Prénom Nom : **Groupe :**

Université de Rennes 2025-2026

Outils mathématiques 2
Contrôle du vendredi 13 mars 2026
Début 14h - Durée 45mn

Mis à part le formulaire sur les développements limités, la consultation de document et l'utilisation d'outil électronique sont prohibées (passez votre téléphone en mode avion).

1. (10 points) Donner s'ils existent et *sans aucune justification* les développements limités suivants en $x = 0$ à l'ordre 3 :

   (a) (1 point) $2\ln(1+x) =$

   Solution: $2\ln(1+x) = 2x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$

   (b) (1 point) $\ln(1+2x) =$

   Solution: $\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$

   (c) (2 points) $\ln(2+x) =$

   Solution: $\ln(2+x) = \ln(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$

   (d) (2 points) $\ln((1+x)^2) =$

   Solution: $\ln((1+x)^2) = 2x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$

   (e) (2 points) $(\ln(1+x))^2 =$

   Solution: $(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + o(x^3)$

   (f) (2 points) $\ln(\sqrt{1+x}) =$

   Solution: $\ln(\sqrt{1+x}) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

2. (5 points) Calculer

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{1-\cos(2x)}$,

Solution: On a $\ln((\cos(x)) = \ln((1+(1-\cos(x)) = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $1-\cos(2x) = 2x^2 + o(x^2)$. Par conséquent,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x)}{1-\cos(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{4}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)\ln(1+\ln(1+x))$.

Solution: On a $\ln(1+x) = x + o(x)$. De la même identité, on déduit $\ln(1+\ln(1+x)) = x + o(x)$. On a alors

$$\lim_{x\to 0} \ln(x)\ln(1+\ln(1+x)) = \lim_{x\to 0} \ln(x)x = 0.$$

3. (5 points) (a) À quelle condition le système $\left\{\begin{aligned} x-4y+7z&=a\\ 3y-5z&=b\\ -2x+5y-9z&=c\end{aligned}\right.$ admet-il des solutions ?

Solution: On fait $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$\left\{\begin{aligned} x-4y+7z&=a\\ 3y-5z&=b\\ -2x+5y-9z&=c\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x-4y+7z&=a\\ 3y-5z&=b\\ -3y+5z&=c+2a\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-4y+7z=a\\ 3y-5z=b\\ 0=2a+b+c\end{array}\right. .$$

Le système admet donc des solutions si et seulement si $2a+b+c=0$.

(b) Déterminer l'intersection des deux plans d'équations $2x+3y-z+2=0$ et $x+y-2z+5=0$.

Solution: On fait $L_1 \leftrightarrow L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et on pose $z=t$:

$$\left\{\begin{aligned} x+y-2z&=-5\\ 2x+3y-z&=-2\end{aligned}\right. \qquad \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x+y-2z&=-5\\ y+3z&=8\end{aligned}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-5-y+2z=-13+5z\\ y=8-3z\end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-13+5t\\ y=8-3t\\ z=t\end{array}\right.$$

On en déduit que les deux plans sont sécants selon la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $(-13;8;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(5;-3;1)$.