

## 4.5 Exercices

### 4.5.1 Algèbre linéaire

**Exercice 4.1** 1. Soit  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$  une suite exacte courte de groupes abéliens. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- il existe une *section* (un morphisme  $s : M'' \rightarrow M$  telle que  $p \circ s = \text{Id}_{M''}$ ),
- il existe une *rétraction* (un morphisme  $r : M \rightarrow M'$  telle que  $r \circ i = \text{Id}_{M'}$ ),

et qu'alors  $\text{Id}_M = i \circ r + s \circ p$ .

- On dit alors que la suite est *scindée*. Montrer que, dans ce cas,  $M \simeq M' \oplus M''$ .
- Montrer que si  $M''$  est libre alors la suite est toujours scindée.
- Montrer que si  $M'$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel, alors la suite est toujours scindée.
- Montrer que la suite  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$  est une suite exacte courte qui n'est pas scindée.

**Exercice 4.2** Calculer dans chaque cas l'homologie du complexe et vérifier le théorème du rang :

- $\mathbb{Z}e \xrightarrow{0} \mathbb{Z}v$  (concentré en degrés 0 et 1),
- $\mathbb{Z}\sigma \oplus \mathbb{Z}\tau \xrightarrow{d} \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c \xrightarrow{0} \mathbb{Z}v$  avec  $d(\sigma) = d(\tau) = a - c + b$  (concentré en degrés 0 et 1 et 2).

**Exercice 4.3** 1. Montrer que si  $f \sim g : C \rightarrow C'$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_n(f) = H_n(g)$ .

- En déduire que si  $f : C \sim C'$  est une équivalence d'homotopie, alors  $f$  est un quasi-isomorphisme.

**Exercice 4.4** Montrer le *lemme du serpent* : Si

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{j} & N & \xrightarrow{q} & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est un diagramme commutatif à lignes exactes, alors il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow \ker f' \rightarrow \ker f \rightarrow \ker f'' \rightarrow \text{coker } f' \rightarrow \text{coker } f \rightarrow \text{coker } f'' \rightarrow 0.$$

**Exercice 4.5** Montrer que si

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{p} & C'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & D' & \xrightarrow{j} & D & \xrightarrow{q} & D'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est un *morphisme de suites exactes courtes de complexes*, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_n(C) & \longrightarrow & H_n(C'') & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(C') & \longrightarrow & H_{n-1}(C) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_n(D) & \longrightarrow & H_n(D'') & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(D') & \longrightarrow & H_{n-1}(D) & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

est commutatif.

### 4.5.2 Ensemble semi-simplicial

- Exercice 4.6**
1. Représenter  $|\Delta^n|$  pour  $n = 0, 1, 2, 3$ .
  2. Quel est le nombre de faces de dimensions  $k$  dans  $|\Delta^n|$  ?
  3. Montrer que  $|\Delta^n| \simeq \mathbb{B}^n$  et que  $\partial|\Delta^n| \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ .

- Exercice 4.7**
1. Montrer qu'il existe une unique structure d'ensemble semi-simplicial telle que  $S_0 = \{v\}$ ,  $S_1 = \{e\}$  et  $S_n = \emptyset$  pour  $n \geq 2$ . Calculer  $H_n(S)$ . Vérifier la formule d'Euler-Poincaré.
  2. On pose  $S_0 = \{v\}$ ,  $S_1 = \{a, b, c\}$ ,  $S_2 = \{\sigma, \tau\}$  et

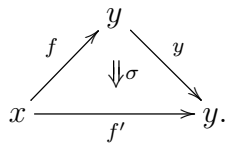
$$d_0^2(\sigma) = b, d_1^2(\sigma) = c, d_2^2(\sigma) = a \quad \text{et} \quad d_0^2(\tau) = a, d_1^2(\tau) = c, d_2^2(\tau) = b.$$

Calculer  $H_n(S)$ . Vérifier la formule d'Euler-Poincaré.

### 4.5.3 Homologie singulière

- Exercice 4.8** Montrer (par un calcul) qu'un point est acyclique.

- Exercice 4.9** Soient  $X$  un espace topologique et  $f, f' \in S_1(X)$  avec  $d_0^1(f) = d_0^1(f') = y$  et  $d_1^1(f) = d_1^1(f') = x$ . On dit que  $\sigma \in S_2(X)$  est une *homotopie* entre  $f$  et  $f'$  si  $d_0^2(\sigma) = y$ ,  $d_1^2(\sigma) = f'$  et  $d_2^2(\sigma) = f$  :



On considère les applications

$$\pi_1 : [0, 1] \rightarrow \Delta_1, t \rightarrow (1-t, t), \quad \pi_2 : [0, 1]^2 \rightarrow \Delta_2, (t, s) \rightarrow (1-t, (1-s)t, ts).$$

Montrer que  $\sigma$  est une homotopie entre  $f$  et  $f'$  si et seulement si  $h := \sigma \circ \pi_2$  est une homotopie à extrémités fixées entre  $\gamma := f \circ \pi_1$  et  $\gamma' := f' \circ \pi_1$ .

- Exercice 4.10** Soit  $X = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .
1. Calculer  $H_n(X)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  2. On pose  $Y = X \setminus \{\pm i\}$ . Calculer  $H_n(Y)$  pour tout  $n \leq 1$ .
  3. On pose  $Z = X \setminus \{\pm i, \pm 2i\}$ . Calculer  $H_n(Z)$  pour tout  $n \leq 1$ .

#### 4.5.4 Homologie singulière (suite)

**Exercice 4.11** 1. Montrer que si, pour  $i = 1, 2$ ,  $(X_i, x_i)$  est un espace pointé tel que  $x_i$  est un rétract par déformation d'un ouvert de  $X_i$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\tilde{H}_n(X_1 \vee X_2) \simeq \tilde{H}_n(X_1) \oplus \tilde{H}_n(X_2).$$

2. En déduire  $H_n(\mathbb{S} \vee \mathbb{S})$ .

**Exercice 4.12** 1. Calculer  $H_n(\mathbb{S} \setminus \{1\} \times \mathbb{S})$ ,  $H_n(\mathbb{S} \setminus \{-1\} \times \mathbb{S})$  et  $H_n(\mathbb{S} \setminus \{1, -1\} \times \mathbb{S})$ .

2. En déduire  $H_n(\mathbb{T}^2)$ .

**Exercice 4.13** Calculer  $H_k(\mathbb{P}^n)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $n \leq 3$ . On admettra (ou on montrera) que  $\mathbb{P}^n = X_1 \cup X_2$  avec  $X_1, X_2$  ouverts dans  $\mathbb{P}^n$ ,  $X_1 \simeq \mathring{\mathbb{B}}^n$ ,  $X_2 \simeq \mathbb{P}^n \setminus \{0\}$  et que l'inclusion  $X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2$  s'identifie à homotopie près avec la projection  $\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ .

**Exercice 4.14** Montrer que pour deux espaces vectoriels normés de dimension finie, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. être isomorphes,
2. être homéomorphes,
3. avoir même type d'homotopie,
4. avoir même dimension.