Outils Mathématiques 4
EXERCICES

Bernard Le Stum
Université de Rennes 1

Version du 1er avril 2009

1 Fonctions partielles. Courbes de niveau.

Exercice 1.1 *Trouver les fonctions partielles aux points* $(0,0)$ *et* $(1,2)$ *de*

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\quad g(x,y)=xy\quad \text{et}\quad h(x,y)=x^2y-1.$$

Exercice 1.2 *Trouver les courbes de niveaux* $k=0,1,-1,2,3$ *des fonctions*

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\quad \text{et}\quad g(x,y)=\frac{y}{x}.$$

Exercice 1.3 *Pour chacune des fonctions suivantes déterminer le domaine de définition* $\mathcal{D}_f$ *et tracer les courbes de niveau* k *pour les valeurs de* k *indiquées :*

$$f(x,y)=\frac{x^2+y}{x+y^2},\qquad k=0,-1$$

$$f(x,y)=\frac{xy-x+y}{xy},\qquad k=1,2$$

$$f(x,y)=\frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2},\qquad k=2$$

$$f(x,y)=x-y-|x-y|,\qquad k\in\mathbf{R}.$$

Pour la dernière question, traiter séparément $k=0$ *et* $k>0$ *et* $k<0$.

Exercice 1.4 *(a) Soit* $f(x,y)=x^2+y^2$. *Déterminer les courbes de niveaux* c *de* f *et l'intersection du graphe* $G(f)$ *de* f *avec le plan* $x0z$ *(d'équation* $y=0$*). Représenter graphiquement* $G(f)$.

(b) Soit $g(x,y)=x^2-y^2$. *Déterminer les courbes de niveaux* c *de* g *et l'intersection du graphe* $G(g)$ *de* g *avec les plan* yOz *(d'équation* $x=0$*) et* xOz *(d'équation)* $y=0$. *Représenter graphiquement* $G(g)$.

Exercice 1.5 *Associer un des graphes à la fonction* $z=f(x,y)$ *représentée par ses courbes de niveau*

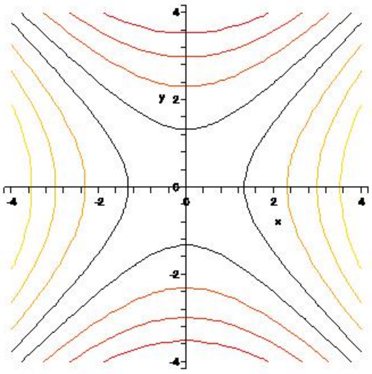
$$(1)\ z:=x^2-y^2,\quad (2)\ z=\frac{15x^2y^2e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2},\quad (3)\ z=\sin(x)+\sin(y)$$

$$(4)\ z=e^{-x^2}+e^{-4y^2},\quad (5)\ z=\sin(\sqrt{x^2+y^2})\quad \text{et}\quad (6)\ z=y^4-8y^2-4x^2.$$

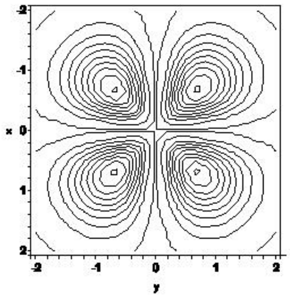
Exercices supplémentaires

Exercice 1.6 *Dessiner la surfaces* S *en déterminant les courbes de niveaux et l'intersection de* S *avec des plans appropriés dans les cas suivants :*

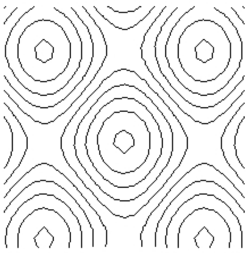
i) $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\quad x^2+4y^2+z^2=1\}$,



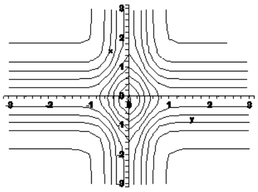
(1)



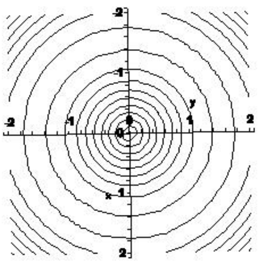
(2)



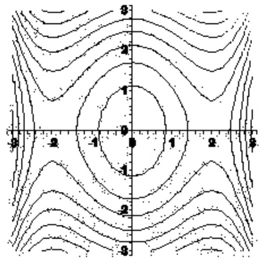
(3)



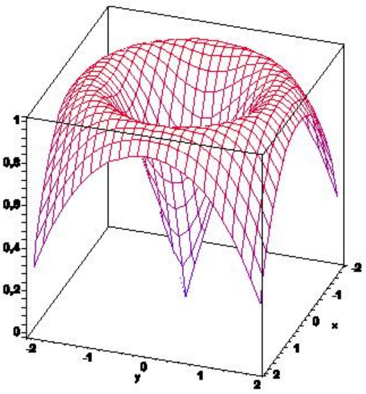
(4)



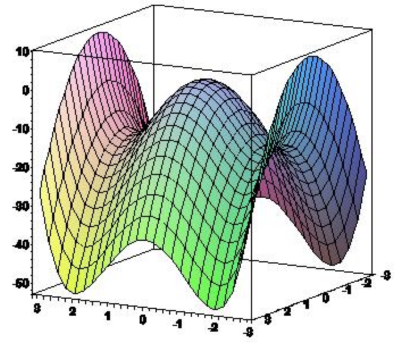
(5)



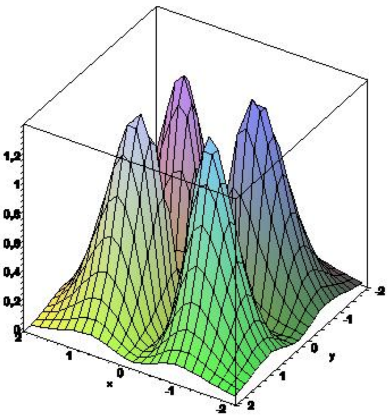
(6)



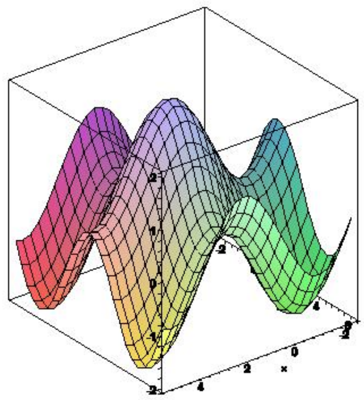
(a)



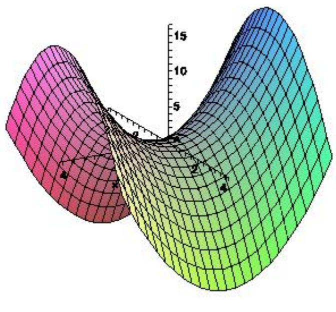
(b)



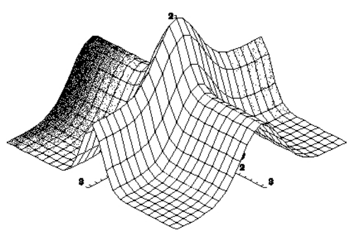
(c)



(d)



(e)



(f)

ii) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

Exercice 1.7 *Déterminer les courbes de niveaux du graphe G de $f(x, y) = xy$ et l'intersection de G avec les plans d'équations $y = x$ et $y = -x$. Représenter graphiquement G.*

Exercice 1.8 *Dessiner la surface $S \subset \mathbf{R}^3$ en déterminant les courbes de niveaux et l'intersection de S avec des plans appropriés pour*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad x^2 + y^2 - z^2 = -1\}.$$

2 Limites et continuité

Exercice 2.1 *Soit f la fonction définie par*

$$f(x,y) = \frac{2xy - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Étudier la limite quand (x,y) tend vers $(0,0)$ de la restriction de f à la droite d'équation $y = ax$ avec a donné. Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 2.2 *Soit f la fonction définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 - 2x^2y + 3y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

i) Étudier la limite quand (x,y) tend vers l'origine de la restriction de f à la droite d'équation $y = ax$, a donné. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.

ii) Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'equation $y = x^2$.

iii) Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 2.3 *Pour une fonction de deux variables on considère trois types de limites :*

$$(A) \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y); \quad (B) \lim_{x\to a} (\lim_{y\to b} f(x,y)); \quad (C) \lim_{y\to b} (\lim_{x\to a} f(x,y)).$$

On considère les fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f_3(x,y) = \frac{\sin x}{y}, \quad f_4(x,y) = \frac{\sin y}{x};$$

Montrer qu'en $(0,0)$,

i) Deux de ces trois limites peuvent exister sans que la troisième existe.

ii) Une de ces trois limites peut exister sans que les deux autres existent.

iii) (B) et (C) peuvent exister sans être égales.

Exercice 2.4 *Décider si les fonctions suivantes peuvent être prolongées par continuité au point P.*

i) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \quad P = (0,0),$

ii) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2 + xy} + 3, \quad P = (0,0),$

iii) $f(x,y) = \dfrac{x^3 + (y+1)^3}{x^2 + (y+1)^2}, \quad P = (0,-1),$

iv) $f(x,y) = \dfrac{(x-1)^2(y-2)-(y-2)^2(x-1)}{(x-1)^4+(y-2)^2}, \quad P=(1,2).$

Exercices supplémentaires

Exercice 2.5 *Étudier les limites suivantes :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-y^2}{x^2+y^2}.$$

Exercice 2.6 *Soit f la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y) = f(0,0) = \lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)$$

bien que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Exercice 2.7 *Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction de deux variables. Pour étudier la limite de $f(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers (a,b) je fixe x et je fais tendre y vers b, puis j'étudie la limite lorsque x tend vers a. Vrai ou faux ?*

Exercice 2.8 *Décider si les fonctions suivantes peuvent être prolongées par continuité au point P.*

i) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad P=(0,0),$

ii) $f(x,y) = \dfrac{x+5}{(x+5)^2+y^2} - 1, \quad P=(-5,0),$

iii) $f(x,y) = \dfrac{x^7+x^4y+x^3y}{x^6+x^3y+y^2}, \quad P=(0,0),$

iv) $f(x,y) = \dfrac{(x+1)^3(y+2)-(y+2)^3(x+1)}{(x+1)^2+(y+2)^2}, \quad P=(-1,-2),$

v) $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^4+y^2}, \quad P=(0,0).$

Exercice 2.9 *i) Étudier la continuité de la fonction suivante :*

$$f(x,y) = \begin{cases} y\sin\dfrac{x}{y}, & \text{si } y \neq 0; \\ 0, & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

ii) Décider si la fonction g suivante définie sur $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, y \neq 0\}$ peut être prolongée par continuité en une fonction continue définie sur $\mathbf{R}^2$:

$$g(x,y) = \frac{\sin(xy)}{y}, \text{ si } y \neq 0.$$

3 Différentiabilité

Exercice 3.1 *Soit* f *une fonction de* $\mathbf{R}^2$ *dans* $\mathbf{R}$ *définie par*

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad \text{pour} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Est-elle continue en $(0,0)$ *? Calculer les dérivées partielles. Est-elle de classe* $\mathcal{C}^1$ *?*

Exercice 3.2 *Soit* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) La fonction f *est-elle continue ?*

ii) La dérivée directionnelle $f_v(0,0)$ *existe-t-elle pour tout vecteur* $v = (a,b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *? En déduire que* f *n'est pas différentiable en* $(0,0)$.

iii) Calculer les dérivées partielles de f *en* $(0,0)$.

iv) Montrer en utilisant la définition de la différentiabilité d'une fonction que f *n'est pas différentiable en* $(0,0)$.

Exercice 3.3 *Soit l'application définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Montrer que f *est continue sur* $\mathbf{R}^2$.

ii) Montrer que f *possède en* $(0,0)$ *des dérivées partielles dans toutes les directions mais n'est pas différentiable en ce point.*

Exercice 3.4 *Calculer les dérivées partielles de la fonction*

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-xy}.$$

Montrer que f *est différentiable sur* $\mathbf{R}^2$.

Exercice 3.5 *Calculer les dérivées partielles de la fonction*

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}; (x,y) \in \mathbf{R} \setminus \{(0,0)\}.$$

Montrer que f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Trouver la dérivée directionnelle de* f *en* $(0,1)$ *dans la direction* $(1,1)$ *en utilisant*

i) La définition

ii) Le gradient de f

Exercice 3.6 *Soit f l'application définie par*

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{2x^3 + 3xy^2}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$. Calculer les dérivées directionnelles en $(0,0)$ dans toutes les directions, puis $\overrightarrow{\nabla} f(0,0)$. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 3.7 *Trouver la dérivée partielle de la fonction $f(x,y) = xy^2$ suivant le vecteur $\overrightarrow{v}(1,-2)$ au point $A(2,1)$.*

Exercice 3.8 *Trouver la dérivée partielle de $z = ye^x$ en $P = (0,3)$ suivant la direction*

i) $\theta = 30°$,

ii) $\theta = 120°$.

(On peut utiliser la formule : $\frac{dz}{dr} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin\theta$.)

Exercice 3.9 *On considère l'application définie sur $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}$: $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.*

i) Calculer les dérivées partielles premières de f.

ii) Déterminer la norme de $\nabla f(x,y)$. Montrer qu'elle est constante le long du cercle $x^2 + y^2 = r^2$, où r est un réel strictement positif fixé.

iii) Trouver le maximum de la dérivée directionnelle $f'_v(3,4)$ avec $\|v\| = 1$.

Exercice 3.10 *La puissance utilisée dans une résistance électrique est donnée par $P = E^2/R$ (en watts). Si $E = 200$ volts et $R = 8$ ohms, quelle est la modification de la puissance si E décroît de 5 volts et R de 0.2 ohms ?*

Exercice 3.11 *Soit la formule $R = E/C$. Trouver l'erreur maximale et le pourcentage d'erreur si $C = 20$ avec une erreur possible de $0,1$ et $E = 120$ avec une erreur possible de $0,05$.*

Exercice 3.12 *Soit $z = f(x,y)$ une fonction continue de x et y ayant les dérivées partielles $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ continues. Supposons que y soit une fonction dérivable de x. Alors, z est une fonction dérivable de x.*

i) Trouver $\dfrac{dz}{dx}$ avec $z = f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$, $y = e^{3x}$.

ii) Trouver $\dfrac{dz}{dx}$ et $\dfrac{dz}{dy}$ avec $z = f(x,y) = xy^2 + x^2y$, $y = \ln x$.

Exercice 3.13 *Soit* $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ *(le laplacien de f)*

i) Calculer Δf pour $f(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha$. Déterminer les valeurs de α telles que $\Delta f = 0$.

ii) Calculer Δf pour $f(x,y) = \ln\Big((x^2+y^2)^k\Big)$. Déterminer les valeurs de k telles que $\Delta f = 0$.

Exercice 3.14 *Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes en spécifiant le domaine de définition $\mathcal{D}$:*

i) $f(x,y) = y \ln x$,

ii) $g(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Le lemme de Schwarz s'applique-t-il sur D ?

Exercice 3.15 *Soit*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Calculer les dérivées partielles premières $f'_x(0,0)$ et $f'_y(0,0)$.

ii) Montrer que

$$f''_{xy}(0,0) = +1 \text{ et } f''_{yx}(0,0) = -1.$$

Pourquoi ceci ne contredit-il pas le lemme de Schwarz ?

Exercice 3.16 *Calculer* $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$ *et* $\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x \partial y^2}$ *où* $f(x,y) = y^3 \ln x$.

Exercice 3.17 *Soit l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par*

$$\begin{cases} f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Démontrer que f est différentiable en $(0,0)$. Calculer les dérivées partielles secondes en $(0,0)$. Conclusion ?

Exercices supplémentaires

Exercice 3.18 *Pour chaque application préciser l'existence et le calcul éventuel des dérivées partielles en tout point ; sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$?*

i) $\begin{cases} f(x,y) = x \text{ si } |x| > |y| \\ f(x,y) = y \text{ sinon} \end{cases}$

ii) $\begin{cases} f(x,y) = 1 - e^{1-(x^2+y^2)} \text{ lorsque } x^2+y^2 \geq 1 \\ f(x,y) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

iii) $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right) \text{ lorsque } xy \neq 0 \\ f(x,y) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Exercice 3.19 *Trouver* $\dfrac{dz}{dt}$ *lorsque* $z = x^2 + 3xy + 5y^2$, $x = \sin t$ *et* $y = \cos t$.

Exercice 3.20 *i) Soit* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *une application de classe* $\mathcal{C}^2$ *et* $F(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$. *Déterminer toutes les applications* f *telles que* $\Delta F = r$ *avec* $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

ii) Soit $g : (x,y) \mapsto g(x,y) = f(x^2-y^2, 2xy)$. *Exprimer les dérivées partielles de* g *en fonction de celles de* f

iii) On pose $\phi : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{cases}$ *et* $g = f \circ \phi$. *Exprimer le Laplacien de* g *en coordonnées polaires.*

Exercice 3.21 *Résoudre, à l'aide du changement de variables* $x = \dfrac{u^2+v^2}{2}$, $y = \dfrac{u}{v}$, *l'équation aux dérivées partielles :*

$$2xy\frac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Exercice 3.22 *Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de la fonction* f *au(x) point(s) donnés pour :*

i) $f(x,y) = y^2(x^3-1)$ *et le point* $(1,1)$;

ii) $f(x,y) = x^2 + y^2$ *et les points* $(0,0)$ *et* $(1,1)$. *Représenter graphiquement le graphe et les plans tangents.*

Exercice 3.23 *Soit* $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

i) Soit $P = (x_0, y_0, z_0)$ *un point de* S *tel que* $z_0 > 0$. *Exprimer* S *comme graphe d'une fonction dans un voisinage de* P. *Déterminer l'équation du plan tangent à* S *au point* P.

ii) Même question pour un P *qui vérifie* $x_0 < 0$.

iii) Montrer que le plan tangent vérifie dans les deux cas $x_0(x-x_0) + y_0(y-y_0) + z_0(z-z_0) = 0$.

Exercice 3.24 *Déterminer toutes les fonctions* f *telles que pour tout* $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, *on ait :*

i) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, *ii)* $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1,$

iii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y,$

iv) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1.$

Exercice 3.25 *On considère l'application définie sur une partie de* $\mathbf{R}^2$ *à valeurs dans* $\mathbf{R}$ *:*

$$f(x, y) = \sqrt{\ln(2x + 3y + 1)}.$$

i) Trouver le domaine de définition puis le domaine de continuité de f *(faire un dessin).*

ii) Calculer les dérivées partielles et trouver leurs domaines d'existence.

Exercice 3.26 *Calculer les dérivées partielles premières des fonctions données :*

i) $f_1(x, y) = 3xy + e^y,$

ii) $f_2(x, y) = y \sin(2xy + 1),$

iii) $f_3(x, y) = e^{\sin(2x) + xy},$

iv) $f_4(x, y) = \sqrt{x^2 + \cos y + 1},$

v) $f_5(x, y) = \ln(x^2 y^2).$

Exercice 3.27 *Soit*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & si (x, y) \neq (0, 0); \\ \\ 0, & \text{si}(x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

i) Déterminer la dérivée directionnelle $f_v(0, 0)$ *pour tout vecteur* $v = (a, b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$*.*

ii) Calculer les dérivées partielles de f *en* $(0, 0)$*.*

iii) Montrer en utilisant la définition de la dérivabilité d'une fonction que f *n'est pas différentiable en* $(0, 0)$*.*

Exercice 3.28 *Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes en spécifiant le domaine de définition :*

i) $f(x, y) = y^x,$

ii) $f(x, y) = \ln \frac{1}{x^2 + y^2}$ *;*

Le lemme de Schwarz s'applique-t-il sur le domaine de définition ?

4 Fonctions implicites

Exercice 4.1 *Soit* $f(x,y) = x^2 + 1 + xe^y - y$.

i) *Montrer qu'il existe une fonction* ϕ *telle que, dans un voisinage du point* $(0,1)$, *les relations* $f(x,y) = 0$ *et* $y = \phi(x)$ *soient équivalentes.*

ii) *Calculer* $\phi(0)$, $\phi'(0)$ *et* $\phi''(0)$.

iii) *Écrire le développement limité à l'ordre* 2 *de* ϕ *au voisinage de* 0.

iv) *Représenter* $\Gamma = \{(x,y) | f(x,y) = 0\}$ *au voisinage du point* $(0,1)$.

Exercice 4.2 *i)* *Montrer que l'équation* $y^3 + x + y = 0$ *définit une fonction implicite* $y = \phi(x)$ *au voisinage de l'origine* $(0,0)$.

ii) *Calculer* $\phi(0)$, $\phi'(0)$, $\phi''(0)$ *et* $\phi'''(0)$.

iii) *Écrire le développement limité à l'ordre* 3 *de* ϕ *au voisinage de* 0.

iv) *Représenter* $\Gamma = \{(x,y) | f(x,y) = 0\}$ *au voisinage du point* $(0,0)$.

Exercice 4.3 *On considère la fonction* $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *définie par* $F(x,y,z) = x^3z^2 - z^3xy$.

i) *Dire pourquoi il n'existe pas de fonction* $\phi(x,y)$ *définie dans un voisinage* U *de* $(0,0)$, *non-identiquement nulle, telle que* $\phi(0,0) = 1$ *et* $F(x,y,\phi(x,y)) = 0$ *pour tout* $(x,y) \in U$.

ii) *Montrer que l'équation* $F(x,y,z) = 0$ *définie une fonction implicite* $z = \psi(x,y)$ *au voisinage du point* $P_0 = (1,1,1)$. *Calculer les dérivées partielles premières de* ψ *en* P_0.

5 Développements limités

Exercice 5.1 *Écrire le développement limité à l'ordre 2 pour la fonction f au voisinage du point indiqué. En déduire l'équation du plan tangent.*

i) $f(x, y) = xy + x^2 + 4y^2$ *en* $(1, 2)$

ii) $f(x, y) = x^2y + 3xy + y^4$ *en* $(1, 2)$

iii) $f(x, y) = \ln(1 + 2x + 3y)$ *en* $(0, 0)$.

Exercice 5.2 *Soit* $f(x, y) = e^x \cos y$.

i) Trouver le développement limité d'ordre 0, 1 *et* 2 *de f au voisinage du point* $(0, \pi/3)$.

ii) En déduire des valeurs approchées de $f(-\frac{1}{10}, \frac{\pi}{3} + \frac{1}{50})$.

Exercices supplémentaires

Exercice 5.3 *Soit* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *la fonction définie par* $f(x, y) = x^2y + 3y - 2$.

i) Trouver le développement à l'ordre 2 *de* $f(x, y)$ *autour de* $(1, 2)$.

ii) Trouver l'équation du plan tangent au graphe de f en $(1, 2)$.

iii) Trouver les points du graphe de f qui admettent un plan tangent horizontal (c'est à dire parallèle au plan $x0y$).

iv) Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites que l'équation $f(x, y) = 0$ *peut être écrit (localement) comme* $y = \psi(x)$. *Plus précisément : Pour chaque* (x_0, y_0) *qui vérifie* $f(x_0, y_0) = 0$ *on peut trouver un voisinage V de x_0 et une fonction* $\psi : V \to \mathbf{R}$ *tel que*$f(x, \psi(x)) = 0$, *pour* $x \in V$.

Exercice 5.4 *i) Déterminer le développement limité à l'ordre* 2 *de la fonction* $g(x) = e^x$ *au voisinage du point* 1 *et de* $h(y) = \sin(y)$ *au voisinage de* π.

ii) En déduire le développement limité à l'ordre 2 *de la fonction* $f(x, y) = e^x \sin(y)$ *au voisinage du point* $P_0 = (1, \pi)$.

iii) Calculer $f(P_0)$, $f_x(P_0)$, $f_y(P_0)$, $f_{xx}(P_0)$, $f_{xy}(P_0)$ *et* $f_{yy}(P_0)$. *En déduire le développement limité à l'ordre* 2 *de* $f(x, y) = e^x \sin(y)$ *au voisinage de* P_0.

6 Formes différentielles et intégrales curvilignes

Exercice 6.1 *Déterminer si les formes différentielles suivantes sont des formes différentielles exactes (ou totales) ?*

i) $2(x+y)\mathrm{d}x + 2(x-3)\mathrm{d}y$

ii) $\cos(x)\mathrm{d}x + \sin(y)\mathrm{d}y$

iii) $(x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$

Exercice 6.2 *Montrer que l'expression*

$$\omega = \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + y\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

est la différentielle totale d'une fonction f que l'on déterminera.

Exercice 6.3 *Déterminer si les formes différentielles suivantes sont des formes différentielles totales ?*

i) $(\sin y - y\cos x)\mathrm{d}x + (x\cos y - \sin x)\mathrm{d}y$

ii) $(x^2 - yz)\mathrm{d}x + (y^2 - zx)\mathrm{d}y + (z^2 - xy)\mathrm{d}z$

Exercice 6.4 *On considère la forme différentielle*

$$\omega = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y.$$

Montrer en passant en coordonnées polaires que ω est est la forme différentielle totale d'une fonction $U(\rho,\theta)$ et donner l'équation des courbes $U = Cte$.

Exercice 6.5 *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int_C (x+y)\ \mathrm{d}x + (x-y)\ \mathrm{d}y$$

où C est l'arc de cercle défini par $x = \cos t$ et $y = \sin t$, t variant de 0 à 2π.

Exercice 6.6 *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int_C xy\ \mathrm{d}x + (x+y)\ \mathrm{d}y$$

où C est l'arc de cercle défini par $x = \cos t$ et $y = \sin t$, t variant de 0 à 2π.

Exercice 6.7 *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int_C \frac{(y+z)\ \mathrm{d}x + (z+x)\ \mathrm{d}y + (x+y)\ \mathrm{d}z}{x^2+y^2}$$

lorsque :

i) C *est le segment de droite allant de* $A = (1,1,1)$ *à* $B = (2,2,2)$.

ii) C *est l'hélice définie par* $x = \cos t$, $y = \sin t$ *et* $z = t$, t *variant de* 0 *à* 2π.

Exercice 6.8 *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int_\Gamma y^2 \, \mathrm{d}x - x^2 \, \mathrm{d}y$$

lorsque :

i) Γ *est le segment de droite allant de* $A = (1,0)$ *à* $B = (0,1)$.

ii) Γ *est l'arc de cercle de centre* $(0,0)$, *de rayon* 1 *et d'extrémités* $A = (1,0)$ *et* $B = (0,1)$.

Exercice 6.9 *i) Montrer que l'intégrale curviligne* $\int_\Gamma xy^2 \, \mathrm{d}x + x^2y \, \mathrm{d}y$ *est nulle lorsque* Γ *est un arc de simple fermé.*

ii) Calculer cette intégrale lorsque $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ *où* $\Gamma_1 = AB$ *est l'arc de parabole d'équation* $y^2 = 4 - 3x$ *limité en* A *par la droite d'équation* $y = x$ *et en* B *par l'axe des* $x \geq 0$, Γ_2 *est le segment de droite allant de* B *à* O *et* Γ_3 *est le segment de droite allant de* O *à* A.

iii) Calculer une primitive de $xy^2 \, \mathrm{d}x + x^2y \, \mathrm{d}y$.

iv) Retrouver $\int_{\Gamma_i} xy^2 \, \mathrm{d}x + x^2y \, \mathrm{d}y$ *pour* $i = 1,2,3$.

Exercice 6.10 *Déterminer une fonction* $u(x,y)$ *telle que* $\mathrm{d}u = \dfrac{(x+2y)\, \mathrm{d}x + y \, \mathrm{d}y}{(x+y)^2}$

Exercice 6.11 *Soit* $\omega = P(x,y) \, \mathrm{d}x + Q(x,y) \, \mathrm{d}y$ *avec*

$$P(x,y) = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 y} \qquad \text{et} \qquad Q(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2)}{xy^2}.$$

i) Montrer que, dans le domaine $D = \{(x,y); x > 0,\ y > 0\}$, ω *est une forme différentielle totale.*

ii) Déterminer u *dans* D, *telle que* $\mathrm{d}u = \omega$.

iii) Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \omega$ *lorsque* Γ *est l'arc défini par* $x = t + \cos^2 t$, $y = 1 + \sin^2 t$ *avec* $0 \leq t \leq 2\pi$.

7 Champs de vecteurs. Travail.

Exercice 7.1 *Soit f une fonction et $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs, tous deux de classe $\mathbf{C}^2$ dans un ouvert de l'espace. Le champ vectoriel* $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f + \mathrm{rot}\overrightarrow{V})$ *est égal à* $\mathrm{grad} f \wedge \overrightarrow{V}$, $\mathrm{rot}\ (\mathrm{rot}\overrightarrow{V})$ *ou* $\overrightarrow{0}$.

Exercice 7.2 *Pour le champ de vecteurs $\overrightarrow{B} = xy^2\overrightarrow{i} + 2x^2yz\overrightarrow{j} + 3yz^2\overrightarrow{k}$, trouver* $\mathrm{div}\overrightarrow{B}$ *et* $\mathrm{rot}\overrightarrow{B}$.

Exercice 7.3 *Déterminer si les champs suivants sont des champs de gradients, si oui déterminer leurs potentiels scalaires.*

i) $\overrightarrow{V}(x,y) = (y,x)$

ii) $\overrightarrow{V}(x,y) = (3x^2y + 2x + y^3, x^3 + 3xy^2 - 2y)$

iii) $\overrightarrow{V}(x,y) = (\cos x, \sin y)$.

Exercice 7.4 *A tout point M de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$, on associe le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}(M) = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$. En posant $\rho = \|\overrightarrow{OM}\|$, montrer que la divergence de ce champ de vecteurs est égale à $\dfrac{1}{\rho}$.*

Exercice 7.5 *Un champ central dans $\mathbf{R}^3$ est donné par $\overrightarrow{V}(\overrightarrow{x}) = f(r)\overrightarrow{x}$ où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ et f est une application dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradients et calculer son potentiel.*

Exercice 7.6 *Soit le champ de vecteurs défini dans $\mathbf{R}^3$ par*

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = (yz + x^2y^3, xz + x^3y^2, f(x,y))$$

où $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$. Trouver les applications f pour que $\overrightarrow{V}$ soit un champ de gradients. Calculer alors les potentiels de $\overrightarrow{V}$.

Exercice 7.7 *Déterminer si les champs suivants sont des champs de gradients, si oui déterminer leurs potentiels scalaires.*

i) $\overrightarrow{V}(x,y) = (y + \dfrac{1}{x}, x + \dfrac{1}{y})$

ii) $\overrightarrow{V}(x,y) = (x + y, x - y)$

iii) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$

Exercice 7.8 *i) Calculer le travail du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = (y^2, x^2)$ sur la demi ellipse*

$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \quad y \geq 0$$

parcourue une fois dans le sens direct.

ii) *Calculer le travail du champ de vecteurs* $\overrightarrow{V}(x, y) = (\cos(x), \sin(y))$ *sur le cercle unité parcouru deux fois dans le sens des aiguilles d'une montre.*

iii) *Calculer le travail du champ de vecteurs* $\overrightarrow{V}(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ *sur le triangle* OAB *avec* $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ *parcouru une fois dans le sens direct.*

Exercice 7.9 *Calculer le travail effectué par la force* $\overrightarrow{F} = (y + z)\overrightarrow{i} + (x + z)\overrightarrow{j} + (x + y)\overrightarrow{k}$ *pour déplacer une particule de l'origine* O *au point* $C = (1, 1, 1)$,

i) *le long de la droite* (OC).

ii) *le long de la courbe* $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$.

Même question pour la force $\overrightarrow{G} = (x + yz)\overrightarrow{i} + (y + xz)\overrightarrow{j} + (z + xy)\overrightarrow{k}$.

8 Intégrales doubles

Exercice 8.1 *Changer l'ordre d'intégration dans l'intégrale double :*

$$\int_0^4 (\int_{3x^2}^{12x} f(x,y)\ dy)\ dx$$

Exercice 8.2 *Changer l'ordre d'intégration dans l'intégrale double :*

$$\int_0^1 (\int_{2x}^{3x} f(x,y)\ dy)\ dx$$

Exercice 8.3 *Changer l'ordre d'intégration dans l'intégrale double :*

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} (\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\ dy)\ dx$$

Exercice 8.4 *Déterminer l'aire de la partie D du plan délimitée par les courbes d'équation :*

$$y = x, \quad y^2 = x.$$

Exercice 8.5 *Calculer $\int\int_D (x-y)\ dxdy$ où D est une partie du plan délimitée par les droites d'équation :*

$$x = 0, \quad y = x+2, \quad y = -x$$

Exercice 8.6 *Calculer $\int\int_D xy\ dxdy$ où D est la partie du plan délimitée par les courbes d'équation :*

$$y = x^2, \quad y = x^3.$$

Exercice 8.7 *Soit $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. La droite d'équation $y = x$ délimite dans les carré $[0,1]\times[0,1]$ deux triangles égaux T_1 et T_2. Montrer qu'en général,*

$$\int\int_{T_1} f(x,y)\ dxdy \neq \int\int_{T_2} f(x,y)\ dxdy.$$

Puis, en utilisant le changement de variable $u = y,\ v = x$, montrer que $\int\int_{T_1} xy\ dxdy = \int\int_{T_2} xy\ dxdy$.

Exercice 8.8 *Soit D le quart de disque unité défini par :*

$$D = \{(x,y)| \quad 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Utiliser le passage en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale :

$$I = \int\int_D (4 - x^2 - y^2)\ dxdy.$$

Exercice 8.9 *Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène.*

Exercice 8.10 *Déterminer le centre de gravité de la surface située à l'extérieur du cercle de rayon 1 et délimitée par la cardioïde* $\rho = 1 + \cos\theta$.

Exercice 8.11 *Soit* $I = \int\int_{T_a} \sqrt{xy}\ e^{-x-y}\ dxdy$ *avec* $T_a = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq a\}$ *et* $a > 0$. *Calculer* I *à l'aide du changement de variables*

$$\begin{cases} x = tu \\ y = (1 - t)u. \end{cases}$$

Exercice 8.12 *(Aire en coordonnées polaires) Soit* D *le domaine limité par* $r = p(\theta)$ *avec* $0 \leq \theta \leq 2\pi$ *et le segment*

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ p(0) \leq r \leq p(2\pi). \end{cases}$$

Montrer que l'aire de D *est égale à* $\mathcal{A}(D) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} p^2(\theta)\ d\theta$. *Trouver l'aire*

- *i) de la cardioïde* $r = a(1 + cos(\theta))$
- *ii) de l'escargot* $r = a\theta$, *(*$a > 0$*).*

Exercice 8.13 *Soit* $\mathcal{D}$ *le domaine limité par le cercle d'équation* $x^2 + y^2 - 2y = 0$ *parcouru dans le sens direct. Calculer à l'aide de la formule de Green-Riemann* $\int\int_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2)dxdy$

Exercice 8.14 *Calculer l'intégrale curviligne* I *le long de la courbe fermée* γ *constituée par les deux arcs de parabole* $y = x^2$ *et* $x = y^2$, *orientée dans le sens direct avec*

$$I = \int_\gamma (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy.$$

Vérifier le résultat en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 8.15 *Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale* $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$, *définie comme la limite* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} I_n$, *où* $I_n = \displaystyle\int_0^n e^{-x^2}dx$. *Pour* $n \in \mathbf{N}$, *considérons le quart de disque* $D_n = \{x^2 + y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ *et le carré :* $C_n = \{0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n\}$.

- *i) Calculer les intégrales* $J_n = \int\int_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ et $J_{2n} = \int\int_{D_{2n}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ *en utilisant le changement de variables en coordonnées polaires.*
- *ii) Considérons l'intégrale* $K_n = \int\int_{C_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$. *Montrer que* $K_n = I_n^2$.
- *iii) D'après un dessin de* D_n, C_n *et* D_{2n} *expliquer pourquoi* $J_n \leq K_n \leq J_{2n}$.
- *iv) Quelle est la limite* $n \to +\infty$ *de* J_n *et de* J_{2n} *? et de* K_n *? Trouver* I.

9 Intégrales triples

Exercice 9.1 *Calculer l'intégrale triple :*

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\ dz\ dy\ dx$$

Exercice 9.2 *Soit D le domaine $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+2y+z \leq 1\}$. Représenter graphiquement D. Calculer ensuite de deux manières différentes l'intégrale triple*

$$\iiint_D x\ dx\ dy\ dz$$

i) en intégrant « par piles »,

ii) en intégrant « par couches ».

Exercice 9.3 *Représenter graphiquement et calculer le volume limité par les surfaces de $\mathbf{R}^3$ d'équation $z = 2x^2 + y^2$ et $z = 4 - y^2$.*

Exercice 9.4 *Calculer l'intégrale triple :*

$$\int\int\int_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dx\ dy\ dz$$

où V est la boule de centre $(0,0,0)$ et de rayon R.

Exercice 9.5 *Calculer l'intégrale triple :*

$$\int\int\int_V (x+y+z)^2\ dx\ dy\ dz$$

où V est la partie commune au paraboloïde $\{2az \geq x^2+y^2\}$ et à la boule $\{3a^2 \geq x^2+y^2+z^2\}$.

Exercice 9.6 *Calculer l'intégrale triple :*

$$\int\int\int_V z\ dx\ dy\ dz$$

où V est le domaine limité par le demi l'ellipsoïde supérieur $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$ et par le plan d'équation $z = 0$.

Exercice 9.7 *Calculer l'intégrale triple :*

$$\int\int\int_V z\ dx\ dy\ dz$$

où V est le domaine limité par le cône d'équation $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ et le plan $z = h$.

Exercice 9.8 *Calculer l'intégrale triple :*

$$\int\int\int_V\ dx\ dy\ dz$$

où V est le domaine limité par la surface d'équations $x^2+y^2+z^2 = 2Rz$ et $x^2+y^2 = z^2$ et contenant le point $(0,0,R)$.