Cohomologie rigide et espaces adiques
(Caen – 2018)

Bernard Le Stum

Université de Rennes 1

1er avril 2018

Sommaire

Cohomologie rigide

La *cohomologie rigide* de Berthelot ([LeS07]) est une famille de foncteurs

$$X/k \mapsto H^i_{\mathrm{rig}}(X/K),$$

- X : une variété algébrique sur un corps k (de caractéristique $p > 0$),
- K : un corps complet non archimédien (de caractéristique 0) de corps résiduel k,
- $H^i_{\mathrm{rig}}(X/K)$: un espace vectoriel sur K.

Remarque : Le choix de K dépend de k. Si on veut travailler au dessus de $k((t))$ par exemple, il faut alors remplacer K par l'*anneau d'Amice*

$$\mathcal{E} := \left\{ \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i t^i, \quad |a_i| << +\infty \; si \; i \to +\infty \; et \; |a_i| \to 0 \; si \; i \to -\infty \right\}$$

qui est un corps complet non archimédien de corps résiduel $k((t))$ (on y reviendra plus tard).

Construction

- $\mathcal{V}$: l'anneau des entiers de K,
- $X \hookrightarrow P$: un plongement dans un $\mathcal{V}$-schéma formel p-adique localement de présentation finie (par exemple $P = \widehat{\mathbb{P}}^N_{\mathcal{V}}$ si X est quasi-projective),
- P_K : la fibre générique de P ($\mathbb{P}^{N,\mathrm{rig}}_K$ dans notre exemple),
- $]X[$: le tube de X dans P – voir plus loin,
- $]\overline{X}[$: le tube de sa clôture si bien que $]X[\subset]\overline{X}[\subset P_K$,
- $j^\dagger := \varinjlim j_{\eta*}j_\eta^{-1}$ où $j_\eta \colon V_\eta \hookrightarrow]\overline{X}[$ parcourt les inclusions de voisinages stricts de $]X[$.

Alors

$$H^i_{\mathrm{rig}}(X) := H^i\left(]\overline{X}[, j^\dagger \Omega^\bullet_{]\overline{X}[}\right)$$

est bien défini (ne dépend *pas* du plongement $X \hookrightarrow P$) si P est propre et lisse au voisinage de X, et fonctoriel en X.

Le théorème de fibration fort

La cohomologie rigide est bien définie (et fonctorielle) grâce à :

Théorème (Berthelot 1983, [Ber96])

Si X est plongé simultanément dans P et dans Q et si $u\colon Q \to P$ est un morphisme propre et lisse au voisinage de X, alors, localement sur X et P, u induit un isomorphisme entre les tubes de X dans Q_K et dans $P_K \times \mathbb{P}^{n,\mathrm{an}}_K$ (via la section nulle) qui se prolonge sur des voisinages stricts.

Exemple

Si $\mathbb{A}^1_k \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathcal{V}}$ est le plongement canonique, $\mathbb{A}^1_k \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathcal{V}}$ est le plongement diagonal et $u : \mathbb{A}^2_{\mathcal{V}} \to \mathbb{A}^1_{\mathcal{V}}$ est la première projection, on a

$$\begin{array}{ccc}
\{(x,y), |x|, |y| \leq 1, |x-y| < 1\} & \xrightarrow{\simeq} & \{(x,y), |x| \leq 1, |y| < 1\} \\
\cap & & \cap \\
\mathbb{D}^2_K(0,\lambda^+) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{D}_K(0,\lambda^+) \times \mathbb{D}_K(0,\lambda^+) \\
(x,y) & \longrightarrow & (x, y-x).
\end{array}$$

Sur l'anneau de Robba borné

Lazda et Pál ont affiné la théorie ([LP16]) en définissant

$$X/k((t)) \mapsto H^i_{\mathrm{rig}}(X/\mathcal{E}^\dagger),$$

- X : une variété algébrique sur $k((t))$ (k supposé parfait),
- $\mathcal{E}^\dagger := \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i \in \mathcal{E}, \exists \eta < 1, \eta^i |a_i| \to 0 \right\}$: l'*anneau de Robba borné* de K,
- $H^i_{\mathrm{rig}}(X/\mathcal{E}^\dagger)$: un espace vectoriel sur $\mathcal{E}^\dagger$,

de telle sorte que l'on retrouve la cohomologie de Berthelot par extension des scalaires :

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} H^i_{\mathrm{rig}}(X/\mathcal{E}^\dagger) \simeq H^i_{\mathrm{rig}}(X/\mathcal{E}).$$

Cohomologie relative

Berthelot a aussi défini une cohomologie relative $H^i_{\mathrm{rig}}(X/S)$,

- X : une variété algébrique sur S_k,
- S : un schéma formel p-adique localement de présentation finie,
- $H^i_{\mathrm{rig}}(X/S)$: un faisceau de $\mathcal{O}_{S_K}$-modules.

Cela se généralise aisément à $H^i_{\mathrm{rig}}(X/(C,O))$ (le cas précédent étant $(C,O) = (S_k, S_K)$)

- X : une variété algébrique au dessus de C,
- C : une variété algébrique sur k,
- $C \hookrightarrow S$: un plongement dans S,
- $O \to S_K$: un morphisme de variétés analytiques,
- $H^i_{\mathrm{rig}}(X/(C,O))$: un faisceau de $j^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{C}[}$-modules.

Lien avec Lazda-Pál

Considérons le cas

- $C = \mathrm{Spec}(k((t)))$, plongé dans
- $S = \mathrm{Spf}(\mathcal{V}[[t]])$ (avec la topologie p-adique),
- $O = S_K$ (le « disque unité borné »)

Dans cette situation, on s'attend à $j^\dagger \mathcal{O}_{]\overline{C}[} = j_* \mathcal{E}^\dagger$ et

$$H^i_{\mathrm{rig}}(X/\mathcal{E}^\dagger) = H^i_{\mathrm{rig}}(X/(C, O)).$$

Cependant, $\mathcal{V}[[t]]$ n'est pas de présentation finie (pour la topologie p-adique). Il n'existe donc pas de fibre générique au sens des espaces rigides. Il est alors nécessaire de passer par les espaces adiques de Huber (ou Berkovich ou Raynaud). On peut voir par exemple que $]C[$ n'a pas de point classique du tout.

Voyons un peu ce qui se passe du coté des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques :

L'approche de Caro-Vauclair

Si $\mathfrak{a} \subset R$ est un idéal, on note $\mathfrak{a}^{(p)}$ l'idéal engendré par $\{f^p, f \in \mathfrak{a}\}$. Un morphisme de schémas formels $P \to S$ est *p-non-ramifié* (resp. *p-lisse*, resp. *p-étale*) si tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] & S \\
\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{a}) \arrow[u] \arrow[r, hook] & \mathrm{Spec}(R) \arrow[u] \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd},$$

avec $\mathfrak{a}^{(p)} = 0$ se prolonge d'au plus (resp. d'au moins, resp. d'une seule) manière. Le morphisme est *différentiellement p-lisse* s'il admet localement un morphisme p-étale $P \to \mathbb{A}^N_S$. Par exemple, $\mathcal{V}[[t]]$ est différentiellement p-lisse (sur $\mathcal{V}$) pour la topologie p-adique.

Caro et Vauclair ont prolongé la théorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques de Berthelot au cas des schémas formels (logarithmiques) *p-adiques* différentiellement p-lisses (et localement noethériens).

L'approche de Crew

Un morphisme de schémas formels localement noethériens $u : P \to S$ est *universellement localement noethérien* si, pour tout diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r] \arrow[d] & S' \arrow[d] \\ P \arrow[r] & S \end{tikzcd},$$

avec S' localement noethérien, on a aussi P' localement noethérien. Par exemple, $\mathcal{V}[[t]]$ n'est pas universellement localement noethérien sur $\mathcal{V}$ pour la topologie p-adique. Il l'est par contre pour la topologie (p, t)-adique.

Crew prolonge la théorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques au cas des schémas formels universellement localement noethériens (au dessus d'un schéma formel localement noethérien S).

Cette démarche est en quelque sorte orthogonale à celle de Caro et Vauclair (qui ne considèrent que la topologie p-adique).

Spectre formel

Définition

Un anneau topologique A est *(pré) adique* s'il existe un idéal (*de définition*) de type fini I tels que les I^n forment un système de voisinages de zéro (on peut remplacer A par son complété $\widehat{A}$).

On pose alors

$$P := \mathrm{Spf}(A) = \{\textit{idéaux premiers ouverts} \subset A\}.$$

Pour $f \in A$ et $\mathfrak{p} \in P$, on désigne par $f(\mathfrak{p})$ l'image de f dans $k(\mathfrak{p}) := \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$. Alors, une base de la topologie de P est donnée par

$$D(f) = \{\mathfrak{p} \in P \colon f(\mathfrak{p}) \neq 0\}$$

et le faisceau structural est défini par

$$\mathcal{O}_P : D(f) \mapsto \widehat{A[1/f]}.$$

Schéma formel

Définition

Un *schéma formel* adique est un espace localement topologiquement annelé P localement de la forme $\mathrm{Spf}(A)$ avec A noethérien (on dira schéma *usuel* si A est muni de la topologie *discrète* si bien que $\mathrm{Spf}(A) = \mathrm{Spec}(A)$).

Exemple

Si S est un schéma formel adique, on peut considérer

1. $\mathbb{A}^n_S = \underbrace{\mathbb{A} \times \cdots \times \mathbb{A}}_{n \text{ fois}} \times S$ avec $\mathbb{A} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T])$.
2. $\mathbb{P}^n_S = \mathbb{P}^n \times S$ avec $\mathbb{P}^n = \mathrm{Proj}(\mathbb{Z}[T_0, \ldots, T_n])$.
3. $\mathbb{A}^{-,n}_S = \underbrace{\mathbb{A}^- \times \cdots \times \mathbb{A}^-}_{n \text{ fois}} \times S$ avec $\mathbb{A}^- = \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}[T]) = \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}[[T]])$ (topologie T-adique).
4. $\mathbb{A}^{\mathrm{b},n}_S = \mathrm{Spf}(A[[T_1, \ldots, T_n]])$ ($S = \mathrm{Spf}(A)$, topologie I-adique).

Anneau de Huber

Définition

Un anneau topologique A est un *anneau de Huber* s'il possède un sous-anneau ouvert (*de définition*) A_0 qui est adique. On désigne par A° (resp. $A^{\circ\circ}$) l'union de tous les anneaux (resp. idéaux) de définition. Une *paire de Huber* (A, A^+) est composée d'un anneau de Huber A et d'une partie $A^+ \subset A^\circ$ (on peut remplacer A^+ par le plus petit sous-anneau ouvert intégralement clos $\overline{A}^+$ qui le contient).

Exemple

1. Si A est un anneau π-adique (π non diviseur de zéro), alors $(A[1/\pi], A)$ est une paire de Huber.
2. Si $\mathcal{V}$ est n'importe quel anneau de valuation d'un corps non archimédien K, alors K est un anneau de Huber et $(K, \mathcal{V})$ est une paire de Huber (avec $\mathcal{V}$ *non* noethérien même si K° est un AVD).
3. Si A est un anneau de Huber, alors (A, A°) et $(A, 0)$ sont des paires de Huber.

Valuation

Définition

Une *valuation* sur un anneau A est une application $v\colon A \to G \cup \{+\infty\}$, où G est un groupe abélien totalement ordonné, telle que

1. $v(0) = +\infty$ et $v(1) = 0$,
2. $v(f+g) \geq \min(v(f), v(g))$,
3. $v(fg) = v(f) + v(g)$.

Exemple

1. Les valuations *triviales* ($G = \{0\}$) sont paramétrées par $\mathrm{Spec}(A)$:

$$v_{\mathfrak{p}}(f) = 0 \Leftrightarrow f(\mathfrak{p}) \neq 0 \quad \text{et} \quad v_{\mathfrak{p}}(f) = +\infty \Leftrightarrow f(\mathfrak{p}) = 0.$$

2. Les valuations sur un corps K correspondent aux valeurs absolues ultramétriques (de hauteur quelconque) via $|a| = e^{-v(a)}$ et $v(a) = -\ln(|a|)$.

D'autres exemples

1. Si v est une valuation sur A, alors la *valuation de Gauss* sur $A[T]$ est définie pour $F := \sum_{i=0}^{d} f_i T^i \in A[T]$ par

$$v(F) = \min_{i=0}^{d} v(f_i) \in G \cup \{+\infty\}$$

   (même hauteur, i.e. même groupe).

2. On peut définir des valuations de hauteur supérieure en posant

$$v^{-}(F) = \left(v(F), \min_{v(F)=v(f_i)} i \right) \in (G \times \mathbb{Z}) \cup \{+\infty\} \quad \textit{ou}$$

$$v^{+}(F) = \left(v(F), -\max_{v(F)=v(f_i)} i \right) \in (G \times \mathbb{Z}) \cup \{+\infty\},$$

   où $G \times \mathbb{Z}$ est muni de l'ordre lexicographique.

Spectre valuatif

Si (A, A^+) est une paire de Huber, on définit

$$V := \mathrm{Spa}(A, A^+) = \{\textit{val. cont. sur } A \textit{ et } \geq 0 \textit{ sur } A^+\}/\equiv,$$

où $v \equiv w \Leftrightarrow (v(f) \leq v(g) \Leftrightarrow w(f) \leq w(g))$.

Une base d'ouverts est donnée par les $R(f_1, \ldots, f_r, g) =$

$$\{v \colon \forall i = 1, \ldots, n, v(f_1), \ldots, v(f_r) \geq v(g) \neq +\infty\}$$

où $(f_1, \ldots, f_r)$ est un idéal ouvert. Le (pré) faisceau structural est défini par

$$\mathcal{O}_V \colon R(f_1, \ldots, f_r, g) \mapsto \widehat{A[1/g]},$$

où $A[1/g]$ est vu comme anneau de Huber pour l'anneau de définition $A_0[f_1/g, \ldots, f_r/g]$. Il est pratique de poser

$$\mathrm{Spa}(A) := \mathrm{Spa}(A, A^\circ) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Spv}(A) := \mathrm{Spa}(A, 0) \ (\textit{si } A \textit{ est discret}).$$

Exemple : $\mathrm{Spv}(\mathbb{Z})$

Si $n \in \mathbb{Z}$ et p est un nombre premier ou $p = 0$, on pose

$$p(n) = \begin{cases} 0 & \textit{if } \ p \nmid n \\ +\infty & \textit{if } \ p \mid n \end{cases} .$$

Si p est un nombre premier, on désigne aussi par v_p la valuation p-adique. On a alors

$$\mathrm{Spv}(\mathbb{Z}) = \{0, v_p \ \textit{pour} \ p \ \textit{premier}, p \ \textit{pour} \ p \ \textit{premier}\},$$

et les ouverts non vides sont les intersections finies de

$$\mathrm{Spv}(\mathbb{Z}) \setminus \{p\} \simeq \mathrm{Spv}(\mathbb{Z}[1/p]) \ \textit{et} \ \mathrm{Spv}(\mathbb{Z}) \setminus \{v_p, p\} \simeq \mathrm{Spa}(\mathbb{Z}[1/p]).$$

On remarquera que 0 est l'unique point générique et que les points fermés sont les $p \neq 0$ (les v_p se trouvant au milieu).

Espace adique

Définition

Un *espace adique* est un espace topologiquement annelé valué V localement de la forme $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ avec A_0 noethérien et A de type fini sur A_0.

Il existe un foncteur $X \mapsto X^{\mathrm{val}}$ (resp. $P \mapsto P^{\mathrm{ad}}$) de la catégorie des schémas usuels (resp. des schémas formels) vers celle des espaces adiques donné localement par

$$\mathrm{Spec}(A) \mapsto \mathrm{Spv}(A) \quad (\textit{resp.}\ \mathrm{Spf}(A) \mapsto \mathrm{Spa}(A)).$$

Exemple

Soit O un espace adique.

1. $\mathbb{A}^n_O = \mathbb{A}^{n,\mathrm{val}} \times O$ et $\mathbb{D}^n_O = \mathbb{A}^{n,\mathrm{ad}} \times O$.
2. $\mathbb{P}^n_O = \mathbb{P}^{n,\mathrm{val}} \times O = \mathbb{P}^{n,\mathrm{ad}} \times O$.
3. $\mathbb{D}^{-,n}_O = (\mathbb{A}^{-,n})^{\mathrm{ad}} \times O$ et $\mathbb{D}^{\mathrm{b},n}_O = (\mathbb{A}^{b,n}_S)^{\mathrm{ad}}$ ($S = \mathrm{Spf}(A)$, $O = \mathrm{Spa}(A)$).

Tube

Le complété $P^{/X}$ d'un schéma formel P le long d'un sous-schéma formel fermé X est défini localement comme suit :

Si $P = \mathrm{Spf}(A)$ et X est défini par $\mathfrak{a}$, alors $P^{/X} = \mathrm{Spf}(A^{/\mathfrak{a}})$ où $A^{/\mathfrak{a}}$ est l'anneau A muni de la topologie $(I + \mathfrak{a})$-adique (I un idéal de définition).

Définition

Si X est un sous-schéma formel fermé de P, alors le *tube* de X dans P est $]X[_P := P^{/X,\mathrm{ad}}$. Si X est localement fermé dans P, alors le *tube* de X dans P est $]X[_P :=]\overline{X}[_P \setminus]\overline{X} \setminus X[_P$.

Exemple

$$\mathbb{P} = \underbrace{\mathbb{D}(0,1) \cup \{0^+, v_p^+, p^+, p \textit{ premier}\}}_{]\mathbb{A}[} \cup \mathbb{D}^-(\infty, 1)$$

(on a $0^+(f) = -\deg f$ et $p^+(f) = -\deg(f \mod p)$).

Théorème de fibration fort (généralisé)

Théorème

Si $u : Q \to P$ est formellement étale et partiellement propre autour de Y et induit $Y \simeq X$, alors u^{ad} est analytiquement (globalement) un isomorphisme entre des voisinages de $]Y[_Q$ dans Q et de $]X[_P$ dans P.

Démonstration.

Utilise des résultats de Huber sur la topologie étale ([Hub96]). $\square$

Théorème ([LeS17])

Si $u : Q \to P$ est formellement lisse et partiellement propre autour de Y et induit $Y \simeq X$, alors u^{ad} est analytiquement localement un isomorphisme entre des voisinages de $]Y[_Q$ dans Q et de $]X[_{P\times\mathbb{P}^n}\}$ dans $P \times \mathbb{P}^n$.

Démonstration.

Reprend essentiellement la stratégie originale de Berthelot ([Ber96]). $\square$

Conclusion/Exemples

Ce théorème de fibration fort permet de retrouver par exemple (et on peut mettre des coefficients) :

- $H^i_{\mathrm{rig}}(X/S)$ lorsque X est un schéma localement de type fini sur S_k,
- $H^i_{\mathrm{rig}}(X/\mathcal{E}^\dagger)$ lorsque X est une variété algébrique sur $k((t))$.

Par contre, il faut travailler un peu plus pour obtenir (par exemple)

- $H^i_{\mathrm{rig}}(\mathbb{A}^{\mathrm{b}}_k/K)$ avec $\mathbb{A}^{\mathrm{b}}_k = \mathrm{Spec}(k[[t]])$,
- $H^i_{\mathrm{rig}}(\eta/k)$ avec $\eta := \mathrm{Spec}(k((t)))$.

Proposition (Lazda-LS)

Toute immersion $\mathbb{A}^{\mathrm{b}}_k \hookrightarrow S$ dans un schéma formel adique sur $\mathcal{V}$ est fermée. Si S est formellement lisse sur $\mathcal{V}$, elle se factorise par $\mathbb{A}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{V}} \times \mathbb{A}^{-,n}_{\mathcal{V}}$. En particulier, on aura

$$]\mathbb{A}^{\mathrm{b}}_k[_{S_K} =]\overline{\mathbb{A}^{\mathrm{b}}_k}[_{S_K} = \mathbb{D}^{\mathrm{b}}_K \times \mathbb{D}^{-,n}_K.$$

Conclusion/Exemples - suite

Un morphisme de schéma formels $Q \to P$ est *faiblement partiellement propre* s'il satisfait le critère valuatif de propreté pour les anneaux de valuation (discrète).

Proposition (Lazda-LS)

Si $\eta \hookrightarrow S$ est une immersion localement fermée dans un schéma formel adique formellement lisse faiblement partiellement propre sur $\mathcal{V}$, il existe

1. *une immersion $\mathbb{A}^{\mathrm{b}}_k \hookrightarrow T$,*
2. *un morphisme $T \to S$ fini non ramifié autour de η,*
3. *un morphisme $T \to \mathbb{A}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{V}}$ induisant l'identité sur $\mathbb{A}^{\mathrm{b}}_k$ et formellement lisse autour de η.*

En particulier, on aura un isomorphisme entre un voisinage du tube de η dans S et un voisinage du tube de η dans $\mathbb{A}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{V}} \times \mathbb{A}^{-,n}_{\mathcal{V}}$.

On a donc $H^1_{\mathrm{rig}}(\mathbb{A}^{\mathrm{b}}_k/K) = H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{D}^{\mathrm{b}}_K/K)$ et $H^1_{\mathrm{rig}}(\eta/K) = \mathcal{E}^\dagger/\partial_t\mathcal{E}^\dagger$.

Pierre Berthelot. “Cohomologie Rigide et cohomologie à support propre, Première partie”. In : *Prépublication de l’IRMAR* 96.03 (1996), page 89 (cf. pages 5, 20).

Roland Huber. *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996, pages x+450 (cf. page 20).

Christopher Lazda et Ambrus Pál. *Rigid cohomology over Laurent series fields*. Tome 21. Springer, [Cham], 2016, pages x+267 (cf. page 6).

Bernard Le Stum. *Rigid cohomology*. Tome 172. Cambridge : Cambridge University Press, 2007, pages xvi+319 (cf. page 3).

Bernard Le Stum. *Rigid cohomology of locally noetherian schemes Part 1 : Geometry*. 2017. eprint : `arXiv:1707.02797` (cf. page 20).