Prénom NOM : Groupe :

Université de Rennes 2024-2025

Algèbre et arithmétique 1
Contrôle du mercredi 6 novembre 2024
Début 16h45 - Durée 1h

La consultation de document et l'utilisation d'outil électronique sont prohibées (passez votre téléphone en mode avion). Il va de soi que, sauf mention explicite du contraire, toute affirmation doit être justifiée et tout énoncé doit être démontré ; et la rédaction doit *impérativement* être soignée. N'oubliez pas d'inscrire votre nom en tête de copie.

1. (5 points) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 4z + (7 + 4i) = 0.$$

Solution: Le discriminant est

$$\Delta = 4^2 - 4(7 + 4i) = 16 - 28 - 16i = -12 - 16i.$$

On cherche $a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $(a + ib)^2 = -12 - 16i$. On a

$$(a + ib)^2 = -12 - 12i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 &= -12 \\ 2ab &= -16 \\ a^2 + b^2 &= 20 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a^2 &= 8 \\ ab &= -8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |a| &= 2 \\ |b| &= 4 \\ ab &= -8. \end{cases}$$

Les racines Δ sont donc $2 - 4i$ et $-2 + 4i$. Ainsi, les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{4 + 2 - 4i}{2} = 3 - 2i$$

et

$$z_2 = \frac{4 - 2 + 4i}{2} = 1 + 2i.$$

2. (5 points) Déterminer la forme complexe puis les invariants géométriques de la similitude directe qui transforme M en N et N en P avec

$$M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad N\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad P\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}.$$

Solution: On cherche une transformation de la forme $z' = \alpha z + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $\alpha \neq 0$. Puisque les points M, N, P ont pour affixes respectifs $1+i, -i, 3$, on résout donc le système

$$\begin{cases} -i &= (1+i)\alpha + \beta \\ 3 &= -i\alpha + \beta. \end{cases}$$

En soustrayant la seconde équation à la première, on trouve $-3 - i = (1+2i)\alpha$. On en déduit donc que

$$\alpha = \frac{-3-i}{1+2i} == \frac{(-3-i)(1-2i)}{5} = \frac{-5+5i}{5} = -1+i,$$

puis que $\beta = 3 + i\alpha = 3 + i(-1+i) = 2 - i$. On a donc trouvé la forme complexe

$$z' = (-1+i)z + 2 - i.$$

On en déduit immédiatement que le rapport de similitude est $k := |-1+i| = \sqrt{2}$, que l'angle est $\theta := \arg(1-i) = 3\pi/4 \mod 2\pi$ et enfin que le centre Ω a pour affixe

$$\omega := \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{2-i}{1-(-1+i)} = 1$$

si bien que $\Omega\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

3. (5 points) Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ des propositions. La proposition

$$(\star) \qquad \underbrace{\Big(\big(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}\big) \text{ et } \big(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}\big) \text{ et } \big((\mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R}) \Rightarrow \mathcal{S}\big)\Big)}_{\mathcal{T}} \iff \big(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{S}\big)$$

est-elle une tautologie ?

Solution: Supposons que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ sont vraies mais que $\mathcal{Q}$ est fausse. Alors, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est fausse si bien que $\mathcal{T}$ est fausse. Or $P \Rightarrow \mathcal{S}$ est vraie si bien que $(\star)$ est fausse. Ce n'est donc pas une tautologie.

On peut aussi tracer tout le tableau de vérité :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$	$(\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}) \Rightarrow \mathcal{S}$	$\mathcal{T}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{S}$	$\star$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
V	V	F	F	F	V	F	V	F	F	V
V	F	V	V	F	F	V	V	F	V	F
V	F	V	F	F	F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F
V	F	F	F	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F	F	V	F
F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V

4. (5 points) Expliciter la négation de l'assertion suivante et décider de sa validité (par une démonstration) :

$$\exists \ell \in \mathbb{R}_{>0}, \forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists M \in \mathbb{R}_{>0}, \forall x \in \mathbb{R}_{>0}, x \geq M \Rightarrow |x - \ell| \leq \epsilon.$$

Solution: On commence par expliciter la négation :

$$\forall \ell \in \mathbb{R}_{>0}, \exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall M \in \mathbb{R}_{>0}, \exists x \in \mathbb{R}_{>0}, x \geq M \text{ et } |x - \ell| > \epsilon.$$

On montre ensuite que l'assertion originale est fausse (en montrant que sa négation est vraie) :
Soit $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$. (Posons $\epsilon = 1$.) Soit $M \in \mathbb{R}_{>0}$. Posons $x = M + \ell + 1$. On a bien $x \geq M$ mais

$$|x - \ell| = M + 1 > 1 \ (= \epsilon).$$