# 3.5 Exercices

## 3.5.1 Action de groupe

**Exercice 3.1** Soit $G$ un groupe topologique agissant sur un espace topologique $X$.
1. Montrer que si c'est une action par homéomorphismes, alors l'application quotient $p : X \twoheadrightarrow X/G$ est ouverte.
2. Montrer que si l'action est continue, alors c'est une action par homéomorphismes, et réciproquement lorsque $G$ est discret.

**Exercice 3.2** Montrer que si $H$ est un sous-groupe discret d'un groupe topologique $G$, alors l'action par translation à gauche de $H$ sur $G$ est topologiquement libre.

## 3.5.2 Revêtements

**Exercice 3.3** Montrer que la projection

$$p : C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1 \text{ ou } y = 0\} \twoheadrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x$$

est un homéomorphisme local mais n'est pas un revêtement.

**Exercice 3.4** 1. Décrire $p^{-1}(\mathbb{S} \smallsetminus \{1\})$ et $p^{-1}(\mathbb{S} \smallsetminus \{-1\})$ lorsque $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}, t \mapsto e^{2i\pi t}$ ou $p : \mathbb{S} \to \mathbb{S}, z \mapsto z^n$.
2. En déduire dans les deux cas que $p$ est un revêtement.
3. En déduire aussi que $\mathbb{R}^n$ est un revêtement de $\mathbb{T}^n$.

**Exercice 3.5** Montrer que l'application canonique $p : \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n$ est un revêtement de degré 2 et que pour tout $a \in \mathbb{S}^n$, $U(a) := \{x \in \mathbb{S}^n, \|x - a\| < \sqrt{2}\}$ est un feuillet.

**Exercice 3.6** Montrer que les applications $\exp : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}^\times$ et $\mathbb{C}^\times \twoheadrightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^n$ sont des revêtements.

## 3.5.3 Monodromie

**Exercice 3.7** 1. Monter que le revêtement $\mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}, t \mapsto e^{2i\pi t}$ provient [a] d'une action du groupe $\mathbb{Z}$ et en déduire le groupe fondamental de $\mathbb{S}$. Question analogue avec $\mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{T}^n$.
2. Montrer que le revêtement $p : \mathbb{S} \twoheadrightarrow \mathbb{S}, z \mapsto z^n$ provient d'une action du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et en déduire une suite exacte reliant le groupe fondamental de $\mathbb{S}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Montrer que le revêtement $\mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n$ provient d'une action du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et en déduire le groupe fondamental de $\mathbb{P}^n$ lorsque $n \geqslant 2$.

a. Un revêtement $p : X' \twoheadrightarrow X$ provient d'une action de groupes de $G$ sur $X'$ si $p$ induit un homéomorphisme $X'/G \simeq X$.

## 3.5.4 Revêtement universel

**Exercice 3.8** On identifie $\pi_1(\mathbb{S},1)$ avec $\mathbb{Z}$ via le degré et $\mu_n$ avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en faisant correspondre $e^{2ik\pi/n}$ et $k \mod n$. On considère le revêtement $p_n : \mathbb{S} \twoheadrightarrow \mathbb{S}, z \mapsto z^n$.

1. Identifier l'image de $p_{n*}$ avec un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
2. Montrer qu'il existe une application continue $f : (\mathbb{S},1) \to (\mathbb{S},1)$ telle que $p_m \circ f = p_n$ si et seulement si $m \mid n$.
3. Montrer que l'action de la monodromie de $\pi_1(\mathbb{S},1)$ sur $\mu_n$ est l'action naturelle de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

**Exercice 3.9** Montrer qu'un revêtement universel est connexe.

**Exercice 3.10** Quels sont les revêtements universels de $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{T}^n$ et $\mathbb{P}^n$ ?

**Exercice 3.11** Soit $f : X' \to X''$ un morphisme de revêtements de $X$.

1. Montrer que si $X$ est localement connexe et $f$ surjective, alors $f$ est un revêtement.
2. Montrer que si $X$ est localement connexe par arcs et $X''$ est connexe, alors $f$ est un revêtement.

**Exercice 3.12** Soit $p : Y \twoheadrightarrow X$ un revêtement.

1. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Aut}(Y/X)$ des automorphismes $g$ du revêtement est un sous-groupe de $\mathcal{S}(Y)$.
2. Montrer que si $Y$ est connexe et $g \in \mathrm{Aut}(Y/X)$ a un point fixe, alors $g = \mathrm{Id}_Y$.
3. Montrer que $p$ se factorise de manière unique par l'application quotient : $Y \twoheadrightarrow Y/\mathrm{Aut}(Y/X) \xrightarrow{\overline{p}} X$. Lorsque $\overline{p}$ est bijectif, on dit que $p$ est *galoisien*.
4. Montrer que si $Y$ est connexe et $p$ est galoisien, alors $\mathrm{Aut}(Y/X)$ agit de manière topologiquement libre sur $Y$.
5. Réciproquement, montrer que si un groupe $G$ agit de manière topologiquement libre sur $Y$ connexe, alors $Y \twoheadrightarrow Y/G$ est galoisien.