et on peut pour cela utiliser la méthode du pivot :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{13}{12} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{13}{12} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{24} & 1 & \frac{13}{24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

si bien que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{25}{24} & 1 & \frac{13}{24} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Pour trouver la décomposition de Dunford, il suffit de calculer la partie nilpotente (ou la partie diagonalisable au choix) :

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{13}{12} \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{25}{24} & 1 & \frac{13}{24} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{13}{12} \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

On obtient finalement la décomposition de Dunford :

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ \frac{25}{2} & 6 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3.4

1. Calculer

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

2. Calculer

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

3. Calculer

$$\exp\left(\begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}\right).$$

Solution 1. On connaît la décomposition de Dunford

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \exp\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\exp\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^2 & e^2 \\ -e^2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

puisque

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. On sait que

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & -e & e \\ -e^{-2} & e^{-2} & 0 \\ 0 & e^5 & e^5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e & -e+e^5 & e+e^5 \\ e-e^{-2} & -e+e^{-2}+e^5 & e+e^5 \\ e-e^{-2} & -e+e^{-2} & e \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. On rappelle que

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ \frac{25}{2} & 6 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

avec

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ \frac{25}{2} & 6 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{13}{12} \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{25}{24} & 1 & \frac{13}{24} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

On calcule alors

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ \frac{25}{2} & 6 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{13}{12} \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^6 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{25}{24} & 1 & \frac{13}{24} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{13}{12} \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{25}{24}e^6 & e^6 & \frac{13}{24}e^6 \\ \frac{1}{2}e^{-6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}e^{-6} & 0 & \frac{1}{2}e^{-6} \end{bmatrix}. \\ &= \begin{bmatrix} e^{-6} & 0 & 0 \\ \frac{25}{24}(e^6 - e^{-6}) & e^6 & \frac{13}{24}(e^6 - e^{-6}) \\ 0 & 0 & e^{-6} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Et finalement

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}\right) &= \exp\left(\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ \frac{25}{2} & 6 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}\right) \exp\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} e^{-6} & 0 & 0 \\ \frac{25}{24}(e^6 - e^{-6}) & e^6 & \frac{13}{24}(e^6 - e^{-6}) \\ 0 & 0 & e^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-6} & 0 & e^{-6} \\ \frac{1}{24}(25e^6 - 37e^{-6}) & e^6 & \frac{1}{24}(13e^6 - 25e^{-6}) \\ -e^{-6} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 3.5

1. Calculer $\exp(tA)$ avec $A := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
2. Même question avec $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
3. Même question avec

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Même question avec
$$A := \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Solution 1. On considère la matrice $A := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. On rappelle que $A := 2I_2 + N$ avec $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ si bien que $\exp(tA) = e^{2t}\exp(tN)$. On calcule
$$\exp(tN) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}$$
et on en déduit que
$$\exp(tA) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

2. On considère la matrice $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. On sait que $A = PDP^{-1}$ avec
$$D := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad P := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$
On en déduit que
$$\begin{aligned} \exp(tA) &= P\exp(tD)P^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{it} & -ie^{it} \\ e^{-it} & ie^{-it} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{it}+e^{-it} & -ie^{it}+ie^{-it} \\ ie^{it}-ie^{-it} & e^{it}+e^{-it} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. On considère la matrice
$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$
On a vu que $A = PDP^{-1}$ avec
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= P\exp(tD)P^{-1}\\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & -e^t & e^t \\ -e^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} & e^5t \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} e^t & -e^t + e^{5t} & e^t + e^{5t} \\ e - e^{-2t} & -e^t + e^{-2} + e^{5t} & e^t + e^{5t} \\ e^t - e^{-2t} & -e^t + e^{-2t} & e^t \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

4. On sait que si

$$A := \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix},$$

alors $A = PDP^{-1} + N$ avec

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{13}{12} \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{25}{24} & 1 & \frac{13}{24} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

On a donc

$$\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1}\exp(tN).$$

On a $N^2 = 0$ et donc

$$\exp(tN) = I_3 + tN = \begin{bmatrix} 1+t & 0 & t \\ -\frac{t}{2} & 1 & -\frac{t}{2} \\ -t & 0 & 1-t \end{bmatrix}.$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned}P\exp(tD)P^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{13}{12} \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{6t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-6t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-6t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{25}{24} & 1 & \frac{13}{24} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.\\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{13}{12} \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{25}{24}e^{6t} & e^{6t} & \frac{13}{24}e^{6t} \\ \frac{1}{2}e^{-6t} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}e^{-6t} & 0 & \frac{1}{2}e^{-6t} \end{bmatrix}.\\ &= \begin{bmatrix} e^{-6t} & 0 & 0 \\ \frac{25}{24}(e^{6t} - e^{-6t}) & e^{6t} & \frac{13}{24}(e^{6t} - e^{-6t}) \\ 0 & 0 & e^{-6t} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
\exp(tA) &= \begin{bmatrix} e^{-6t} & 0 & 0 \\ \frac{25}{24}(e^{6t}-e^{-6t}) & e^{6t} & \frac{13}{24}(e^{6t}-e^{-6t}) \\ 0 & 0 & e^{-6t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+t & 0 & t \\ -\frac{t}{2} & 1 & -\frac{t}{2} \\ -t & 0 & 1-t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1+t)e^{-6t} & 0 & te^{-6t} \\ \frac{1}{24}(25e^{6t}-25e^{-6t}-12te^{-6t}) & e^{6t} & \frac{1}{24}(13e^{6t}-13e^{-6t}-12te^{-6t}) \\ -te^{-6t} & 0 & (1-t)e^{-6t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

4. Systèmes différentiels

4.1 Définitions et exemples

Nous ne considérerons ici que les systèmes différentiels *explicites d'ordre un* (laissant le lecteur imaginer la formulation dans le cas implicite et/ou d'ordre supérieur).

Définition 4.1.1 Un *système différentiel (explicite d'ordre un)* est une égalité

$$(\mathcal{E}) \quad x'(t) = f(t, x(t)) \tag{4.1}$$

où $x : I \to E$ est une fonction vectorielle dérivable définie sur un intervalle I à valeurs dans un espace vectoriel normé E et $f : U \subset \mathbb{R} \times E \to E$ est une application vectorielle. Si l'égalité est satisfaite pour tout $t \in I$, on dit que x est *solution* du système.

En pratique, on écrit simplement $x' = f(t, x)$. Lorsque x est solution, on dit aussi que l'image de la fonction vectorielle x est une *courbe intégrale* du système.

Remarques
1. Lorsque $E = \mathbb{R}$, un système différentiel est la même chose qu'une équation différentielle (explicite d'ordre un) mais la notion de courbe intégrale est légèrement différente.
2. Lorsque $E = \mathbb{C}$, il s'agit d'une équation différentielle complexe.
3. Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, on dit *système différentiel de rang* n. Se donner x revient à se donner n fonctions réelles en une variable :

$$x_i : I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto x_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Se donner f revient à se donner n fonctions réelles en $n+1$ variables :

$$f_i : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (t, x_1, \dots, x_n) \mapsto f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Le système s'écrit alors

$$\left\{\begin{array}{c} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{array}\right. \tag{4.2}$$

On a bien sûr une interprétation analogue lorsque $E = \mathbb{C}^n$ ou $E = \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ (idem sur $\mathbb{C}$).

Exemples 1. Équations de Lotka-Volterra :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x(\alpha - \beta y) \\ y' = y(\delta x - \gamma). \end{array}\right.$$

On ne sait pas écrire explicitement les solutions.

2. Une solution non nulle du système différentiel

$$\left\{\begin{array}{l} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{array}\right.$$

est donnée par

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = e^{2t} \\ y(t) = -e^{2t} \end{array}\right.$$

(vérifier !). La courbe intégrale est une demi-droite (car $x > 0$) de pente -1.

3. Plus difficile : une solution non nulle de

$$\left\{\begin{array}{l} x' = y + \frac{1}{\cos(t)} \\ y' = -x + \frac{1}{\sin(t)} \end{array}\right.$$

sur $]0, \pi/2[$ est donnée par

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \ln(\tan(t))\sin(t) \\ y(t) = \ln(\tan(t))\cos(t) \end{array}\right.$$

(vérifier !). La courbe intégrale est plus compliquée à se représenter (voir figure 4.1) mais on voit aisément que $(x, y) \to (0, -\infty)$ quand $t \to 0$, que $(x, y) \to (+\infty, 0)$ quand $t \to \pi/2$, et que, lorsque $t = \pi/4$, on a $(x, y) = (0, 0)$ et $(x', y') = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ si bien qu'alors $y'/x' = 1$.

Remarques 1. Résoudre une *équation* différentielle explicite d'ordre n

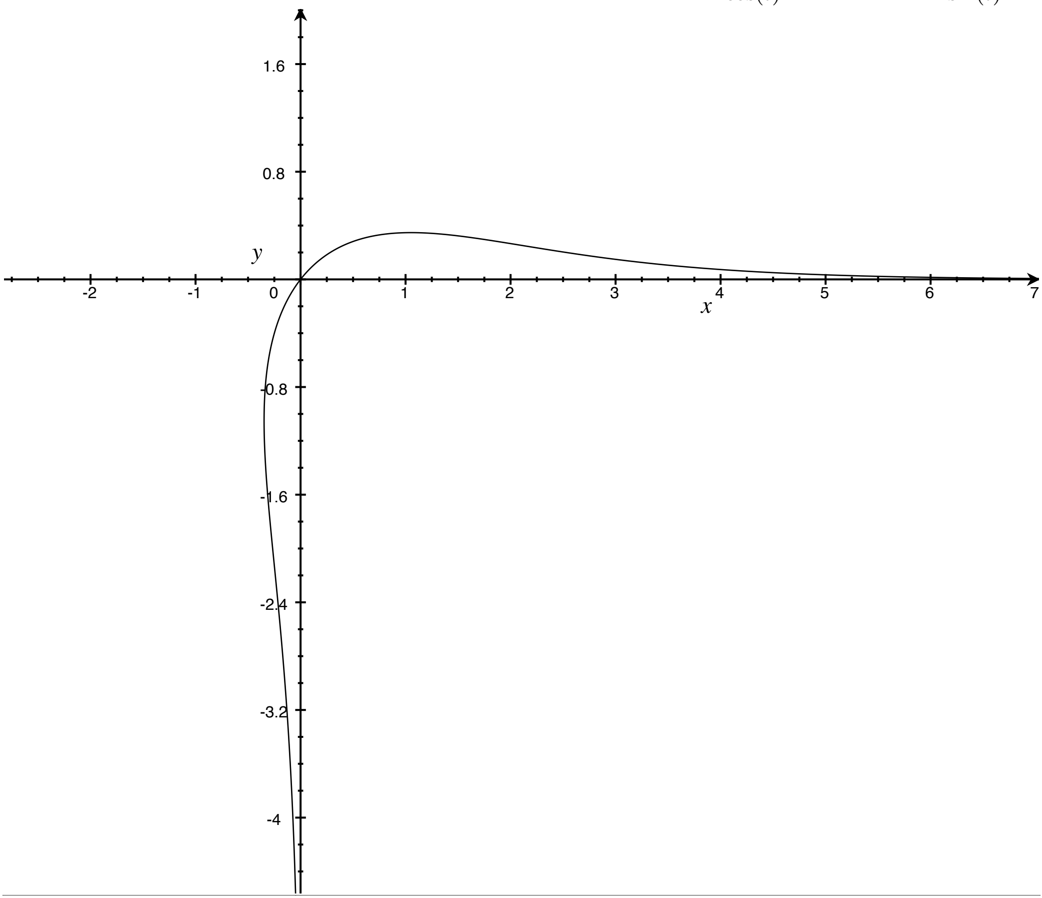
$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$$

est équivalent à résoudre le système différentiel (d'ordre 1 et) de rang n

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & x_3 \\ & \vdots & \\ x_{n-1}' & = & x_n \\ x_n' & = & f(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array}\right. \tag{4.3}$$

en posant $x = x_1$.

FIGURE 4.1 – Courbe intégrale de $x' = y + \frac{1}{\cos(t)}, y' = -x + \frac{1}{\sin(t)}$



2. Un système de rang n est dit *triangulaire* si, pour tout $i = 1, \dots, n$, f_i ne dépend pas de $x_1, \dots, x_{i-1}$. Autrement dit, le système est de la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2'(t) & = & f_2(t, x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ & \vdots & \\ x_{n-1}'(t) & = & f_{n-1}(t, x_{n-1}(t), x_n(t)) \\ x_n'(t) & = & f_n(t, x_n(t)). \end{array}\right.$$

Pour résoudre un tel système, on cherche d'abord x_n que l'on remplace dans l'équation du dessus pour trouver x_{n-1}, etc.

Définition 4.1.2 Une *condition initiale* est une égalité

$$x(t_0) = v$$

où $v \in E$ est un vecteur, $x : I \to E$ est une fonction vectorielle définie sur un intervalle I et $t_0 \in I$. Un *problème de Cauchy* est la conjonction d'un système différentiel et d'une condition initiale :

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{et} \quad x(t_0) = v. \tag{4.4}$$

Exemple Quand $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, se donner v revient à se donner n nombres réels ou complexes $k_1, \dots, k_n$, et les conditions initiales se réécrivent

$$\begin{cases} x_1(t_0) = k_1 \\ \quad \vdots \\ x_n(t_0) = k_n. \end{cases} \tag{4.5}$$

Définition 4.1.3 Un *système différentiel linéaire* (explicite d'ordre un) est une égalité

$$(\mathcal{E}) \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t).$$

où $x : I \to E$ est une fonction vectorielle dérivable et $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ sont des fonctions continues. Le système est *à coefficients constants* si a est constante (mais pas nécessairement b). Le système est *homogène* si $b = 0$. En général, le *système homogène associé* est le système

$$(\mathcal{E}_0) \quad x'(t) = a(t)(x(t)).$$

En pratique, on écrit $(\mathcal{E})$ $x' = a(t)(x) + b(t)$ et $(\mathcal{E}_0)$ $x' = a(t)(x)$.

Remarques 1. Lorsque $E = \mathbb{R}$, c'est la même chose qu'une équation différentielle linéaire *explicite* d'ordre un.

2. Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, le système s'écrit de manière plus conventionnelle sous la forme

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \qquad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t). \end{cases} \tag{4.6}$$

3. En écriture matricielle, le système s'écrit donc

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(1) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

ou encore

$$X' = A(t)X + B(t).$$

Exemples 1. Résoudre une *équation* différentielle linéaire explicite d'ordre n est équivalent à résoudre un système différentiel linéaire de rang n. Traitons le cas d'une équation d'ordre 2 :

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = g(t).$$

Celle-ci correspond au système

$$\left\{\begin{array}{rclcccc} x'(t) & = & & & y(t) & & \\ y'(t) & = & \frac{c(t)}{a(t)}x(t) & - & \frac{b(t)}{a(t)}y(t) & + & \frac{g(t)}{a(t)} \end{array}\right. \tag{4.7}$$

si la fonction a ne s'annule pas sur I. On trouve donc un système linéaire avec

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g(t)}{a(t)} \end{bmatrix}.$$

2. Résoudre un système différentiel linéaire *triangulaire* revient à résoudre une suite d'équations différentielles linéaires. Traitons le cas de rang 2 :

$$\left\{\begin{array}{rclcccc} x'(t) & = & a(t)x(t) & + & b(t)y(t) & + & f(t) \\ y'(t) & = & & & d(t)y(t) & + & g(t) \end{array}\right.$$

On commence par la seconde équation $y'(t) = d(t)y(t) + g(t)$. On cherche une primitive $D(t)$ de $d(t)$ puis une primitive $G(t)$ de $g(t)e^{-D(t)}$ si bien que $y(t) = (G(t) + k)e^{D(t)}$ avec $k \in \mathbb{R}$. On remplace dans la première équation pour trouver

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)(G(t) + k)e^{D(t)} + f(t).$$

On cherche une primitive $A(t)$ de $a(t)$ et une primitive $F_k(t)$ de $(b(t)(G(t) + k)e^{D(t)} + f(t))e^{-A(t)}$ et on a donc $x(t) = (F_k(t) + l)e^{A(t)}$ avec $k, l \in \mathbb{R}$.

4.2 Systèmes différentiels à coefficients constants

Dans cette section, on travaille sur $\mathbb{R}$ mais les résultats restent valables sur $\mathbb{C}$. On se donne une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et une fonction continue $B : I \to \mathbb{R}^n$. On considère les systèmes différentiels linéaires

$$(\mathcal{E}) : X' = AX + B(t) \quad \text{et} \quad (\mathcal{E}_0) : X' = AX,$$

et on cherche leurs solutions.

Proposition 4.2.1 Soit $V \in \mathbb{R}^n$ un vecteur (colonne) propre associé à une valeur propre λ (pour A). Alors,

$$X(t) := e^{\lambda t}V$$

est une solution pour $(\mathcal{E}_0)$. Idem sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. On a

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t}V = e^{\lambda t}\lambda V = e^{\lambda t}AV = Ae^{\lambda t}V = AX(t). \qquad \blacksquare$$

Exemple On considère le système

$$\left\{\begin{array}{l} x' = 3x + y \\ y' = -x + y. \end{array}\right.$$

On a vu que le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2. On en déduit une solution du système

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t} \\ y(t) = -e^{2t}. \end{cases}$$

Corollaire 4.2.2 Soit $V + iW$ un vecteur (colonne) propre associé à une valeur propre complexe $\alpha + i\beta$. Alors

$$X(t) := e^{\alpha t}\cos(\beta t)V - e^{\alpha t}\sin(\beta t)W$$
$$(\text{et aussi} := e^{\alpha t}\cos(\beta t)W + e^{\alpha t}\sin(\beta t)V)$$

est solution du système différentiel $X' = AX$.

Démonstration. En effet, on a

$$X(t) = \mathrm{Re}(e^{(\alpha+i\beta)t}(V + iW))$$

et l'autre solution s'obtient en considérant la partie imaginaire. ∎

Exemple On considère le système

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x. \end{cases}$$

On a vu que le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $i = 0 + i \times 1$. On en déduit une solution du système :

$$\begin{cases} x(t) &= \cos(t) \\ y(t) &= -\sin(t). \end{cases}$$

Proposition 4.2.3 Supposons A diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Soient $V_1, \dots, V_n \in \mathbb{R}^n$ une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Alors, le $(\mathcal{E}_0)$ a pour solutions les

$$X(t) := k_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \cdots + k_n e^{\lambda_n t} V_n$$

ou $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$. Idem sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. On écrit $A = PDP^{-1}$ où

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = [V_1 \cdots V_n].$$

On fait le changement de variables $Y = P^{-1}X$ si bien que $X = PY$ et $X' = PY'$. Le système devient $PY' = APY$ ou de manière équivalente $Y' = P^{-1}APY = DY$. Il résulte alors du cas $n = 1$ que

$$Y = \begin{bmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X = PY = [V_1 \cdots V_n] \begin{bmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

qui fournit la formule annoncée. ■

Remarques

1. Alternativement, la conclusion dit que $(e^{\lambda_1 t}V_1, \ldots, e^{\lambda_n t}V_n)$ est une base de solutions.
2. Comme conséquence, on voit que les solutions forment un espace vectoriel de dimension n.
3. Le changement de variable $X = PY$ fonctionne toujours lorsque A est seulement trigonalisable, c'est à dire $A = PJP^{-1}$ avec J triangulaire, auquel cas l'équation devient $Y' = JY$ qui est triangulaire et donc plus simple à résoudre.
4. Le changement de variable $X = PY$ fonctionne toujours si A n'est pas une matrice constante tant que P *est constante*. Mais dans le cas contraire, la méthode capote car on a alors $X' = P'(t)Y + P(t)Y'$.

Corollaire 4.2.4 Supposons A diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Soient $V_1, \ldots, V_r$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ et $V_{r+1} \pm iW_{r+1}, \ldots, V_{r+s} \pm iW_{r+s}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres imaginaires $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_s \pm i\beta_s$. Alors, $(\mathcal{E}_0)$ a pour base de solutions les

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_i t}V_i, \quad i = 1, \ldots r, \\ &e^{\alpha_i t}\cos(\beta_i t)V_{r+i} - e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t)W_{r+i}, \quad i = 1, \ldots s, \\ &e^{\alpha_i t}\cos(\beta_i t)W_{r+i} + e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t)V_{r+i}, \quad i = 1, \ldots s. \end{aligned}$$ ■

Exemple On veut résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z. \end{cases}$$

On a vu qu'il y a une valeur propre réelle 2 et deux valeurs propres imaginaires $1 \pm i$ avec vecteurs propres associés

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

On trouve donc comme base de solutions complexes

$$\begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e^{t+it} \\ ie^{t+it} \\ -ie^{t+it} \end{bmatrix} \quad \text{et (par conjugaison)} \quad \begin{bmatrix} e^{t-it} \\ -ie^{t-it} \\ ie^{t-it} \end{bmatrix}.$$

On calcule ensuite

$$\begin{bmatrix} e^{t+it} \\ ie^{t+it} \\ -ie^{t+it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(\cos(t)+i\sin(t)) \\ e^t(-\sin(t)+i\cos(t)) \\ e^t(\sin(t)-i\cos(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t\cos(t) \\ -e^t\sin(t) \\ e^t\sin(t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} e^t\sin(t) \\ e^t\cos(t)) \\ -e^t\cos(t) \end{bmatrix}.$$

On en déduit une base de solutions réelles

$$\begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e^t\cos(t) \\ -e^t\sin(t) \\ e^t\sin(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} e^t\sin(t) \\ e^t\cos(t)) \\ -e^t\cos(t) \end{bmatrix}.$$

Autrement dit, les solutions du système sont les

$$\begin{cases} x = ae^{2t} + be^t\cos(t) + ce^t\sin(t) \\ y = ae^{2t} - be^t\sin(t) + ce^t\cos(t) \\ z = ae^{2t} + be^t\sin(t) - ce^t\cos(t) \end{cases}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Remarque Dans la situation de la proposition (et du corollaire), on peut utiliser la *méthode des coefficients indéterminés* (ce qui évite de calculer une matrice de passage ou d'utiliser les nombres imaginaires). On sait que la solution est de la forme

$$X = P \begin{bmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = CE(t).$$

avec $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche donc une matrice C telle que $X(t) = CE(t)$ et on résout $CE'(t) = ACE(t)$ avec

$$E(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_r t} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E'(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \lambda_r e^{\lambda_r t} \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Dans le cas de valeurs propres complexes, on fait pareil avec

$$E(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_r t} \\ e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t) \\ e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t) \\ \vdots \\ e^{\alpha_s t}\cos(\beta_s t) \\ e^{\alpha_s t}\sin(\beta_s t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E'(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \lambda_r e^{\lambda_r t} \\ e^{\alpha_1 t}(\alpha_1\cos(\beta_1 t) - \beta_1\sin(\beta_1 t)) \\ e^{\alpha_1 t}(\beta_1\cos(\beta_1 t) + \alpha_1\sin(\beta_1 t)) \\ \vdots \\ e^{\alpha_s t}(\alpha_s\cos(\beta_s t) - \beta_s\sin(\beta_s t)) \\ e^{\alpha_s t}(\beta_s\cos(\beta_s t) + \alpha_s\sin(\beta_s t)) \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Exemple Pour résoudre

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x, \end{cases}$$

on pose

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) + b\sin(t) \\ y(t) = c\cos(t) + d\sin(t) \end{cases}$$

et on considère donc le système

$$\begin{cases} \quad -a\sin(t) + b\cos(t) = c\cos(t) + d\sin(t) \\ -c\sin(t) + d\cos(t) = -a\cos(t) - b\sin(t). \end{cases}$$

Il faut résoudre

$$\begin{cases} -a & = & d \\ b & = & c \\ -c & = & -b \\ d & = & -a, \end{cases}$$

ce qui donne $d = -a$ et $c = b$. On trouve donc pour solution les

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) + b\sin(t) \\ y(t) = b\cos(t) - a\sin(t) \end{cases}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Théoreme 4.2.5 Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, alors l'équation $X' = AX$ a pour solutions les $X(t) = \exp(tA)V$ avec $V \in \mathbb{R}^n$. Idem sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. On fait le changement de variable $X = \exp(tA)Y$. Il résulte du théorème 3.3.9 et de la proposition 3.3.7 que

$$X' = A\exp(tA)Y + \exp(tA)Y'.$$

Puisque $\exp(tA)$ est inversible, on a

$$X' = AX \Leftrightarrow \exp(tA)Y' = 0_n \Leftrightarrow Y' = 0_n \Leftrightarrow Y = V \in \mathbb{R}^n. \qquad \blacksquare$$

Remarques
1. Il résulte de la proposition que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est un espace vectoriel de dimension n.
2. Le problème de Cauchy

$$X' = AX \quad \text{et} \quad X(t_0) = X_0$$

a pour unique solution $X(t) = \exp((t-t_0)A)X_0$. En effet, on a $\exp(t_0A)K = X_0$ si et seulement si $K = \exp(-t_0A)X_0$ et donc

$$X(t) = \exp(tA)\exp(-t_0A)X_0 = \exp((t-t_0)A)X_0.$$

Exemple On veut résoudre le problème de Cauchy :

$$x'' = -x \quad \text{avec} \quad x(0) = x'(0) = 1,$$

ou, ce qui revient au même, le système différentiel

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

On le réécrit sous la forme $X' = AX$ et $X(0) = X_0$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On a donc

$$X = \exp(tA)X_0 = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ -\sin t + \cos t \end{bmatrix}$$

si bien que $x(t) = \cos t + \sin t$ (et $y(t) = \cos t - \sin t$).

Remarque On peut appliquer la *méthode des coefficients indéterminés* même quand la matrice n'est pas diagonalisable (ce qui évite de calculer une matrice de passage et surtout son inverse ainsi que d'utiliser des nombres imaginaires). Il faut pour cela modifier le vecteur $E(t)$ introduit dans la remarque ci-dessus en tenant compte des blocs de Jordan. En effet, si

$$J := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

est un bloc de jordan de taille k, alors alors

$$\exp(tJ) := \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & te^{\lambda t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

(le calcul est laissé en exercice). Dans le vecteur $E(t)$ il faudra donc remplacer la suite des $e^{\lambda t}$ par la suite $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1}e^{\lambda t}$ et lorsque $\lambda = \alpha + i\beta$ est imaginaire il faudra faire la même chose avec les vecteurs $e^{\alpha t}\cos(t)$ et $e^{\alpha t}\sin(t)$.

On aura donc en général une base de solutions de la forme

$$e^{\lambda_1 t}V_{1,0}, te^{\lambda_1 t}V_{1,1} \ldots, t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}V_{1,k_i}, \ldots, e^{\lambda_r t}V_{r,0}, e^{\lambda_r t}V_{r,0} \ldots, t^{k_r-1}e^{\lambda_r t}V_{r,k_r}.$$

Dans le cas des valeurs propres complexes, on aura même

$$e^{\lambda_i t}V_{i,0}, \ldots, t^{k_i-1}e^{\lambda_i t}V_{i,k_i}, i = 1, \ldots r$$
$$e^{\alpha_i t}\cos(\beta_i t)V_{r+i,0}, \ldots, t^{l_i-1}e^{\alpha_i t}\cos(\beta_i t)V_{r+i,l_i}, i = 1, \ldots s$$
$$e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t)W_{r+i,0}, \ldots t^{l_i-1}e^{\alpha_i t}\sin(\beta_i t)W_{r+i,l_i}, i = 1, \ldots s.$$

Exemple On a vu que la matrice

$$A := \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

a une valeur propre simple 6 et une valeur propre double -6 et qu'elle n'est pas diagonalisable. Donc, pour résoudre

$$\begin{cases} x' = -5x + z \\ y' = 12x + 6y + 6z \\ z' = -x - 7z, \end{cases}$$

on pose

$$\begin{cases} x(t) = ae^{6t} + be^{-6t} + cte^{-6t} \\ y(t) = de^{6t} + le^{-6t} + fte^{-6t} \\ x(t) = ge^{6t} + he^{-6t} + kte^{-6t} \end{cases}$$

et on considère donc le système

$$\begin{cases} 6ae^{6t} + (-6b + c - 6ct)e^{-6t} = (-5a + g)e^{6t} + (-5(b + ct) + (h + kt))e^{-6t} \\ 6de^{6t} + (-6l + f - 6ft)e^{-6t} = (12a + 6d + 6g)e^{6t} + (12(b + ct) + 6(l + ft) + 6(h + kt))e^{-6t} \\ 6ge^{6t} + (-6g + h - 6kt)e^{-6t} = (-a - 7g)e^{6t} + (-(b + ct) - 7(h + kt))e^{-6t}. \end{cases}$$

Il faut résoudre

$$\begin{cases} 6a & = & -5a + g \\ -6b + c & = & -5b + h \\ -6c & = & -5c + k \\ 6d & = & 12a + 6d + 6g \\ -6l + f & = & 12b + 6l + 6h \\ -6f & = & 12c + 6f + 6k \\ 6g & = & -a - 7g \\ -6g + h & = & -b - 7h \\ -6k & = & -c - 7k, \end{cases}$$

et on trouve successivement $a = g = 0, k = -c, f = -c/2, h = c - b$ et $l = -(12b + 13c)/24$ si bien que

$$\begin{cases} x(t) = be^{-6t} + cte^{-6t} \\ y(t) = de^{6t} - \frac{12b+13c}{24}e^{-6t} - \frac{c}{2}te^{-6t} \\ x(t) = (c - b)e^{-6t} - cte^{-6t} \end{cases}$$

avec $b, c, d \in \mathbb{R}$. Alternativement, en utilisant l'exponentielle de matrice, on trouve

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{-6t} + (\alpha + \gamma)te^{-6t} \\ y(t) = \frac{25\alpha+24\beta+13\gamma}{24}e^{6t} - \frac{25\alpha+13\gamma}{24}e^{-6t} - \frac{\alpha+\gamma}{2}te^{-6t} \\ z(t) = \gamma e^{-6t} - (\alpha + \gamma)te^{-6t} \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et on vérifie que c'est bien la même chose.

Théoreme 4.2.6 — Variation de la constante. Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les $X(t) = \exp(tA)U(t)$ avec $U'(t) = \exp(-tA)B(t)$.

Démonstration. Il suffit de faire le changement de variable $X = \exp(tA)U$. Détails en exercices. ■

Exemple Résoudre

$$\begin{cases} x' = y + \frac{1}{\cos(t)} \\ y' = -x + \frac{1}{\sin(t)} \end{cases}$$

sur $]0, \pi/2[$.

Dans cette situation, on a

$$\exp(tA) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \exp(-tA) = \exp(tA)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

On cherche donc deux fonctions dérivables u et v telles que

$$\begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos(t)} \\ \frac{1}{\sin(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sin(t)}{\cos(t)} + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \end{bmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ \ln(\tan(t)) + l \end{bmatrix}$$

avec $k, l \in \mathbb{R}$ (plus précisément on a

$$v(t) = -\ln(\cos(t)) + \ln(\sin(t)) + l = \ln(\tan(t)) + l).$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \ln(\tan(t)) + l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \ln(\tan(t))\sin(t) + k\cos(t) + l\sin(t) \\ \ln(\tan(t))\cos(t) - k\sin(t) + l\cos(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque On peut aussi résoudre $(\mathcal{E})$ par changement de variable. Voici la méthode : on désigne par J la matrice de Jordan, par P une matrice de passage, et on pose $Y = P^{-1}X$ si bien que $X = PY$ et $X' = PY'$. Le système devient $PY' = APY + B(t)$ ou de manière équivalente $Y' = JY + P^{-1}B(t)$.

Exemple Résoudre le système

$$\begin{cases} x' = 6x + 3y - 3t + 4e^{3t} \\ y' = -4x - y + 4t - 4e^{3t}. \end{cases}$$

On l'écrit sous la forme $X' = AX + B(t)$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{bmatrix} -3t + 4e^{3t} \\ 4t - 4e^{3t} \end{bmatrix}.$$

On a montré que $A = PDP^{-1}$ avec

$$D := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

On fait le changement de variables $X = PU$ qui donne $U' = DU + C(t)$ avec

$$C(t) = P^{-1}B(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3t + 4e^{3t} \\ 4t - 4e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 4e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Si on écrit $U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, on doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} u' = 2u - t \\ v' = 3v + 4e^{3t}. \end{cases}$$

qui est en fait composé de deux équations linéaires du premier ordre que l'on sait résoudre. On trouve

$$u(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + ke^{2t} \quad \text{et} \quad v(t) = 4te^{3t} + le^{3t}.$$

On calcule alors

$$X(t) = PU(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + ke^{2t} \\ 4te^{3t} + le^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3t}{2} + \frac{3}{4} + 4te^{3t} + 3ke^{2t} + le^{3t} \\ -2t - 1 - 4te^{3t} - 4ke^{2t} - le^{3t} \end{bmatrix}$$

et on peut donc conclure :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3t}{2} + \frac{3}{4} + 4te^{3t} + 3ke^{2t} + le^{3t} \\ y(t) = -2t - 1 - 4te^{3t} - 4ke^{2t} - le^{3t} \end{cases}$$

avec $k, l \in \mathbb{R}$.

4.3 Systèmes différentiels linéaires

Dans cette section, on travaille sur $\mathbb{R}$ mais les résultats restent valables sur $\mathbb{C}$. On se donne un intervalle I ansi que deux applications continues $A : I \to M^n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$. On considère les systèmes différentiels linéaires

$$(\mathcal{E}) : X' = A(t)X + B(t) \quad \text{et} \quad (\mathcal{E}_0) : X' = A(t)X,$$

et on étudie leurs ensembles des solutions respectifs $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_0$.

Théoreme 4.3.1 — Cauchy-Lipschitz. Un problème de Cauchy linéaire

$$X' = A(t)X + B(t) \quad \text{et} \quad X(t_0) = V \tag{4.10}$$

possède une et une seule solution.

Démonstration. On peut supposer que $I = [a, b]$ est un intervalle fermé borné : l'unicité dans l'assertion implique que les solutions se recolleront automatiquement et de manière unique.

On munit

- $\mathbb{R}^n$ de la norme infinie $\|(x_1,\ldots,x_n)\| = \max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}$,
- $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée $\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
- $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ de la norme infinie $\|f\| := \sup_{a\leq t\leq b}\|f(t)\|$.

On définit par récurrence une suite de fonctions sur $[a,b]$ en posant

$$X_0(t) = V \quad \text{et} \quad X_{k+1}(t) = V + \int_{t_0}^{t} (A(\tau)X_k(\tau) + B(\tau))\,\mathrm{d}\tau.$$

On va montrer par récurrence la majoration

$$\|X_k(t) - X_{k-1}(t)\| \leq \|A\|^{k-1}(\|A\|\|V\| + \|B\|)\frac{|t-t_0|^k}{k!}$$

pour $a \leq t \leq b$ et $k \geq 1$. On a bien

$$\begin{aligned}\|X_1(t) - X_0(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} (A(\tau)V + B(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right\| \\ &\leq (\|A\|\|V\| + \|B\|)|t-t_0|\end{aligned}$$

et on aura

$$\begin{aligned}\|X_{k+1}(t) - X_k(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} A(\tau)(X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau))\mathrm{d}\tau\right\| \\ &\leq \|A\| \int_{t_0}^{t} \|X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau))\|\mathrm{d}\tau \\ &\leq \|A\| \int_{t_0}^{t} \|A\|^{k-1}(\|A\|\|V\| + \|B\|)\frac{|\tau-t_0|^k}{k!}\mathrm{d}\tau \\ &= \|A\|^k(\|A\|\|V\| + \|B\|)\int_{t_0}^{t} \frac{|\tau-t_0|^k}{k!}\mathrm{d}\tau \\ &= \|A\|^k(\|A\|\|V\| + \|B\|)\frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}.\end{aligned}$$

Cette majoration est un critère de convergence (simple) pour la suite X_k vers une fonction X. En fait, on a la majoration uniforme

$$\|X_k - X_{k-1}\| \leq \|A\|^{k-1}(\|A\|\|V\| + \|B\|)\frac{(b-a)^k}{k!}$$

qui implique que X est une fonction continue et que pour tout $t \in [a,b]$, on a

$$X(t) = V + \int_{t_0}^{t} (A(\tau)X(\tau) + B(\tau))\,\mathrm{d}\tau.$$

Cela implique que X est dérivable sur $[a,b]$ et que les conditions (4.10) sont bien satisfaites.

Pour obtenir l'unicité, il suffit de montrer (en faisant la différence entre deux solutions) que

$$X' = A(t)X \text{ et } X(t_0) = 0_n \Rightarrow X = 0_n.$$

On montre alors par récurrence sur k que

$$\|(X(t)\| \leq \ \|A\|^k \|X\| \frac{|t-t_0|^k}{k!} \to 0$$

si bien que $X(t)=0$. En effet, l'inégalité est satisfaite pour $k=0$ par définition et on aura

$$\begin{aligned}\|X(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t A(\tau)X(\tau)\mathrm{d}\tau \right\| \\ &\leq \|A\| \left\| \int_{t_0}^t \|A\|^k \|X\| \frac{|\tau-t_0|^k}{k!}\mathrm{d}\tau \right\| \\ &\leq \ \|A\|^{k+1}\|X\| \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}.\end{aligned}$$ ∎

Remarques

1. Il existe un théorème de Cauchy-Lipschitz plus général pour les systèmes différentiels qui ne sont pas linéaires avec une démonstration analogue. Il est basé sur le *lemme de Grönwall* et requiert des conditions *lipschitziennes* sur lesquelles nous ne souhaitons pas nous étendre.
2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz prédit l'existence et l'unicité de la solution mais ne fournit en aucun cas une méthode de résolution du système.

On rappelle qu'une application $f : E \to F$ entre deux sous-espaces affines est *affine* s'il existe $v_1 \in E$ tel que l'application (entre les espaces directeurs)

$$f_0 : E_0 \to F_0, \quad v \to f(v_1+v) - f(v_1)$$

est linéaire. L'application f_0 ne dépend pas du choix du vecteur v_1 et la formule est alors satisfaite pour tout $v_1 \in E$. On dit *isomorphisme affine* si f, ou de manière équivalente, f_0 est bijective. Par exemple, une application constante est affine et une translation est un isomorphisme affine.

Corollaire 4.3.2 $\mathcal{S}$ est un espace affine de dimension n d'espace directeur $\mathcal{S}_0$ et on a, pour tout $t_0 \in I$, un isomorphisme

$$\mathcal{S} \simeq \mathbb{R}^n, \quad X \mapsto X(t_0).$$

Démonstration. Par linéarité, l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions du système homogène est un sous-espace vectoriel et si $X_1 \in \mathcal{S}$, on a $X_1 + X \in \mathcal{S} \Leftrightarrow X \in \mathcal{S}_0$. Cela montre que $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine d'espace directeur $\mathcal{S}_0$. L'application $X \mapsto X(t_0)$ est bien une application affine car c'est la restriction d'une application linéaire. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit qu'elle est bijective. Enfin, comme $\mathcal{S}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$, c'est un espace de dimension n. ∎

Définition 4.3.3 Si $X_1, \ldots, X_n : I \to \mathbb{R}^n$ sont des solutions de $(\mathcal{E}_0)$, alors leur *wronskien* est la fonction vectorielle

$$W : I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \det(X_1(t), \ldots, X_n(t)).$$

Exemple On sait que le système

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x, \end{cases}$$

a pour solutions

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) + b\sin(t) \\ y(t) = b\cos(t) - a\sin(t) \end{cases}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Une base de solutions est donc donnée par

$$\begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Leur wronskien est donc $W = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Proposition 4.3.4 Les conditions suivantes sont équivalentes :
1. $X_1, \ldots, X_n$ forment une base de $\mathcal{S}_0$,
2. $\forall t \in I, W(t) \neq 0$,
3. $W \neq 0$ (c'est à dire $\exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0$).

Démonstration. Supposons que $X_1, \ldots, X_n$ forment une base de solutions. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $t \in I$ tels que $\sum \lambda_i X_i(t) = 0$. Alors la fonction $X := \sum \lambda_i X_i$ est solution du système et on a $X(t) = 0$. Il résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz que $X = 0$ si bien que $\sum \lambda_i X_i = 0$ et donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ puisque $X_1, \ldots, X_n$ sont linéairement indépendants. Cela montre que $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ sont linéairement indépendants et donc que $W(t) \neq 0$. La seconde implication est triviale. Enfin, supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$. Cela implique que $X_1(t_0), \ldots, X_n(t_0)$ sont linéairement indépendants. Supposons que l'on ait une égalité $\sum \lambda_i X_i = 0$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. On aura alors $\sum \lambda_i X_i(t_0) = 0$ et donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. ■

Définition 4.3.5 Si $X_1, \ldots, X_n$ est une base de solutions de $(\mathcal{E}_0)$, alors la fonction matricielle

$$R : I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad t \mapsto [X_1(t) \cdots X_n(t)].$$

est une *matrice fondamentale* du système.

Remarques
1. Le wronskien est le déterminant de la matrice fondamentale.
2. Lorsque $X_1, \ldots, X_n$ sont des solutions, la fonction matricielle R est une matrice fondamentale du système si et seulement si R est inversible (dans l'algèbre des fonctions matricielles). Cela signifie que pour tout $t \in I$, la matrice $R(t)$ est inversible et on a alors $R^{-1}(t) = R(t)^{-1}$.
3. Inversement, une fonction matricielle R est une matrice fondamentale si et seulement si elle est inversible et satisfait l'équation différentielle homogène $R' = A(t)R$ (c'est à dire

$$[X_1' \cdots X_n'] = A(t)[X_1 \cdots X_N] \; = [A(t)X_1 \cdots A(t)X_n]$$

dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Lorsque A est constante, alors $R(t) := \exp(tA)$ est une matrice fondamentale puisque R est inversible et $R'(t) = AR(t)$.
5. La *matrice résolvante* du système en t_0 est la matrice $R(t, t_0) := R(t)R(t_0)^{-1}$. Alors, $R(t, t_0)X_0$ est l'unique solution a problème de Cauchy $X' = A(t)X$ et $X(t_0) = X_0$.
6. La matrice résolvante est l'unique solution au problème de Cauchy

$$X' = A(t)X, \quad X(t_0) = I_n$$

dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
7. Lorsque A est constante, la matrice résolvante est $R(t, t_0) := \exp((t - t_0)A)$.

Exemple Une matrice fondamentale pour le système

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x, \end{cases}$$

est donnée par

$$R := \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Pour trouver la matrice résolvante en $\pi/4$, on calcule d'abord

$$R(\pi/4)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

et on a donc

$$\begin{aligned} R(t, \pi/4) &= R(t)R(\pi/4)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \cos(t) - \sin(t) & -\cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) & \cos(t) - \sin(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Théoreme 4.3.6 — Variation de la constante. Si R est une matrice fondamentale, alors les solutions de $\mathcal{E}$ sont les $X(t) = R(t)U(t)$ avec $U'(t) = R(t)^{-1}B(t)$.

Démonstration. Pour alléger la démonstration, on n'écrit pas la variable t (qui n'est d'ailleurs présente que pour insister sur le fait que les fonctions dépendent de t). Puisque R est inversible, on peut faire le changement de variables $X = RU$ et l'équation devient $R'U + RU' = ARU + B$. Puisque $R' = AR$, on trouve $RU' = B$ et finalement $U' = R^{-1}B$. ■

Remarques 1. Le théorème redonne bien sûr la méthode de variation de la constante pour les équations différentielles linéaires explicites d'ordre un :

$$(\mathcal{E}) \quad x' = a(t)x + b(t).$$

En effet, on connaît une solution fondamentale $e^{A(t)}$ ou A est une primitive de a. C'est ce qui joue le rôle de $R(t)$. Son inverse est $e^{-A(t)}$ et c'est $b(t)e^{-A(t)}$ qui joue le rôle de U'. On choisit une primitive C de cette fonction et c'est $C+k$ avec $k \in \mathbb{R}$ qui joue donc le rôle de U. On multiplie par $e^{A(t)}$ pour finir et on trouve bien $x(t) = (C(t)+k)e^{A(t)}$.

2. On retrouve aussi la méthode de variation des constantes pour les équations linéaires d'ordre deux. En effet, l'équation

$$(\mathcal{E}) \quad a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = g(t)$$

est équivalente au système $X' = A(t)X + B(t)$ avec

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g(t)}{a(t)} \end{bmatrix}$$

en faisant correspondre la solution x au vecteur colonne $\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$ (si a ne s'annule pas). Si x et y sont deux solutions de l'équation homogène

$$(\mathcal{E}_0) \quad a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = 0,$$

alors le wronskien s'écrit $w := \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$. Si celui-ci est non nul, on dispose d'une matrice fondamentale $R := \begin{bmatrix} x & y \\ x' & y' \end{bmatrix}$. On cherche donc une fonction vectorielle dérivable $U := \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ telle que

$$\begin{bmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g(t)}{a(t)} \end{bmatrix}$$

et les solutions sont données par la formule

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}.$$

Autrement dit, on cherche deux fonctions dérivables u et v telles que

$$\begin{cases} x(t)u'(t) + y(t)v'(t) = 0 \\ x'(t)u'(t) + y'(t)v'(t) = \frac{g(t)}{a(t)} \end{cases}$$

et on en déduit la solution particulière $x_1(t) = x(t)u(t) + y(t)v(t)$.

4.4 Exercices

Exercice 4.1 Résoudre le système différentiel réel

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

ou ω est un réel non nul en considérant $u = x' + iy'$.

Solution On aura $u' = x'' + iy'' = \omega y' - i\omega x' = -i\omega u$. On en déduit que $u = Ke^{-i\omega t}$ avec $K = a + ib \in \mathbb{C}$ ou encore $x' + iy' = (a + ib)(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))$ si bien que

$$\begin{cases} x' = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \\ y' = b\cos(\omega t) - a\sin(\omega t) \end{cases}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, et finalement

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{b}{\omega}\cos(\omega t) + c \\ y = \frac{b}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{a}{\omega}\cos(\omega t) \ + d \\ z = et + f \end{cases}$$

avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ (et on peut supprimer les dénominateurs ω puisque a et b sont des constantes quelconques).

Exercice 4.2 Résoudre les systèmes différentiels suivants

$$\begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

Solution On considère la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

du système. Comme celle-ci est clairement de rang 1, son noyau est de dimension 2, ce qui montre que 0 est valeur propre de multiplicité 2 et que le sous-espace propre correspondant, qui est le noyau, est de dimension 2. La matrice est donc diagonalisable et comme la somme des valeurs propres est égale à la trace qui vaut $1 + 4 + 1 = 6$, l'autre valeur propre vaut 6. Le noyau a pour équation $x + 2y - z = 0$ et donc pour base $(1, 0, 1)$ et $(2, -1, 0)$ par exemple. On résout ensuite

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

On voit immédiatement que $2 \times 6a = 6b$ et $-6a = 6c$ et il suffit de prendre $(1, 2, -1)$ comme dernier vecteur propre. On a donc une base de solutions donnée par

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad e^{6t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

La solution générale est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = a + 2b + ce^{6t} \\ y(t) = -b + 2ce^{6t} \\ z(t) = a - ce^{6t} \end{array}\right.$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ (pas les mêmes que tout à l'heure).

Le second système se résout de la même manière.

Exercice 4.3 Résoudre les systèmes différentiels suivants

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x' = y - z \\ y' = x + 4y - 2z \\ z' = 2x + 6y - 3z \end{array}\right.$$

Solution On considère la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

du système. On calcule son polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ \lambda - 2 & \lambda - 2 & -1 \\ \lambda - 2 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)((\lambda - 1)^2 + 1).$$

Outre la racine réelle $\lambda = 2$, on trouve deux racines imaginaires conjuguées en résolvant $(\lambda - 1)^2 + 1 = 0$, c'est à dire $\lambda = 1 \pm i$.

Arrivé là, il y a en gros deux stratégies. La première consiste à dire que x, y et z sont obligatoirement combinaisons linéaires de e^{2t} ainsi que des parties réelles et imaginaires de $e^{(1+i)t}$ qui sont $e^t \cos(t)$ et $e^t \sin(t)$. Autrement dit, on écrit

$$\left\{\begin{array}{l} x = ae^{2t} + be^t \cos(t) + ce^t \cos(t) \\ y = de^{2t} + fe^t \cos(t) + ge^t \cos(t) \\ z = he^{2t} + ke^t \cos(t) + le^t \cos(t) \end{array}\right.$$

avec $a, b, c, d, f, g, h, k, l \in \mathbb{R}$ et on remplace dans le système afin de se ramener à trois paramètres (et pas neuf). Je vais suivre l'autre stratégie qui consiste à résoudre le système sur $\mathbb{C}$ en écrivant une base de solutions réelles. On cherche un vecteur propre pour la valeur propre 2 en résolvant

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 2x \\ -x + 2y + z = 2y \\ x + z = 2z \end{array}\right. ,$$

qui est équivalent à $x = y = z$ et on peut prendre $V = (1, 1, 1)$. On en déduit une première solution réelle

$$X_1 = e^{2t} V = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

(on peut aussi utiliser cet argument dans la méthode des coefficients indéterminés pour en déduire qu'obligatoirement $a = d = h$). On cherche ensuite un vecteur propre pour la valeur propre $1 + i$ en résolvant

$$\begin{cases} x + y = (1+i)x \\ -x + 2y + z = (1+i)y \\ x + z = (1+i)z \end{cases},$$

qui est équivalent à $y = ix$ et $x = iz$ (c'est à dire $z = -ix$) et on peut prendre $W = (1, i, -i)$. On trouve donc une solution complexe

$$X_2 + iX_3 = We^{(1+i)t} = \begin{bmatrix} e^{(1+i)t} \\ ie^{(1+i)t} \\ -ie^{(1+i)t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \cos(t) + ie^t \sin(t) \\ -e^t \sin(t) + ie^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) - ie^t \cos(t) \end{bmatrix}.$$

On obtient ainsi notre base de solutions

$$X_1 = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} e^t \cos(t) \\ -e^t \sin(t) \\ e^t \sin(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{bmatrix} e^t \sin(t) \\ e^t \cos(t) \\ -e^t \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Et on a ainsi résolu notre système différentiel :

$$\begin{cases} x = ae^{2t} + be^t \cos(t) + ce^t \sin(t) \\ x' = ae^{2t} - be^t \sin(t) + ce^t \cos(t) \\ x' = ae^{2t} + be^t \sin(t) - ce^t \cos(t). \end{cases}$$

L'autre système se résout de la même manière.

Exercice 4.4 Résoudre les systèmes différentiels suivants

$$\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = -6x + 5y + 3z \\ y' = -8x + 7y + 4z \\ z' = -2x + y + z \end{cases}$$

Solution On considère la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

du système. On calcule bêtement

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 & -2 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda-2 & -\lambda^2+3\lambda-2 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -\lambda+1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

On peut alors choisir la méthode des coefficients indéterminés dès maintenant en écrivant a priori x, y, z comme combinaisons linéaires de e^t, e^{2t}, te^{2t}. Mais on va poursuivre un peu. On cherche un vecteur propre associé à la valeur propre 1 en résolvant le système

$$\begin{cases} 2y+2z = x \\ -x+2y+2z = y \\ -x+y+3z = z \end{cases}$$

pour trouver $y = 0$ et $x = 2z$ et on peut donc choisir $V := (2, 0, 1)$. On a donc une première solution à notre système

$$X = e^t V = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}$$

On va chercher les autres en écrivant a priori x, y et z comme combinaisons linéaires de e^{2t} et te^{2t} :

$$\begin{cases} x = ae^{2t} + bte^{2t} \\ y = ce^{2t} + dte^{2t} \\ z = fe^{2t} + gte^{2t}. \end{cases}$$

Notre système devient alors

$$\begin{cases} 2ae^{2t} + b(2t+1)e^{2t} = 2(ce^{2t} + dte^{2t}) + 2(fe^{2t} + gte^{2t}) \\ 2ce^{2t} + d(2t+1)e^{2t} = -(ae^{2t} + bte^{2t}) + 2(ce^{2t} + dte^{2t}) + 2(fe^{2t} + gte^{2t}) \\ 2fe^{2t} + g(2t+1)e^{2t} = -(ae^{2t} + bte^{2t}) + ce^{2t} + dte^{2t} + 3(fe^{2t} + gte^{2t}) \end{cases}$$

et on peut le réécrire

$$\begin{cases} 2a+b = 2c+2f \\ 2b = 2d+2g \\ 2c+d = -a+2c+2f \\ 2d = -b+2d+2g \\ 2f+g = -a+c+3f \\ 2g = -b+d+3g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b = 2c+2f \\ b = d+g \\ d = -a+2f \\ b = 2g \\ g = -a+c+f \\ b = d+g \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2g = 2c+2f \\ d = g \\ a+g = 2f \\ b = 2g \\ a+g = c+f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+g = 2f \\ d = g \\ a+g = 2f \\ b = 2g \\ c = f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2f-g \\ b = 2g \\ c = f \\ d = g \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (2f-g)e^{2t} + 2gte^{2t} \quad (= 2fe^{2t} + g(2t-1)e^{2t}) \\ y = fe^{2t} + gte^{2t} \\ z = fe^{2t} + gte^{2t}. \end{cases}$$

On a donc pour base de solutions

$$\begin{bmatrix} 2e^t \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} (2t-1)e^{2t} \\ te^{2t} \\ te^{2t} \end{bmatrix}$$

et la solution générale du système est donc

$$\begin{cases} x = 2ae^t + 2be^{2t} + c(2t-1)e^{2t} \quad (= 2ae^t + (2b-c)e^{2t} + 2cte^{2t}) \\ y = be^{2t} + cte^{2t} \\ z = ae^t + be^{2t} + cte^{2t} \end{cases}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.5 1. Calculer le polynôme caractéristique de

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. En déduire e^{tA}.
3. Résoudre le système $X' = AX$.

Solution On calcule

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2\lambda-4 & -\lambda^2+4\lambda-5 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 1 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 2\lambda-4 & -\lambda^2+4\lambda-5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1)$$

$$= (\lambda-1)^3.$$

Puisque A a pour unique valeur propre 1, sa forme de Dunford est $A = I + N$. On peut aussi utiliser le théorème de Cayley-Hamilton qui nous dit que $(A-I)^3 = 0$ si bien que $N := A - I$ est nilpotente et $A = I + N$ (et bien sûr I et N commutent). On a donc

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

D'autre part

$$\exp(tA) = \exp(tI + tN) = \exp(tI) \times \exp(tN) = e^t I \times \left(I + tN + \frac{t^2}{2}N^2\right)$$

si bien que

$$\exp(tA) = \begin{bmatrix} (1+t)e^t & t^2e^t & (t+t^2)e^t \\ te^t & (1-2t+t^2)e^t & (-t+t^2)e^t \\ -te^t & (2t-t^2)e^t & (1+t-t^2)e^t \end{bmatrix}$$

Puisque la solution du système est $X = \exp(tA)K$ ou $K := (a, b, c)$ est un vecteur quelconque, on en déduit les solutions

$$\begin{cases} x = a(1+t)e^t + bt^2e^t + c(t+t^2)e^t \\ y = ate^t + b(1-2t+t^2)e^t + c(-t+t^2)e^t \\ z = -ate^t + b(2t-t^2)e^t + c(1+t-t^2)e^t \end{cases}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.6 1. Calculer e^A lorsque

$$A := \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

(on pourra écrire $A = aI + bN + cN^2$).

2. En déduire les solutions du système différentiel $X' = AX$.

Solution Si on pose

$$N := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{on a} \quad N^2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $N^3 = 0$. On voit donc que $A = aI + bN + cN^2$ et comme I et N commutent, on en déduit que

$$\exp(A) = \exp(aI)\exp(bN)\exp(cN^2).$$

Bien sûr, $\exp(aI) = e^aI$ et comme $(bN)^3 = 0$ et $(cN^2)^2 = 0$, on a

$$\exp(bN) = I + bN + \frac{1}{2}(bN)^2 \quad \text{et} \quad \exp(cN^2) = I + cN^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \exp(A) &= e^aI\left(I + bN + \frac{1}{2}(bN)^2\right)(I + cN^2) \\ &= e^a\left(I + bN + \left(\frac{b^2}{2} + c\right)N^2\right) \\ &= \begin{bmatrix} e^a & be^a & (b^2/2+c)e^a \\ 0 & e^a & be^a \\ 0 & 0 & e^a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bien sûr, la formule est encore valide en remplaçant a, b, c par at, bt, ct, c'est à dire A par tA et on en déduit les solutions du système

$$\begin{cases} x = \alpha e^{at} + \beta b e^{at} + \gamma(b^2/2 + c)e^{at} \\ y = \beta e^{at} + \gamma b e^{at} \\ z = \gamma e^{at} \end{cases}$$

En fait, on aurait aussi vite fait de résoudre le système triangulaire directement en cherchant z à partir de la dernière équation, remplaçant dans la seconde pour trouver y puis dans la première pour trouver x.

Exercice 4.7 Résoudre les systèmes différentiels suivants

$$\begin{cases} x' = 6x + 3y - 3t + 4e^{3t} \\ y' = -4x - y + 4t - 4e^{3t} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = x + 2y + t \\ y' = -4x - 3y \end{cases}$$

Solution On considère la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sa trace (qui est la somme des valeurs propres) vaut 5 et son déterminant (qui est le produit des valeurs propres) vaut 6. Les valeurs propres sont donc 2 et 3. On trouve les vecteurs propres correspondant en résolvant $6x + 3y = 2x$ et $6x + 3y = 3x$ respectivement et on peut prendre $(3, -4)$ et $(1, -1)$ respectivement. On peut donc écrire $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si on écrit le système sous la forme $X' = AX + B(t)$, on peut le réécrire $X' = PDP^{-1}X + B(t)$, ce qui est équivalent à $P^{-1}X' = DP^{-1}X + P^{-1}B(t)$. Donc si on pose $U := P^{-1}X$, ou de manière équivalente, $X = PU$, et $C(t) := P^{-1}B(t)$ le système s'écrit $U' = DU + C(t)$. On a

$$B(t) := \begin{bmatrix} -3t + 4e^{3t} \\ 4t - 4e^{3t} \end{bmatrix} \quad \text{et donc} \quad C(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3t + 4e^{3t} \\ 4t - 4e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 4e^{3t} \end{bmatrix}$$

On est donc ramenés à résoudre le système

$$\begin{cases} u' = 2u - t \\ v' = 3v + 4e^{3t} \end{cases}.$$

On résout les deux équations séparément en cherchant d'abord une solution particulière. Si on pose $u = at + b$, l'équation devient $a = 2(at + b) - t$ si bien que $a = 2b = 1/2$ et on trouve la solution $u = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$. Si on pose $v = ate^{3t}$, l'équation devient $a(3t+1)e^{3t} = 3ate^{3t} + 4e^{3t}$ si bien que $a = 4$ et on trouve la solution $u = 4te^{3t}$. On en déduit la solution générale

$$\begin{cases} u = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + ae^{2t} \\ v = 4te^{3t} + be^{3t} \end{cases}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Pour finir, on calcule

$$X = PU = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + ae^{2t} \\ 4te^{3t} + be^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3t}{2} + \frac{3}{4} + 4te^{3t} + 3ae^{2t} + be^{3t} \\ -2t - 1 - 4te^{3t} - 4ae^{2t} - be^{3t} \end{bmatrix}$$

pour écrire enfin nos solutions

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{2} + \frac{3}{4} + 4te^{3t} + 3ae^{2t} + be^{3t} \\ y = -2t - 1 - 4te^{3t} - 4ae^{2t} - be^{3t} \end{cases}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Pour la seconde, on considère la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Sa trace vaut -2 et son déterminant vaut 5. Il y a donc deux valeurs propres complexes conjugées dont le double de la partie réelle vaut -2 et le carré du module vaut 5. On trouve donc $-1 + 2i$ comme valeur propre puis $(1, -1 + i)$ comme vecteur propre en résolvant $x + 2y = (-1 + 2i)x$. On peut alors procéder exactement comme ci-dessus mais dans le monde complexe.

Alternativement, on dispose de la solution complexe de l'équation homogène associée

$$\begin{aligned} X(t) = e^{(-1+2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + i \end{bmatrix} &= e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(2t) + i\sin(2t) \\ (-1 + i)(\cos(2t) + i\sin(2t)) \end{bmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -\cos(2t) - \sin(2t) \end{bmatrix} + ie^{-t} \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) - \sin(2t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On considère alors la matrice fondamentale

$$R(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\cos(2t) - \sin(2t) & \cos(2t) - \sin(2t) \end{bmatrix}.$$

Si on fait le changement de variable $X = R(t)U$, le système devient $R(t)U' = B(t)$ avec $B(t) := \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$ si bien que $U'(t) = R(t)^{-1}B(t)$. On calcule le wronskien $w(t) = \det R(t) = e^{-2t}$ et on a donc

$$R(t)^{-1} = e^{t} \begin{bmatrix} \cos(2t) - \sin(2t) & -\sin(2t) \\ \cos(2t) + \sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}.$$

On en déduit

$$U'(t) = te^{t} \begin{bmatrix} \cos(2t) - \sin(2t) \\ \cos(2t) + \sin(2t) \end{bmatrix}.$$

Il faut alors intégrer pour trouver $U(t)$ et finalement multiplier par $R(t)$.

Exercice 4.8 Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = (2-t)x + (t-1)y \\ y' = 2(1-t)x + (2t-1)y \end{cases}$$

en remarquant qu'une matrice de passage ne dépend pas de t.

Solution On considère la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{bmatrix}.$$

Sa trace et son déterminant valent respectivement

$$\mathrm{tr}(A) = 2-t+(2t-1) = t+1 \quad \text{et} \quad \det(A) = (2-t)(2t-1)-2(t-1)(1-t) = t$$

si bien que les valeurs propres sont 1 et t. On trouve les vecteurs propres associés en résolvant respectivement $(2-t)x + (t-1)y = x$ et $(2-t)x + (t-1)y = tx$, ce qui donne $x = y$ pour la première et $y = 2x$ pour l'autre. On a donc nos vecteurs propres $(1,1)$ et $(1,2)$ (on remarque que ça fonctionne aussi pour $t = 1$). On peut donc écrire $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a

$$X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \Leftrightarrow U' = DU$$

en posant $U := P^{-1}X$, ou de manière équivalente, $X = PU$. On est donc ramenés à résoudre le système

$$\begin{cases} u' = u \\ v' = tv \end{cases}.$$

qui a pour solutions $u = ae^t$ et $v = be^{t/2}$ et on en déduit que

$$X = PU = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ae^t \\ be^{t/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^t + be^{t/2} \\ ae^t + 2be^{t/2} \end{bmatrix}$$

et donc

$$\begin{cases} x = a^t + be^{t/2} \\ y = ae^t + 2be^{t/2} \end{cases}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.9 Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 2tx - y + t\cos(t) \\ y' = x + 2ty + t\sin(t) \end{cases}$$

en faisant le changement de variables $u = xe^{-t^2}$ et $v = ye^{-t^2}$ dans le système homogène associé et en appliquant ensuite la méthode de variation des constantes.

Solution On commence par le système homogène associé

$$\begin{cases} x' = 2tx - y \\ y' = x + 2ty \end{cases}$$

Le changement de variables nous donne

$$\begin{cases} u' = (x' - 2tx)e^{-t^2} = -ye^{-t^2} = -v \\ v' = (y' - 2ty)e^{-t^2} = xe^{-t^2} = u \end{cases}$$

En d'autre termes, on a $v = -u'$ et $u'' = -v' = -u$ si bien que $u = a\cos(t) + b\sin(t)$ et $v = a\sin(t) - b\cos(t)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Les solutions du système homogène sont donc

$$\begin{cases} x(t) = (a\cos(t) + b\sin(t))e^{t^2} \\ y(x) = (a\sin(t) - b\cos(t))e^{t^2}. \end{cases}$$

Afin de faire varier la constante, on récrit le système sous la forme $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ avec

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad A(t) = \begin{bmatrix} 2t & -1 \\ 1 & 2t \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{bmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{bmatrix}.$$

On a vu que les solutions de l'equation homogène $X'(t) = A(t)X(t)$ sont les $X(t) := R(t)V$ avec

$$R(t) = e^{t^2} \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Cela signifie que $R'(t)V = A(t)R(t)V$ pour tout vecteur V ou encore que $R'(t) = A(t)R(t)$ (cela signifie que R est une *matrice fondamentale*). On fait varier la constante en remplaçant V par $U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ et donc en remplaçant $X(t)$ par $R(t)U(t)$ dans l'equation initiale. Celle-ci devient donc $R'(t)U(t) + R(t)U'(t) = A(t)R(t)U(t) + B(t)$, c'est à dire $R(t)U'(t) = B(t)$. On doit donc maintenant résoudre le système

$$\begin{cases} (u'\cos(t) + v'\sin(t))e^{t^2} = t\cos(t) \\ (u'\sin(t) - v'\cos(t))e^{t^2} = t\sin(t). \end{cases}$$

Si on multiplie la première ligne par $\sin(t)$, la seconde par $\cos(t)$ et qu'on la retranche à la première, on va trouver $v'e^{-t^2} = 0$ et donc $v' = 0$ si bien que $v = b \in \mathbb{R}$. Mais on en déduit alors que $u'\cos(t)e^{t^2} = t\cos(t)$ si bien que $u' = te^{-t^2}$ et donc $u = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + a$ avec $a \in \mathbb{R}$. Finalement,

$$X(t) = R(t)U(t) = e^{t^2} \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t^2} + a \\ b \end{bmatrix}$$

Les solutions du système sont donc

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + (a\cos(t) + b\sin(t))e^{t^2} \\ y(x) = \frac{1}{2}\sin(t) + (a\sin(t) - b\cos(t))e^{t^2}. \end{cases}$$

Exercice 4.10 Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x. \end{cases}$$

Solution On peut remarquer que $(y-x)'' = y - x$ si bien que $y - x = ae^t + be^{-t}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et remplacer y par $x + ae^t + be^{-t}$ pour se ramener à une seule équation en x. On peut aussi faire le changement d'inconnues $u = x + y$ et $v = x - y$ pour se ramener à deux équations indépendantes. Si on ne voit pas ça, on pose $z = x'$ et $u = y''$ pour se ramener à un système de rang 4 mais d'ordre 1 :

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = u \\ z' = -y + z + u \\ u' = -x + z + u. \end{cases}$$

On considère la matrice du système

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et on calcule son polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda^2 & \lambda-1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-1)^2(1-\lambda^2) \\ &= (\lambda-1)^3(\lambda+1) \end{aligned}$$

Arrivé là, on peut utiliser la méthode des coefficients indéterminés avec les fonctions $e^{-t}, e^t, te^t, t^2e^t$ (ce qui fait un système à 8 inconnues pour trouver x et y) ou poursuivre. On cherche maintenant un vecteur propre pour la valeur propre -1 :

$$\begin{cases} z = -x \\ u = -y \\ -y + z + u = -z \\ -x + z + u = -u. \end{cases}$$

signifie que $z = -x$, $u = -y$ et $y = -x$ et on peut prendre $(1, -1, -1, 1)$. Arrivé là, on a une solution du système et on peut en chercher trois autres par la méthode des coefficients indétermnés avec les fonctions e^t, te^t, t^2e^t (ce qui fait un système à 6 inconnues) ou poursuivre. On cherche des vecteurs propres pour la valeur propre 1 :

$$\begin{cases} z = x \\ u = y \\ -y + z + u = z \\ -x + z + u = u. \end{cases}$$

signifie que $z = x$ et $u = y$ et on peut prendre $(1, 0, 1, 0)$ et $(0, 1, 0, 1)$. On ne peut pas conclure ! Il faut trouver un vecteur caractéristique :

$$\begin{cases} z = x + a \\ u = y + b \\ -y + z + u = z + a \\ -x + z + u = u + b. \end{cases}$$

Cela donne $a = b$, $z = x + a$ et $u = y + b$ et on peut prendre $a = b = 1$ ainsi que $x = y = 0$ et $z = u = 1$. On a donc une base : $(1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1)$. On a donc $A = PJP^{-1}$ avec

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si on écrit $J = D + N$ avec

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

On voit immédiatement que $N^2 = 0$. Ça veut dire qu'on peut conclure avec la méthode des coefficients indéterminés avec les fonctions e^t, te^t (ce qui fait un système à 4 inconnues). Sinon, on peut poursuivre et chercher $\exp(tA)$. Les détails sont laissés au lecteur.

Exercice 4.11 On considère l'équation différentielle

$$(E) : tx'' + (1 - 2t)x' + (t - 1)x = 0, \quad t \in]0, \infty[.$$

1. Montrer que si x_1, x_2 sont deux solutions de (E), alors leur wronskien $w := x_1x_2' - x_1'x_2$ est solution de $(E_1) : tw' + (1 - 2t)w = 0$.
2. Résoudre l'équation (E_1).
3. Vérifier que $x_1 := e^t$ est solution de (E) et en déduire que x_2 est solution d'une équation $(E_2) : tx' - tx = Ke^t$ avec $K \in \mathbb{R}$.
4. Résoudre l'équation (E_2) et en déduire les solutions de (E).

Solution On a $w' = x_1'x_2' + x_1x_2'' - x_1''x_2 - x_1'x_2' = x_1x_2'' - x_1''x_2$ et donc

$$\begin{aligned} tw' + (1 - 2t)w &= t(x_1x_2'' - x_1''x_2) + (1 - 2t)(x_1x_2' - x_1'x_2) \\ &= x_1(tx_2'' + (1 - 2t)x_2') - x_2(tx_1'' + (1 - 2t)x_1') \\ &= -x_1(t - 1)x_2 + x_2(t - 1)x_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cela montre que w est bien solution de l'équation (E_1). Celle-ci s'écrit encore $w' = (2 - 1/t)w$ qui a pour solution $w = Ke^{2t - \ln(t)} = Ke^{2t}/t$ avec $K \in \mathbb{R}$. On vérifie ensuite que

$$te^t + (1 - 2t)e^t + (t - 1)e^t = 0,$$

ce qui montre que $x_1 := e^t$ est bien solution de (E). On en déduit que si x_2 est une autre solution de (E), alors $e^t x_2' - e^t x_2 = Ke^{2t}/t$, c'est à dire $tx_2' - tx_2 = Ke^t$ et x_2' est donc solution de l'équation (E_2). Puisque l'équation homogène $x' - x = 0$ a pour solution générale $x = Le^t$ avec $L \in \mathbb{R}$, on fait varier la constante pour résoudre E_2. On pose donc $x = ye^t$ si bien que (E_2) devient $t(y'e^t + ye^t) - tye^t = Ke^t$, c'est à dire $ty' = K$. On a donc $y' = K/t$ et $y = K\ln(t) + L$ avec $L \in \mathbb{R}$. On remplace pour trouver $x = K\ln(t)e^t + Le^t$ qui est solution générale de (E_2) et donc aussi de (E).

Exercice 4.12 On remarque pour commencer que l'équation n'est définie que pour $t \in]0, +\infty[$. Résoudre l'équation différentielle $t^2x'' + 4tx' + 2x = \ln(t)$ par la méthode du wronskien en remarquant que $1/t^2$ est solution de l'équation homogène.

Solution Si x_1 et x_2 sont deux solutions de l'équation homogène et qu'on pose $w := x_1x_2' - x_2x_1'$, on vérifie facilement que $t^2w' + 4tw = 0$. Puisque $t \neq 0$, on a donc $w' = -\frac{4}{t}w$ si bien que $w = ke^{-4\ln(t)} = \frac{k}{t^4}$ avec $k \in \mathbb{R}$. D'autre part, on vérifie aussi aisément que $x_1 := \frac{1}{t^2}$ est solution de l'équation homogène et on a $x_1' = -\frac{2}{t^3}$. On en déduit alors que si x est solution de l'équation homogène si et seulement si $\frac{k}{t^4} = \frac{1}{t^2}x' + \frac{2}{t^3}x$, c'est à dire $x' = -\frac{2}{t}x + \frac{k}{t^2}$. La solution générale de l'équation homogène associée à cette nouvelle équation est $x = ke^{-2\ln(t)} = k/t^2$ et on fait varier la constante pour trouver une solution particulière. On pose donc $x = \frac{1}{t^2}y$ si bien que $x' = \dfrac{y't^2 - 2ty}{t^4}$ et on peut remplacer dans l'équation pour trouver

$$\frac{y't^2 - 2ty}{t^4} = -\frac{2}{t}\frac{1}{t^2}y + \frac{k}{t^2},$$

c'est à dire $y' = k$ et donc $y = kt + l$ avec $l \in \mathbb{R}$. On a donc trouvé la solution générale de l'équation homogène $x = \frac{1}{t^2}y = \frac{k}{t} + \frac{l}{t^2}$ avec $k, l \in \mathbb{R}$. Pour trouver les solutions de l'équation originale, on a plus qu'à faire varier la constante (de nouveau).