

A decorative header image featuring a bokeh effect with numerous out-of-focus yellow and orange circles of varying sizes against a dark orange background.

TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE

-

Bernard Le Stum (3 janvier 2026)

A decorative footer image featuring a bokeh effect with numerous out-of-focus yellow and orange circles of varying sizes against a dark orange background.

– Je le vois mais je ne le crois pas (Georg Cantor, Lettre à Dedekind du 29 juin 1877)

Table des matières

Introduction	5
1 Topologie et homotopie	7
1.1 Topologie (rappels)	7
1.2 Connexité et compacité (rappels)	13
1.3 Homotopie	17
1.4 Chemins et lacets	20
1.5 Exercices	28
1.5.1 Topologie	28
1.5.2 Connexité, compacité	30
1.5.3 Homotopies	39
1.5.4 Chemins et lacets	43
2 Le groupe fondamental	47
2.1 Groupes (rappels)	47
2.2 Groupe fondamental	51
2.3 Théorème de Van Kampen	54
2.4 Exercices	60
2.4.1 Groupes	60
2.4.2 Groupe fondamental	64
2.4.3 Théorème de van Kampen	69

3	Revêtements	73
3.1	Action de groupe (rappels)	73
3.2	Revêtement	75
3.3	Monodromie	77
3.4	Revêtement universel	82
3.5	Exercices	87
3.5.1	Action de groupe	87
3.5.2	Revêtements	87
3.5.3	Monodromie	88
3.5.4	Revêtement universel	89
4	Homologie	93
4.1	Algèbre linéaire (Rappels)	93
4.2	Ensemble semi-simplicial	99
4.3	Homologie singulière	103
4.4	Homologie singulière (suite)	108
4.5	Exercices	114
4.5.1	Algèbre linéaire	114
4.5.2	Ensemble semi-simplicial	116
4.5.3	Homologie singulière	117
4.5.4	Homologie singulière (suite)	118
	Références	120

Introduction

Dans sa lettre du 29 juin 1877 à Richard Dedekind, Georg Cantor écrit « je le vois mais ne le crois pas » car il venait de construire une *bijection* entre le plan et la droite. En fait, il n'est pas très difficile de voir qu'il n'existe pas de bijection *continue* entre le plan et la droite mais la question est restée ouverte de nombreuses années en dimension supérieure. C'est seulement en 1912 que Brouwer a montré qu'il n'existe pas d'homéomorphisme entre (des ouverts non-vides de) \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m si $n \neq m$. C'est un résultat difficile qui demande de développer des techniques sophistiquées. Pour faire court, on se ramène à la même question entre les sphères S^n et S^m . On peut attribuer des invariants algébriques aux espaces topologiques et il suffit alors de montrer que les invariants ne sont pas les mêmes pour ces deux sphères.

Après quelques rappels de topologie générale, nous introduirons la notion d'homotopie qui est plus fine que celle d'homéomorphisme ainsi que celles de chemins et de lacets. Ensuite, après quelques rappels sur les groupes, nous introduirons la notion de groupe fondamental et nous montrerons le théorème de van Kampen qui permet de les calculer. Après cela, nous verrons la notion de revêtement et comment le groupe fondamental est relié aux automorphismes d'un revêtement. Enfin, après quelques rappels d'algèbre linéaire et la présentation de la notion de complexe de chaînes, nous parlerons un peu de simplexes et d'ensembles semi-simpliciaux afin de définir l'homologie singulière et nous conclurons avec le théorème de Mayer-Vietoris qui est l'analogue en homologie du théorème de van Kampen.

Conventions

- Quand on dit espace vectoriel, on sous-entend généralement qu'il s'agit d'un espace vectoriel réel. Par défaut, tout espace vectoriel de dimension finie est muni de sa topologie d'espace vectoriel normé. Quand on dit boule (resp. sphère) sans préciser le centre ou le rayon, on sous-entend généralement qu'il s'agit de la boule (resp. sphère) unité, c'est-à-dire centrée à l'origine et de rayon un. Par

défaut, \mathbb{R}^n (pour $n \in \mathbb{N}$) est muni de la norme euclidienne. On désigne par \mathbb{B}^n la boule unité *fermée* dans \mathbb{R}^n , par $\mathring{\mathbb{B}}^n$ son intérieur (boule unité ouverte si $n \neq 0$) et par $\mathbb{S}^{n-1} := \partial\mathbb{B}^n$ (sphère unité) son bord. On désigne aussi par \mathbb{P}^n l'espace projectif réel de dimension n . Lorsque la dimension est 1, nous l'omettrons dans les notations et écrirons donc \mathbb{R} , \mathbb{B} , $\mathring{\mathbb{B}}$, \mathbb{S} et \mathbb{P} . On notera aussi $\mathbb{T} := \mathbb{S}$ de manière à considérer les produit $\mathbb{T}^n := \mathbb{T} \times \cdots \times \mathbb{T} \neq \mathbb{S}^n$. Enfin, on identifiera \mathbb{C} avec \mathbb{R}^2 .

- Nous utiliserons de manière informelle un vocabulaire issu de la théorie des catégories. Par exemple, lorsque $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : E \rightarrow G$ satisfont $g \circ f = h$, on dira que le *diagramme*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & G \end{array}$$

est *commutatif*. Selon le contexte, on dira aussi que h se *factorise* par f ou par g , que h se *relève* en f ou en g , ou encore que f et g sont *induits* par h . Lorsqu'on parle de *suite* de flèches $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on sous-entend toujours que le but de f_n est identique à la source de f_{n+1} . Une construction sera dite *fonctorielle* si elle préserve (ou inverse) les diagrammes commutatifs (et les identités); on notera alors souvent f_* (ou f^*) l'application correspondant à une flèche f dans cette construction. Une propriété sera dite *universelle* si elle est satisfaite par un unique objet à unique isomorphisme près.

Un grand merci à Tobias Schmidt pour avoir mis ses notes à ma disposition ainsi qu'aux étudiants pour leurs questions, leurs remarques et leurs commentaires qui m'ont permis d'améliorer les premières versions du texte.

1. Topologie et homotopie

1.1 Topologie (rappels)

La notion fondamentale pour nous est celle d'espace topologique.

Définition 1.1.1 Une *topologie* sur un ensemble X est un ensemble $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ qui est stable par union quelconque et intersection finie. Si $U \in \mathcal{U}$, on dit que U est *ouverte*. Le complémentaire F d'une partie ouverte U est une *partie fermée*. Un ensemble muni d'une topologie est un *espace topologique*.

Automatiquement, X et \emptyset sont à la fois ouverts et fermés comme intersection et union vide, respectivement.

On fera l'abus de dire que X est un espace topologique (alors qu'il s'agit en fait du couple formé par X et l'ensemble des ouverts).

Exemple 1. Un *espace métrique* est un ensemble X muni d'une *distance*. On le munit de la topologie pour laquelle U est *ouvert* si et seulement si

$$\forall x \in U, \exists \epsilon > 0, \forall y \in X, \quad d(x, y) \leq \epsilon \Rightarrow y \in U.$$

On dit alors que l'espace topologique X est *métrisable* (existence mais pas unicité de la distance).

2. Un espace vectoriel normé est un espace métrique pour $d(x, y) = \|y - x\|$ et donc un espace topologique.
3. Dans un espace vectoriel réel de dimension finie, toutes les normes induisent la même topologie. Sauf mention explicite du contraire, on utilisera toujours cette topologie.
4. On munit $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ de la topologie suivante : F est fermée si et seulement si F est fini ou $+\infty \in F$. C'est un espace métrisable.

5. L'espace de Sierpiński est l'ensemble $\{s, \eta\}$ muni de $\mathcal{U} := \{\emptyset, \{\eta\}, X\}$. Le point s est fermé mais pas le point η . Ce n'est pas un espace métrisable.

- Remarques**
1. Si \mathcal{U} est une topologie sur X et $f : Y \rightarrow X$ une application quelconque, alors $f^{-1}(\mathcal{U})$ est une topologie sur Y appelée topologie *induite*.
 2. Si on se donne une famille de topologies $\{\mathcal{U}_i \subset \mathcal{P}(X)\}_{i \in I}$, alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i$ est aussi une topologie sur X .
 3. Si \mathcal{U}_1 et \mathcal{U}_2 sont deux topologies sur X telles que $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, on dit que \mathcal{U}_2 est *plus fine* que \mathcal{U}_1 .
 4. La topologie la plus (resp. moins) fine de toutes est la topologie *discrète* (resp. *grossière*) avec $\mathcal{U} = \mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$). On dit alors que X est un *espace discret* (resp. *grossier*).
 5. Si \mathcal{B} est un ensemble de parties de X , alors la topologie *engendrée* par \mathcal{B} est la topologie la moins fine contenant \mathcal{B} . On dit alors que \mathcal{B} est une *sous-base* de l'espace X . Une partie de X est ouverte si et seulement si c'est une union d'intersections finies d'éléments de \mathcal{B} .
 6. Dans un espace topologique X , si on a $A \subset U \subset V$ avec U ouvert dans X , on dit que V est un *voisinage* de A dans X .
 7. Une partie est ouverte si et seulement si c'est un voisinage de tous ses points.
 8. Un ensemble $\{V_i\}_{i \in I}$ de voisinages de A dans X est une *base de voisinages* de A si tout voisinage V de A contient l'un des V_i .
 9. Un ensemble \mathcal{A} de parties de X est une *base de voisinages* pour X si, pour tout $x \in X$, $\{V \in \mathcal{A}, x \in V\}$ est une base de voisinage de x . Un ensemble \mathcal{B} d'ouverts de X est une base (de voisinages) si et seulement si tout ouvert est réunion d'éléments de \mathcal{B} . C'est alors une sous-base (mais ce n'est pas équivalent).
 10. Un espace topologique est *localement* \mathcal{P} s'il existe une base de voisinages pour X qui sont tous \mathcal{P} (par exemple "localement connexe" ou "localement compact").

Certaines parties ne sont ni ouvertes ni fermées mais on peut toujours les encadrer entre un plus grand ouvert et un plus petit fermé :

Définition 1.1.2 Soit X un espace topologique. L'*adhérence* \overline{A} (resp. l'*intérieur* $\overset{\circ}{A}$) d'une partie A de X est le plus petit fermé de X contenant A (resp. plus grand ouvert contenu dans A) et sa *frontière* est $\partial A := \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Lorsque $\overline{A} = X$, on dit que A est *dense* dans X .

- Exemple**
1. Dans \mathbb{R}^n , l'adhérence (resp. l'intérieur, le bord) d'une boule est la boule fermée (resp. la boule ouverte, resp. la sphère) correspondante.
 2. Dans un espace vectoriel réel de dimension finie, tous les sous-espaces vectoriels sont fermés.
 3. Le point η est dense dans l'espace de Sierpiński.

- Remarques**
1. On a toujours $\overset{\circ}{A} = X \setminus (\overline{X \setminus A})$ et $\overline{A} = X \setminus (\overset{\circ}{X \setminus A})$.
 2. Si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$ et $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
 3. On a toujours $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
 4. On dit aussi que A est *nulle part dense* (ou *rare*) quand $\overline{A} = \emptyset$ (ne pas confondre avec « non dense »). Par exemple, \mathbb{Z} dans \mathbb{R} ou \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 .

On rappelle maintenant les notions de limite et de continuité.

Définition 1.1.3 Soient X, Y deux espaces topologiques et $A \subset X$. Une application $f : A \rightarrow Y$ a pour *limite* $y \in Y$ en $x \in \overline{A}$ si, pour tout voisinage W de y , il existe un voisinage V de x tel que $f(V \cap A) \subset W$ (ou, si on préfère^a, $V \cap A \subset f^{-1}(W)$).

^a. On rappelle que $E \subset u^{-1}(F) \Leftrightarrow u(E) \subset F$.

Remarques 1. Attention, il peut y avoir plusieurs limites en général!

2. On dit qu'une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *converge* vers x dans X , et on écrit $x_n \rightarrow x$, si l'application $\mathbb{N} \rightarrow X, n \mapsto x_n$ a pour limite x en $+\infty \in \overline{\mathbb{N}}$.
3. Si une partie F de X est fermée, et $F \ni x_n \rightarrow x \in X$, alors $x \in F$ (mais la condition n'est pas suffisante en général).
4. Si $f : X \rightarrow Y$ est continue (voir ci-dessous) en x , et $x_n \rightarrow x$ dans X , alors $f(x_n) \rightarrow f(x)$ dans Y (mais la condition n'est pas suffisante en général).

Définition 1.1.4 Une application $f : X \rightarrow Y$ est *continue* en $x \in X$ si $f(x)$ est une limite de f en x . Elle est *continue* si elle est continue en tout $x \in X$. C'est un *homéomorphisme* si elle est de plus bijective et que l'application réciproque est continue. On dira alors que X et Y sont *homéomorphes* et on écrira $X \simeq Y$.

On désignera l'ensemble de toutes les applications continues $f : X \rightarrow Y$ par $\mathcal{C}(X, Y)$. Si $A \subset X$ et $B \subset Y$, on désignera par $\mathcal{C}((X, A), (Y, B))$ l'ensemble des applications continues telles que $f(A) \subset B$. Lorsque $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$, on parle d'espace *pointé* et d'application continue *pointée* $(X, x) \rightarrow (Y, y)$. Cela signifie donc que $f : X \rightarrow Y$ est continue et que $f(x) = y$.

- Exemples**
1. Si X est un espace *métrique*, alors une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si elle préserve les suites convergentes. Aussi, si $A \subset X$, alors \overline{A} est l'ensemble des limites dans X des suites dans A .
 2. Une distance est une application continue (lipshitzienne).
 3. L'addition ainsi que la multiplication par un scalaire sont continues sur un espace vectoriel normé.
 4. Une application linéaire entre deux espaces vectoriels réels de dimension finie est toujours continue (pour n'importe quelles normes).
 5. Le carré $[0, 1]^2$ et la boule fermée \mathbb{B}^2 sont homéomorphes.
 6. L'application

$$[0, 2] \setminus \{1\} \rightarrow [0, 2] \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

est continue bijective mais n'est pas un homéomorphisme.

7. On montrera (théorème 4.4.9) que si $n \neq m$, alors \mathbb{R}^n n'est *pas* homéomorphe à \mathbb{R}^m .

- Remarques**
1. Une application $f : X \rightarrow Y$ est continue en $x \in X$ si, pour tout voisinage W de $f(x)$, il existe un voisinage V de x tel que $f(V) \subset W$.
 2. Une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si l'image réciproque d'un ouvert (ou d'un fermé) est ouverte (ou fermée). De manière équivalente, si on désigne par \mathcal{U} et \mathcal{V} les topologies sur X et Y respectivement, alors $f^{-1}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$.

3. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux espaces topologiques¹. Si $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ est un recouvrement ouvert (resp. fermé et I est *fini*) et $f|_{X_i}$ est continue pour $i \in I$, alors f est continue.
4. Une application (continue) f est dite *ouverte* (resp. *fermée*) si l'image d'un ouvert est ouvert (resp. d'un fermé est fermé). Une application bijective continue est un homéomorphisme si et seulement si elle est ouverte (resp. fermée).
5. Une topologie \mathcal{U}_2 est plus fine qu'une topologie \mathcal{U}_1 sur X si et seulement si $\text{Id}_X : (X, \mathcal{U}_2) \rightarrow (X, \mathcal{U}_1)$ est continue.
6. Si $f : X \rightarrow Y$ est continue en x et $g : Y \rightarrow Z$ est continue en $f(x)$, alors $g \circ f : X \rightarrow Z$ est continue en x .
7. Si $\psi : Y \rightarrow Y'$ est une application continue, alors il existe une application

$$\psi_* := \mathcal{C}(X, \psi) : \mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X, Y'), \quad f \mapsto \psi_* f := \psi \circ f.$$

Si $\psi' : Y' \rightarrow Y''$ est une autre application continue, alors $(\psi' \circ \psi)_* = \psi'_* \circ \psi_*$.

De plus, on a $\text{Id}_{X*} = \text{Id}_{\mathcal{C}(X, X)}$. C'est une manifestation de la fonctorialité.

8. Si $\varphi : X' \rightarrow X$ est une application continue, alors il existe une application

$$\varphi^* := \mathcal{C}(\varphi, Y) : \mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X', Y), \quad f \mapsto \varphi^* f := f \circ \varphi.$$

Si $\varphi' : X'' \rightarrow X'$ est une autre application, alors $(\varphi \circ \varphi')^* = \varphi'^* \circ \varphi^*$. De plus, on a $\text{Id}_X^* = \text{Id}_{\mathcal{C}(X, X)}$ (fonctorialité).

9. Si $f : X \rightarrow Y$ est continue et $B \subset Y$, alors $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ et $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{f^{-1}(B)}$. Aussi, si $A \subset X$, alors $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Il existe des constructions dites universelles et on va décrire les plus utiles :

Proposition 1.1.5 Soit X un espace topologique.

1. Si $\iota : Y \hookrightarrow X$ est une application injective, alors il existe une unique topologie sur Y avec la propriété suivante : si Y' est un espace topologique, alors une application $Y' \rightarrow Y$ est continue si et seulement si l'application composée $Y' \rightarrow Y \hookrightarrow X$ est continue.
2. Si $\pi : X \twoheadrightarrow Y$ est une application surjective, alors il existe une unique topologie sur Y avec la propriété suivante : si Y' est un espace topologique, alors une application $Y \rightarrow Y'$ est continue si et seulement si l'application composée $X \twoheadrightarrow Y \rightarrow Y'$ est continue.

Démonstration. Dans le premier cas, la topologie induite répond à la question (une partie V de Y est ouverte si et seulement si $V = \iota^{-1}(U)$ avec U ouvert dans X). Dans le second cas, on munit Y de la topologie *quotient* : une partie V de Y est ouverte si et seulement si $U =: \pi^{-1}(V)$ est ouvert dans X . Les détails sont laissés en exercice. ■

Remarques 1. On munira systématiquement une partie A d'un espace topologique X de la topologie induite (relativement à l'inclusion $A \hookrightarrow X$).

1. On munit ici les parties de X de la topologie induite.

2. Si \mathcal{R} est une relation quelconque sur un ensemble X , on notera X/\mathcal{R} le quotient pour la relation d'équivalence *engendrée* par \mathcal{R} . Si X est un espace topologique, on munit systématiquement X/\mathcal{R} de la topologie quotient (relativement à l'application quotient $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$).
3. Soit \mathcal{R} une relation quelconque sur un ensemble X et $f : X \rightarrow Y$ une application. Alors f se factorise (automatiquement de manière unique) par X/\mathcal{R} et fournit $\bar{f} : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$ si et seulement si

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 \mathcal{R} x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Si X et Y sont des espaces topologiques, alors f est continue si et seulement si \bar{f} est continue.

4. Si $f : X \rightarrow Y$ est une application quelconque, alors la relation

$$x_1 \mathcal{R} x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

est une relation d'équivalence sur X et f induit une bijection $X/\mathcal{R} \simeq \text{im}(f)$. C'est la version ensembliste du premier théorème d'isomorphisme de Noether. Attention : si f est une application continue, alors cette bijection est continue mais ce n'est pas nécessairement un homéomorphisme lorsque X/\mathcal{R} a la topologie quotient et $\text{im}(f)$ a la topologie induite. Lorsque c'est le cas, on dit que f est *stricte*.

5. Si A est une partie de X , on pose² $X/A := X/\mathcal{R}$ avec $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x, y \in A$ (on contracte tous les points de A en un seul point a : on a une *bijection* $(X \setminus A) \cup \{a\} \simeq X/A$). Une application $X \rightarrow Y$ se factorise par X/A si et seulement si elle est constante sur A .
6. Si une application $\pi : X \rightarrow Y$ est continue surjective et ouverte (resp. fermée), alors la topologie sur Y est automatiquement la topologie quotient.
7. Si $f : Y \hookrightarrow X$ et $g : X \rightarrow Y$ sont continues et $g \circ f = \text{Id}$, on dit que f est une *section (continue)* de g et que g est une *rétraction (continue)* de f . Dans ce cas, la topologie de Y est à la fois la topologie induite par f et la topologie quotient par g . Lorsque f est l'inclusion d'une partie Y de X , on dit que Y est un *rétract* de X .

Exemples 1. Si $Y \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'une partie d'un espace métrique, alors la topologie induite sur Y est identique à la topologie définie par la distance induite.

2. Un quotient d'un espace métrique n'est pas toujours un espace métrique (par exemple $\mathbb{R}/\mathbb{R}^\times$ qui est – homéomorphe à – l'espace de Sierpiński).
3. On a $[0, 1]/\{0, 1\} \simeq \mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}, t \mapsto e^{2i\pi t}$. Plus généralement, on verra que $\mathbb{B}^n/\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{S}^n$.
4. Si E est un espace vectoriel sur un corps K , alors l'*espace projectif* associé à E est l'ensemble $\mathbb{P}(E)$ des droites de E . L'application $x \mapsto \text{Vect}(x)$ induit une bijection $(E \setminus \{0\})/\mathcal{R} \simeq \mathbb{P}(E)$ avec $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times, y = \lambda x$. Si E est un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} , on munit $\mathbb{P}(E)$ de la topologie quotient. On écrira $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$.

2. Attention, cette convention n'est pas compatible avec la notation X/G pour les actions de groupe.

5. La sphère \mathbb{S}^n est un rétract de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ via $x \mapsto x/\|x\|$.

Proposition 1.1.6 Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques.

1. Il existe une unique topologie sur le produit $X := \prod_{i \in I} X_i$ avec la propriété suivante : si X' est un espace topologique, alors une application $X' \rightarrow X$ est continue si et seulement si toutes ses composantes $X' \rightarrow X \rightarrow X_i$ sont continues.
2. Il existe une unique topologie sur l'union disjointe $X := \coprod_{i \in I} X_i$ avec la propriété suivante : si X' est un espace topologique, alors une application $X \rightarrow X'$ est continue si et seulement si toutes les restrictions $X_i \hookrightarrow X \rightarrow X'$ sont continues.

Démonstration. Dans le premier cas, on munit X de la topologie *produit* engendrée par les ouverts de la forme $p_i^{-1}(U_i)$ avec U_i ouvert dans X_i (attention, c'est seulement une sous-base) et $p_i : X \rightarrow X_i$ la projection.

Dans le second cas, on munit X de la topologie pour laquelle les ouverts sont les unions d'ouverts des X_i .

Les détails sont de nouveau laissés en exercice. ■

Exemples 1. Supposons que les X_i sont des espaces métriques et que I est *fini*. On pose

$$d((x_i), (y_i)) = \max_{i \in I} d(x_i, y_i).$$

C'est une distance qui définit la topologie de $X := \prod_{i \in I} X_i$.

2. Supposons que les X_i sont des espaces métriques. On pose

$$\tilde{d}(x, y) = \begin{cases} \min(1, d(x, y)) & \text{si } x, y \in X_i \\ 2 & \text{si } x \in X_i, y \in X_j \text{ et } i \neq j. \end{cases}$$

C'est une distance qui définit la topologie de $X := \coprod_{i \in I} X_i$.

3. On a $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{B}^n \simeq \mathbb{B} \times \cdots \times \mathbb{B}$ (homéomorphe) mais $\mathbb{S}^n \not\simeq \mathbb{S} \times \cdots \times \mathbb{S} =: \mathbb{T}^n$.
4. Si X est un espace topologique et I un espace topologique discret, on a un homéomorphisme $X \times I \simeq \coprod_I X$ (par exemple, $\mathbb{R} \times \{0, 1\} \simeq \mathbb{R} \coprod \mathbb{R}$).

Corollaire 1.1.7 Si $f : Z \rightarrow X, g : Z \rightarrow Y$ sont deux applications continues, alors il existe une unique topologie sur la *somme amalgamée*

$$X \coprod_{f,g} Y \simeq \left(X \coprod Y \right) / \mathcal{R} \quad \text{où} \quad x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists z \in Z, f(z) = x, g(z) = y$$

avec la propriété suivante : une application $X \coprod_{f,g} Y \rightarrow T$ est continue si et seulement si les applications induites $X \rightarrow T$ et $Y \rightarrow T$ sont continues.

Démonstration. Résulte formellement des propriétés universelles déjà vues. Les détails sont de nouveau laissés en exercice. ■

- Remarques**
1. Lorsque³ $g : Z \hookrightarrow Y$ est l'inclusion d'une partie, la relation se simplifie en $x\mathcal{R}z \Leftrightarrow x = f(z)$ et on écrira $X \coprod_f Y$. On dit qu'on *recolle* X avec Y le long de f . On a une bijection continue $X \coprod Y \setminus Z$ et $X \coprod_f Y$ (qui n'est pas un homéomorphisme).
 2. Lorsque $f : Z \hookrightarrow X$ est aussi l'inclusion d'une partie Z de X , on écrit $X \coprod_Z Y$. On peut alors identifier X , Y et Z avec des parties de $T := X \coprod_Z Y$ si bien que $T = X \cup Y$ et $Z = X \cap Y$ (et réciproquement).
 3. Dans le cas où $Z = \{z\}$ est réduit à un point, on dit que $X \vee Y := X \coprod_z Y$ est un *bouquet* (d'espaces pointés).
 4. Si A est une partie de X , on a $X/A \simeq \{a\} \coprod_p X$ avec $p : A \rightarrow \{a\}$.
 5. La notion de somme amalgamée est duale de celle de *produit fibré* que nous ne considérerons pas ici.

Exemples On verra que :

1. $\mathbb{S}^n / (\mathbb{S}^{n-1} \times 0) \simeq \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ et $\mathbb{B}^n / (\mathbb{B}^{n-1} \times 0) \simeq \mathbb{B}^n \vee \mathbb{B}^n$.
2. $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{B}^n \coprod_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbb{B}^n$ ($\mathbb{S}^n = \mathbb{B}^{n+} \cup \mathbb{B}^{n-}$ et $\mathbb{B}^{n+} \cap \mathbb{B}^{n-} = \mathbb{S}^{n-1}$).
3. $\mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{S} \coprod_f \mathbb{B}^2$ avec $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S} : z \mapsto z^2$.
4. $\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{P}^{n-1} \coprod_p \mathbb{B}^n$ avec $p : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$.

1.2 Connexité et compacité (rappels)

Les notions suivantes ne sont pas de nature topologique (elles ne sont pas stables par homéomorphisme) mais cependant bien utiles.

Définition 1.2.1 Soit E un espace vectoriel réel.

1. Si $x, y \in E$, on désigne par (xy) l'ensemble des $(1-t)x + ty$ avec $t \in \mathbb{R}$. On remplace « (» par « [» ou «] » pour indiquer que $t \geq 0$ ou $t > 0$. On remplace «) » par «] » ou « [» pour indiquer que $t \leq 1$ ou $t < 1$. Si $x \neq y$, on dit alors que (xy) est une *droite*, que $[xy]$, $(xy]$, $[xy]$ et $]xy)$ sont des *demi-droites* et que $[xy]$, $]xy]$, $[xy[$ et $]xy[$ sont des *segments*.
2. On dit que $A \subset E$ est *affine*^a (resp. *convexe*) si $\forall x, y \in A$, $(xy) \subset A$ (resp. $[xy] \subset A$).
3. Une application entre deux parties A et B d'espaces vectoriels est *affine* si elle est induite par la composée d'une application linéaire et d'une translation.

a. Ou linéaire.

Exemple 1. \mathbb{R}^n est convexe mais pas $\mathbb{R}^n \setminus 0$ (pour $n > 0$).

2. \mathbb{B}^n est convexe mais pas \mathbb{S}^n .
3. Plus généralement, une boule est convexe pour n'importe quelle norme.

Remarque 1. Une partie affine est soit vide, soit le translaté d'un sous-espace vectoriel (on dit alors que c'est un sous-espace affine) appelé espace vectoriel directeur. C'est une partie convexe.

2. Une intersection de parties affines (resp. convexes) est affine (resp. convexe).

3. C'est le seul cas que nous considérerons.

3. L'*enveloppe affine* (resp. *convexe*) d'une partie S est la plus petite partie affine (resp. convexe) A qui contient S . On aura

$$A = \left\{ \sum_{s \in S} t_s s \mid \sum t_s = 1 : t_s \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{R}_{\geq 0}) \right\}.$$

4. La *dimension* d'un espace affine est la dimension de son espace directeur. La *dimension* d'un convexe est la dimension de son enveloppe affine.
5. Un produit fini de parties affines (resp. convexes) est affine (resp. convexe).
6. L'image et l'image réciproque d'une partie affine (resp. convexe) par une application affine sont affines (resp. convexes).
7. L'adhérence ainsi que l'intérieur d'une partie affine (resp. convexe) sont affines (resp. convexes) (pour n'importe quelle norme).
8. On rappelle aussi qu'une partie A est *étoilée* si $\exists x \in A, \forall y \in A, [xy] \subset A$. Une partie convexe non vide est étoilée (mais pas réciproquement).

On introduit maintenant la notion de connexité :

Définition 1.2.2 Un espace topologique X est *connexe* si les seuls ouverts fermés (ouverts^a) de X sont \emptyset et X .

^a. *Clopen* en anglais.

- Exemples**
1. Une partie convexe est connexe (pour n'importe quelle norme).
 2. \mathbb{S}^n est connexe pour $n \neq 0$ mais pas $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$.
 3. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe pour $n \neq 1$ mais pas $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{R}_{>0}$.
 4. Les parties connexes de \mathbb{R} sont les intervalles (ce sont aussi les parties convexes).
 5. Une *variété topologique* de dimension n , c'est-à-dire un espace topologique séparé (voir ci-dessous) localement homéomorphe à \mathbb{R}^n , est localement connexe (exemples : $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{B}^n, \mathbb{P}^n, \mathbb{T}^n$).
 6. L'adhérence du graphe de $\sin(1/x)$ est connexe mais pas localement connexe.
 7. \mathbb{Q} (avec sa topologie réelle) n'est ni connexe ni localement connexe.

- Remarques**
1. Un espace topologique est connexe si et seulement si on ne peut pas l'écrire comme union de deux ouverts (resp. fermés) disjoints non vides.
 2. Un espace topologique est connexe si et seulement si toute application continue dans un espace discret est constante (et il suffit de considérer $\{0, 1\}$).
 3. Un produit d'espaces topologiques non-vides est connexe si et seulement si ses facteurs le sont.
 4. Une union de parties connexes d'intersection deux à deux non vide est connexe.
 5. L'image d'une partie connexe par une application continue est connexe (théorème des valeurs intermédiaires).
 6. L'adhérence d'une partie connexe est connexe.
 7. Un espace topologique est localement connexe si et seulement s'il possède une base d'ouverts connexes.
 8. Tout ouvert et tout quotient d'un espace localement connexe est localement connexe.
 9. Tout produit *fini* d'espaces localement connexes est localement connexe et tout produit d'espaces connexes localement connexes est connexe localement connexe.

Définition 1.2.3 Une *composante connexe* dans un espace topologique X est une partie connexe non-vide maximale.

On désigne par $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes dans X .

Exemples

1. Les composantes connexes dans \mathbb{R}^\times sont $\mathbb{R}_{>0}$ et $\mathbb{R}_{<0}$.
2. Les composantes connexes dans un espace discret sont les points. Mais ce n'est pas équivalent, les composantes connexes dans \mathbb{Q} (ou dans \mathbb{N}) sont aussi les points.

Remarques

1. On considère aussi la notion de *composante connexe* $C(x)$ d'un point $x \in X$. De manière équivalente, c'est
 - (a) la plus grande partie connexe de X contenant x ,
 - (b) la réunion des parties connexes de X qui contiennent x ,
 - (c) l'unique composante connexe qui contient x .
2. Un espace topologique est réunion de ses composantes connexes, qui sont fermées (mais pas toujours ouvertes) et disjointes (mais la topologie n'est pas en général celle de l'union disjointe).
3. Les composantes connexes dans $\prod_{i \in I} X_i$ sont les produits des composantes connexes dans les X_i .
4. Les composantes connexes dans $\coprod_{i \in I} X_i$ sont les composantes connexes dans chacun des X_i .
5. Toute application continue $f : X \rightarrow Y$ induit une application

$$f_* = \pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y), \quad C \mapsto f_*C$$

qui envoie une composante connexe C dans X sur la composante connexe dans Y contenant $f(C)$. C'est fonctoriel : on a toujours $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ et $\text{Id}_{X*} = \text{Id}$.

6. Un espace topologique est localement connexe si et seulement si les composantes connexes des ouverts de X sont ouvertes.

Il existe de nombreuses conditions qui permettent de s'assurer qu'une topologie est suffisamment riche pour séparer les points mais nous ne considérerons que la plus courante :

Définition 1.2.4 Un espace topologique X est *séparé*^a si pour tout $x \neq y \in X$, il existe des voisinages disjoints de x et y (condition T_2).

^a. Hausdorff en anglais.

Exemples

1. Un espace métrique est séparé.
2. L'espace de Sierpiński n'est pas séparé.
3. La droite avec deux origines $\mathbb{R} \coprod_{\mathbb{R}^\times} \mathbb{R}$ n'est pas séparée.
4. Un *groupe topologique* est un espace topologique muni d'une loi de groupe continue avec inversion continue. Un groupe topologique est séparé si et seulement si 1 est fermé.

Remarques

1. Un espace X est séparé si et seulement si la diagonale est fermée dans $X \times X$.

2. Toute partie d'un espace séparé est séparée (pour la topologie induite).
3. Un produit d'espaces non-vides est séparé si et seulement si les facteurs le sont.
4. Dans un espace séparé, les limites sont uniques.
5. Dans un espace séparé, les points sont fermés⁴.
6. Dans un espace séparé, les rétracts sont fermés.

Enfin, on termine avec la condition de finitude la plus naturelle, celle de compacité :

Définition 1.2.5 Un espace topologique X est *compact*^a s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ admet un raffinement $X = \bigcup_{i \in J} U_i$ avec J fini.

^a. *Compact Hausdorff* en anglais.

- Exemples**
1. Un espace métrique est compact si et seulement si toute suite possède une sous-suite convergente (théorème de Bolzano-Weirstrass).
 2. Une application continue $f : X \rightarrow Y$ avec X métrique compact et Y métrique est uniformément continue.
 3. Une partie d'un espace vectoriel réel de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.
 4. \mathbb{S}^n , \mathbb{T}^n , \mathbb{B}^n et \mathbb{P}^n sont compacts mais pas \mathbb{R}^n (si $n \neq 0$) ou $\mathring{\mathbb{B}}^n$.
 5. Le quotient $[0, 1]/\sim$ n'est *pas* compact (car il n'est pas séparé) bien que $[0, 1]$ est compact.
 6. Une variété topologique est localement compacte.
 7. \mathbb{Q} n'est pas localement compact.

- Remarques**
1. Un compact est toujours fermé dans un espace séparé et un fermé est toujours compact dans un espace compact.
 2. Tout produit de compacts est compact (théorème de Tychonov⁵).
 3. Toute réunion finie dans un espace séparé et toute intersection (non triviale) de compacts est compacte.
 4. L'image d'un compact par une application continue à valeur dans un espace séparé est toujours compacte.
 5. Une application continue $f : X \rightarrow Y$ avec X compact et Y séparé est toujours fermée et c'est donc un homéomorphisme si et seulement si elle est bijective.
 6. Un espace topologique est localement compact si et seulement si tout point possède un voisinage compact.
 7. Tout ouvert et tout fermé d'un espace localement compact est localement compact.

On devrait définir la compacité par cette jolie caractéristique :

Théoreme 1.2.6 — Kurakovski. Un espace séparé X est compact si et seulement s'il est *universellement fermé* : toute projection $X \times Y \rightarrow Y$ est fermée.

Démonstration. Hors programme. ■

-
4. Condition T_1 . Il existe de nombreuses conditions de séparations notées T_n .
 5. Équivalent à l'axiome du choix.

- Remarques** 1. Plus généralement, on dit qu'une application *continue* $f : X \rightarrow Y$ est *propre* si elle est universellement fermée : pour tout espace topologique Z , l'application $f \times \text{Id}_Z : X \times Z \rightarrow Y \times Z$ est fermée. Si X est séparé et Y localement compact, c'est équivalent à dire que l'image inverse d'un compact est compact.
2. On voit donc que X est compact si et seulement s'il est séparé et l'application $X \rightarrow \{0\}$ est propre.

1.3 Homotopie

Nous allons avoir besoin de déformer continûment des espaces topologiques et des applications continues :

Définition 1.3.1 Une *homotopie* est une application continue $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ (où X et Y sont deux espaces topologiques). Si on pose $h_t : X \rightarrow Y, x \mapsto h(x, t)$, on dit alors que h_0 et h_1 sont *homotopes* et on écrit $h : h_0 \sim h_1$.

- Exemples** 1. Si $f, g : X \rightarrow Y$ sont deux applications continues avec Y *convexe*, alors $f \sim g$. Il suffit de poser $h(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$.
2. Les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\times, x \mapsto 1, x \mapsto -1$ ne sont pas homotopes.

Définition 1.3.2 1. Une homotopie $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ est *triviale* ou *constante* si

$$\forall x \in X, \forall t, t' \in [0, 1] \quad h(x, t) = h(x, t').$$

2. L'*inverse* d'une homotopie $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ est l'homotopie

$$h' : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

définie par

$$\forall x \in X, \forall t \in [0, 1], \quad h'(x, t) = h(x, 1 - t).$$

3. Deux homotopies $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ et $h' : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ sont *composables* si $h_1 = h'_0$ et leur *composée*^a est alors l'homotopie

$$h'' : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

définie par

$$\forall x \in X, \forall t \in [0, 1], \quad h''(x, t) = \begin{cases} h(x, 2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ h'(x, 2t - 1) & \text{si } t > 1/2. \end{cases}$$

^a. Certains auteurs font la composition dans l'autre sens.

- Remarques** 1. Une homotopie triviale est une homotopie $f \sim f$. L'inverse d'une homotopie $f \sim g$ est une homotopie $g \sim f$. La composée de deux homotopies $f \sim g$ et $g \sim k$ est une homotopie $f \sim k$.

2. Pour que la composée soit bien définie, il faut bien sûr s'assurer que h'' est continue et on utilise l'argument des fermés $X = X' \cup X''$ avec $X' := X \times [0, 1/2]$ et $X'' := X \times [1/2, 1]$.

Proposition 1.3.3 Si X et Y sont deux espaces topologiques, alors la relation d'homotopie \sim est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(X, Y)$.

Démonstration. L'homotopie triviale fournit la réflexivité. L'inverse fournit la symétrie. Enfin, la composition fournit la transitivité. ■

On désigne par $[X, Y] := \mathcal{C}(X, Y) / \sim$ l'ensemble des classes d'homotopie et par $[f]$ la classe de f .

Remarques 1. Si on se donne $\psi : Y \rightarrow Y'$ continue et $h : f \sim g : X \rightarrow Y$, alors $\psi \circ h : (\psi \circ f) \sim (\psi \circ g) : X \rightarrow Y'$ est une homotopie. On en déduit une application (fonctorielle)

$$\psi_* = [X, \psi] : [X, Y] \longrightarrow [X, Y'], \quad [f] \mapsto \psi_*[f] := [\psi \circ f].$$

2. Si on se donne $\varphi : X' \rightarrow X$ continue et $h : f \sim g : X \rightarrow Y$, alors

$$(h \circ (\varphi \times \text{Id}_{[0,1]})) : (f \circ \varphi) \sim (g \circ \varphi) : X' \rightarrow Y$$

est une homotopie et on en déduit une application (fonctorielle)

$$\varphi^* = [\varphi, Y] : [X, Y] \longrightarrow [X', Y], \quad [f] \mapsto \varphi^*[f] := [f \circ \varphi].$$

3. Si $f \sim f' : X \rightarrow Y$ et $g \sim g' : Y \rightarrow Z$, alors $(g \circ f) \sim (g' \circ f') : X \rightarrow Z$. Autrement dit, la composition des applications induit une composition

$$[X, Y] \times [Y, Z] \rightarrow [X, Z], \quad ([f], [g]) \mapsto [g] \circ [f] := [g \circ f].$$

4. On a

$$\forall i \in I, f_i \sim g_i : X_i \rightarrow Y_i \quad \Rightarrow \quad \prod_{i \in I} f_i \sim \prod_{i \in I} g_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$$

(et idem pour les union disjointes).

5. On a aussi

$$\forall i \in I, f_i \sim g_i : X \rightarrow Y_i \quad \Leftrightarrow \quad f \sim g : X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$$

(et l'analogue - dans l'autre sens - pour les unions disjointes).

6. Une homotopie h *relativement* à $A \subset X$ est une homotopie dont la restriction à A est triviale :

$$\forall x \in A, \forall t, t' \in [0, 1], \quad h(x, t) = h(x, t').$$

On écrit alors $h_0 \sim_A h_1$. Pour que $f \sim_A g$, il est nécessaire que $f|_A = g|_A$. Toutes les propriétés ci-dessus (et à venir) ont un analogue relatif qu'on utilisera librement.

7. Si $A \subset X$ et $B \subset Y$, on peut aussi définir une homotopie $f \sim g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ en demandant que $h(A \times [0, 1]) \subset B$. Ici encore, toutes les propriétés ci-dessus (et à venir) ont un analogue qu'on utilisera librement.

On veut maintenant assouplir la notion d'homéomorphisme :

Définition 1.3.4 Une application continue $f : X \rightarrow Y$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une autre application continue $g : Y \rightarrow X$ telle que $\text{Id}_X \sim g \circ f$ et $f \circ g \sim \text{Id}_Y$. On dit alors que X et Y ont même *type d'homotopie* et on écrit $X \sim Y$.

Exemples $\mathbb{B}^n \sim \{0\}$, $\mathbb{C}^\times \sim \mathbb{S}$, $\mathbb{R}^\times \not\sim \mathbb{R}$.

- Remarques**
1. L'équivalence d'homotopie est une relation d'équivalence⁶ sur les espaces topologiques et une classe d'équivalence de X est un *type d'homotopie* (c'est similaire à la notion de cardinal d'un ensemble).
 2. Deux espaces homéomorphes ont même type d'homotopie.
 3. Si, pour tout $i \in I$, $X_i \sim Y_i$, alors $\prod_I X_i \sim \prod_I Y_i$.
 4. Si $X \sim X'$ et $Y \sim Y'$, on a une bijection $[X, Y] \simeq [X', Y']$.

Proposition 1.3.5 Si $f : X \sim Y$ est une équivalence d'homotopie, alors $f_* : \pi_0(X) \simeq \pi_0(Y)$ est une bijection.

Démonstration. Par définition, il existe une application continue $g : Y \rightarrow X$ et une homotopie $h : \text{Id}_X \sim g \circ f$. Si $C \in \pi_0(X)$, alors $h(C \times [0, 1])$ est connexe et contient $h(C \times \{0\}) = C$ maximal, si bien que $h(C \times [0, 1]) = C$. Mais $h(C \times [0, 1])$ contient aussi $h(C \times \{1\}) = (g \circ f)(C)$ et on a donc $(g \circ f)(C) \subset C$. On a donc $g_* f_* C = (g \circ f)_* C = C$, c'est-à-dire $g_* \circ f_* = \text{Id}_{\pi_0(X)}$. On conclut par symétrie. ■

Corollaire 1.3.6 Si X est connexe et $X \sim Y$, alors Y est connexe.

On va souvent pouvoir remplacer un espace topologique par un espace plus petit qui a même type d'homotopie :

Définition 1.3.7 Une rétraction (continue) $r : X \rightarrow A$ d'une inclusion $\iota : A \hookrightarrow X$ est une *rétraction par déformation* si $\text{Id}_X \sim \iota \circ r$. On dit alors que A est un *rétract par déformation* de X .

- Remarques**
1. Concrètement, A est un rétract par déformation de X si et seulement s'il existe une application continue $h : X \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que

$$\forall x \in X, \quad h(x, 0) = x \text{ et } h(x, 1) \in A$$

(en posant $r(x) = h(x, 1)$).

2. Si on demande que $\text{Id}_X \sim_A \iota \circ r$, on dit *rétraction forte par déformation*. Cela revient à ajouter la condition

$$\forall a \in A, \forall t \in [0, 1], \quad h(a, t) = a.$$

6. On ne s'embarrasse pas de considérations ensemblistes.

3. Si A est un rétract par déformation de X , alors $X \sim A$ car $r \circ \iota = \text{Id}_A$ par définition d'une rétraction, et donc en particulier $r \circ \iota \sim \text{Id}_A$.
4. Inversement, on peut montrer qu'à homéomorphisme près, deux espaces homotopiquement équivalents sont toujours des rétracts forts par déformation d'un même espace (difficile).

Exemples 1. \mathbb{S}^n est un rétract fort par déformation de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.
 2. $\{1\}$ n'est pas un rétract par déformation de \mathbb{C}^\times .

Définition 1.3.8 Un espace topologique X est *contractile* si $X \sim \{0\}$.

Exemples 1. Une partie étoilée (par exemple convexe non vide) est contractile.
 2. \mathbb{S}^n n'est pas contractile (très difficile : voir remarque après le corollaire 4.4.8 plus bas).
 3. Plus généralement, une variété topologique compacte de dimension > 0 (comme \mathbb{P}^n ou \mathbb{T}^n) n'est jamais contractile.

Remarques 1. Un espace topologique X est contractile si et seulement s'il existe une rétraction par déformation sur un point.
 2. Un espace contractile est connexe.
 3. Si X est contractile, alors deux applications continues $f, g : Y \rightarrow X$ sont toujours homotopes.
 4. Si X est contractile, alors toute application continue $f : X \rightarrow Y$ est homotope à une application constante.
 5. Si X est contractile et Y quelconque, alors $X \times Y \sim Y$.

1.4 Chemins et lacets

On fixe un espace topologique X . On veut relier explicitement les points de X :

Définition 1.4.1 Un *chemin* dans X est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. On dit alors que $x := \gamma(0)$ et $y := \gamma(1)$ sont les *extrémités* (point *initial* ou *origine* et point *final* ou *extrémité*) de γ . On dit aussi que x et y sont *reliés* par γ ou que γ *part* de x pour *arriver* à y et on écrit (encore) $\gamma : x \sim y$. Lorsque $x = y$, on dit que γ est un *lacet* (basé) en x .

Attention à la représentation simplifiée des chemins : ne pas oublier que la courbe de Péano par exemple est un chemin dans $[0, 1]^2$ qui recouvre tout le pavé.

Remarques 1. On dispose d'une bijection

$$X \simeq \mathcal{C}(\{0\}, X), \quad x \mapsto (0 \mapsto x)$$

et un chemin $\gamma : x \sim y$ correspond à une homotopie (ce qui justifie *a posteriori* la notation $x \sim y$).

2. L'ensemble des chemins dans X est $\mathcal{C}([0, 1], X)$.
3. On peut identifier l'ensemble des lacets de X avec $\mathcal{C}(\mathbb{S}, X)$ en posant $\hat{\gamma}(e^{2i\pi t}) = \gamma(t)$ pour $t \in [0, 1]$.

4. Si $\varphi : X \rightarrow Y$ est continue et $\gamma : x_1 \sim x_2$, alors

$$\varphi_*\gamma := \varphi \circ \gamma : y_1 = f(x_1) \sim y_2 = f(x_2).$$

5. Si $f : 0 \sim 1$ est un chemin dans $[0, 1]$ et $\gamma : x \sim y$ dans X , alors

$$f^*(\gamma) := \gamma \circ f : x \sim y$$

est une *reparamétrisation* de γ .

6. Il revient au même de se donner une homotopie $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ ou une application continue de X dans l'espace⁷ $\mathcal{C}([0, 1], Y)$ des chemins dans Y . En effet, on a une bijection (curryfication)

$$\mathcal{C}(X \times [0, 1], Y) \simeq \mathcal{C}(X, \mathcal{C}([0, 1], Y)), \quad h \mapsto (x \mapsto (\gamma_x : t \mapsto h(x, t))).$$

7. De même, toute homotopie $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ fournit un chemin

$$[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(X, Y), \quad h \mapsto (t \mapsto h_t).$$

dans l'espace des applications continues de X vers Y . Et réciproquement lorsque X est localement compact.

On va progressivement construire des groupes en utilisant les chemins (ces définitions sont des « cas particuliers » de ce qu'on a vu pour les homotopies) :

Définition 1.4.2 1. Si $x \in X$, le *lacet constant* ou *trivial* en x est donné par

$$\forall t \in [0, 1], \quad 1_x(t) = x.$$

2. Si γ est un chemin dans X , son *inverse* est le chemin donné par

$$\forall t \in [0, 1], \quad \gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t).$$

3. Deux chemins γ et γ' dans X sont *composables* si $\gamma(1) = \gamma'(0)$. Leur *composé*^a est alors le chemin donné par

$$\forall t \in [0, 1], \quad (\gamma \cdot \gamma')(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \gamma'(2t - 1) & \text{si } t > 1/2. \end{cases}$$

a. On rappelle que certains auteurs font la composition dans l'autre sens.

Proposition 1.4.3 Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue.

1. Si $x \in X$, alors $f_*1_x = 1_{f(x)}$.
2. Si γ est un chemin dans X , alors $f_*\gamma^{-1} = (f_*\gamma)^{-1}$.
3. Si γ et γ' sont deux chemins composables dans X , alors $f_*(\gamma \cdot \gamma') = f_*\gamma \cdot f_*\gamma'$.

Démonstration. Immédiat. ■

7. On munit toujours $\mathcal{C}(X, Y)$ de la topologie compacte-ouverte (c'est-à-dire la topologie de la convergence uniforme lorsque X est compact et Y métrique).

Proposition 1.4.4 La relation $\exists \gamma : x \sim y$ dans un espace topologique X est une relation d'équivalence.

Démonstration. En effet, il existe un chemin $x \sim y$ si et seulement si les applications correspondantes $x, y : \{0\} \rightarrow X$ sont homotopes et on peut donc appliquer la proposition 1.3.3. ■

La notion de connexité est plutôt abstraite mais on peut souvent la remplacer en pratique par une propriété plus concrète :

Définition 1.4.5 Un espace X est *connexe par arcs* si $\forall x, y \in X, \exists \gamma : x \sim y$. Une *composante connexe par arcs* une partie connexe par arcs non-vide maximale.

On désignera par $\pi_0^{\text{arc}}(X) := X / \sim$ l'ensemble des composantes connexes par arc de X .

- Remarques**
1. Un espace X connexe par arcs est toujours connexe. Et réciproquement si X est localement connexe par arcs.
 2. Un produit d'espaces connexes par arcs est connexe par arcs. Une union d'intersection non-vide d'espaces connexes par arcs est connexe par arcs. L'image d'un espace connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.
 3. Un espace topologique est localement connexe par arcs si et seulement s'il possède une base d'ouverts connexes par arcs.
 4. Si $X \sim Y$, alors X est connexe par arcs si et seulement si Y est connexe par arcs.
 5. Si X est contractile, il est connexe par arcs. Si X est contractile et Y est connexe par arcs, alors deux applications $X \rightarrow Y$ sont toujours homotopes.
 6. Si X est localement connexe par arcs, alors ses composantes connexes sont ouvertes (et fermées) et localement connexes par arcs. En particulier, $\pi_0(X) = \pi_0^{\text{arc}}(X)$.
 7. Toute application continue $f : X \rightarrow Y$ induit une application

$$f_* = \pi_0^{\text{arc}}(f) : \pi_0^{\text{arc}}(X) \rightarrow \pi_0^{\text{arc}}(Y)$$

Et c'est fonctoriel. De plus, si $f \sim g$, alors $f_* = g_*$. Enfin, f_* est une bijection lorsque f est une équivalence d'homotopie.

- Exemples**
1. $\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{T}^n$ et \mathbb{P}^n sont connexes par arcs – à part \mathbb{S}^0 et \mathbb{T}^0 .
 2. Une variété topologique est localement connexe par arcs.
 3. L'adhérence $\bar{\Gamma}$ du graphe de $\sin(1/x)$ dans \mathbb{R}^2 est connexe mais pas connexe par arcs ni localement connexe. L'union $\bar{\Gamma} \cup \mathbb{R} \times 1$ est connexe par arcs mais pas localement connexe.
 4. L'exemple précédent montre que l'adhérence d'un connexe par arcs (la partie droite de Γ) n'est pas nécessairement connexe par arcs (la partie droite de $\bar{\Gamma}$).

Afin d'obtenir une véritable loi de composition, il va falloir s'autoriser à remplacer un chemin par un autre. On rappelle pour cela que nous avons introduit dans la section 1.3 la notion d'homotopie relative à une partie.

Définition 1.4.6 Deux chemins γ et γ' dans X sont *homotopes (à extrémités fixées)* si $\gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma'$.

Remarques 1. On aura donc $\gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma'$ si et seulement si γ et γ' ont mêmes extrémités x et y et s'il existe une application continue $h : [0, 1]^2 \rightarrow X$ telle que pour tout $s, t \in [0, 1]$, on ait

$$h(t, 0) = \gamma(t), \quad h(t, 1) = \gamma'(t), \quad h(0, s) = x \quad \text{et} \quad h(1, s) = y. \quad (1.1)$$

On peut se représenter ces conditions sur le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & & \gamma' \\ & x \longrightarrow & y \\ \uparrow s & \parallel & \parallel \\ & x \longrightarrow & y \\ & & \gamma \\ 0 & & 1 \end{array}$$

2. On dit qu'un chemin γ est *trivial* s'il existe $x \in X$ tel que $\gamma \sim_{\{0,1\}} 1_x$. On dit de même qu'un chemin γ' est *un inverse* pour γ si $\gamma' \sim_{\{0,1\}} \gamma^{-1}$. On dira aussi qu'un chemin γ'' est *un composé* de γ et γ' si $\gamma'' \sim_{\{0,1\}} \gamma \cdot \gamma'$.
3. Un chemin γ est trivial si et seulement si c'est un lacet en x et qu'il existe une application continue $h : [0, 1]^2 \rightarrow X$ telle que pour tout $s, t \in [0, 1]$, on ait

$$h(t, 0) = \gamma(t) \quad \text{et} \quad h(t, 1) = h(0, s) = h(1, s) = x$$

ce qu'on peut représenter par

$$\begin{array}{ccc} x & \xlongequal{\quad} & x \\ \parallel & & \parallel \\ x & \xrightarrow{\gamma} & x. \end{array}$$

4. Un lacet γ est trivial si et seulement si l'application correspondante $\hat{\gamma} : \mathbb{S} \rightarrow X$ se prolonge (à l'intérieur) en une application continue $\tilde{\gamma} : \mathbb{B}^2 \rightarrow X$ (voir exercice 1.18).
5. L'espace ambiant est important : si $X \subset X'$, on peut avoir $\gamma \not\sim 1_x$ lorsque γ est vu comme un chemin dans X bien que $\gamma \sim 1_x$ vu comme chemin dans X' (prendre $X = \mathbb{C}^\times$, $X' = \mathbb{C}$ et $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$).

Proposition 1.4.7 La relation d'homotopie (à extrémités fixées) sur les chemins entre x et y dans X est une relation d'équivalence.

Démonstration. On applique à nouveau le lemme 1.3.3 (variante relative). ■

On désigne par

$$\pi(X) := \mathcal{C}([0, 1], X) / \sim_{\{0,1\}}$$

l'ensemble des chemins à homotopie près et par $[\gamma]$ la classe de γ . On aura donc par définition

$$\gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma' \Leftrightarrow [\gamma] = [\gamma']$$

et ça implique qu'ils ont mêmes extrémités. Si $f : X \rightarrow Y$ est continue et $\gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma'$ dans X , alors $f_*\gamma \sim_{\{0,1\}} f_*\gamma'$. Il suit que f induit une application

$$f_* = \pi(f) : \pi(X) \rightarrow \pi(Y), \quad [\gamma] \mapsto f_*[\gamma] := [f_*\gamma].$$

C'est *fonctoriel* : $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ et $\text{Id}_{X,*} = \text{Id}_{\pi(X)}$.

On peut maintenant définir une notion de connexité bien plus fine :

Définition 1.4.8 L'espace X est *simplement connexe* si $\forall x, y \in X, \exists ![\gamma] : x \sim y$.

Cela signifie qu'il existe toujours un chemin entre deux points x et y et que deux tels chemins sont toujours homotopes.

Exemples 1. \mathbb{R}^n et \mathbb{B}^n sont simplement connexes.

2. \mathbb{S}^n et $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sont simplement connexes pour $n \geq 2$ (voir exercice 1.19).
3. \mathbb{S} et \mathbb{C}^\times ne sont pas simplement connexes (voir théorème 2.2.13).
4. \mathbb{S}^0 et \mathbb{R}^\times ne sont pas simplement connexes car ils ne sont pas connexes !
5. Une variété topologique est localement simplement connexe.
6. La boucle d'oreille hawaïenne $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{S}((1/n, 0), 1/n) \subset \mathbb{R}^2$ n'est pas localement simplement connexe.

Remarques 1. Un espace X est connexe par arcs (resp. simplement connexe) si et seulement si l'application

$$\pi(X) \rightarrow X \times X, \quad [\gamma] \mapsto (\gamma(0), \gamma(1)) \tag{1.2}$$

est surjective (resp. bijective).

2. Un espace simplement connexe est connexe par arcs.
3. Un espace convexe (ou étoilé) est simplement connexe.
4. On montrera qu'un espace contractile est simplement connexe (corollaire 2.2.9).
5. On montrera plus généralement que, si $X \sim Y$, alors X est simplement connexe si et seulement si Y est simplement connexe (corollaire 2.2.9 encore).

Proposition 1.4.9 Si γ' est une reparamétrisation d'un chemin γ dans X , alors $\gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma'$.

Démonstration. Si on désigne par $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la reparamétrisation, alors $\text{Id} \sim_{\{0,1\}} f$ car $[0, 1]$ est simplement connexe et donc $\gamma = \text{Id}^*\gamma \sim_{\{0,1\}} f^*\gamma = \gamma'$. ■

Lemme 1.4.10 Si γ_1 et γ'_1 sont deux chemins composables dans X et si $\gamma_1 \sim_{\{0,1\}} \gamma_2$ et $\gamma'_1 \sim_{\{0,1\}} \gamma'_2$, alors γ_2 et γ'_2 sont composables et $\gamma_1 \cdot \gamma'_1 \sim_{\{0,1\}} \gamma_2 \cdot \gamma'_2$.

Démonstration. Si on désigne par h et h' les homotopies, il suffit de poser

$$\forall t \in [0, 1], \quad h''(t, s) = \begin{cases} h(2t, s) & \text{si } t \leq 1/2 \\ h'(2t - 1, s) & \text{si } t > 1/2. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Remarques 1. On peut décomposer un chemin γ dans X . Si $\tau \in [0, 1]$ et qu'on pose $\gamma_1(t) = \gamma(\tau t)$ et $\gamma_2(t) = \gamma(\tau + (1 - \tau)t)$, alors $\gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma_1 \cdot \gamma_2$. En effet,

$$\forall t \in [0, 1], \quad (\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma(2\tau t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \gamma(\tau + 2(1 - \tau)t) & \text{si } t > 1/2 \end{cases}$$

est une reparamétrisation de γ .

2. Comme conséquence du lemme, on voit que la composition des chemins passe au quotient pour fournir une composition sur $\pi(X)$: on peut poser $[\gamma][\gamma'] := [\gamma \cdot \gamma']$ lorsque les chemins sont composables.
3. Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, on aura $f_*([\gamma][\gamma']) = (f_*[\gamma])(f_*[\gamma'])$.

Les chemins (à homotopie près) forment ce qu'on appelle un *groupoïde* :

Théoreme 1.4.11 1. Si $\gamma : x \sim y$, $\gamma' : y \sim z$ et $\gamma'' : z \sim w$, alors

$$(\gamma \cdot \gamma') \cdot \gamma'' \sim_{\{0,1\}} \gamma \cdot (\gamma' \cdot \gamma'')$$

2. Si $\gamma : x \sim y$, alors

$$1_x \cdot \gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma \text{ et } \gamma \cdot 1_y \sim_{\{0,1\}} \gamma.$$

3. Si $\gamma : x \sim y$, alors

$$\gamma \cdot \gamma^{-1} \sim_{\{0,1\}} 1_x \text{ et } \gamma^{-1} \cdot \gamma \sim_{\{0,1\}} 1_y.$$

Démonstration. Par définition, on a pour tout $t \in [0, 1]$,

$$((\gamma \cdot \gamma') \cdot \gamma'')(t) = \begin{cases} \gamma(4t) & \text{si } t \leq 1/4 \\ \gamma'(4t - 1) & \text{si } 1/4 < t \leq 1/2 \\ \gamma''(2t - 1) & \text{si } t > 1/2 \end{cases}$$

et

$$(\gamma \cdot (\gamma' \cdot \gamma''))(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \gamma'(4t - 2) & \text{si } 1/2 < t \leq 3/4 \\ \gamma''(4t - 3) & \text{si } t > 3/4. \end{cases}$$

Il suffit donc de composer $\gamma \cdot (\gamma' \cdot \gamma'')$ avec la reparamétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} 2t & \text{si } t \leq 1/4 \\ t + 1/4 & \text{si } 1/4 < t \leq 1/2 \\ t/2 + 1/2 & \text{si } t > 1/2 \end{cases}$$

pour tomber sur $(\gamma \cdot \gamma') \cdot \gamma''$.

On fonctionne de même pour la seconde assertion. Pour $t \in [0, 1]$, on a

$$(1_x \cdot \gamma)(t) = \begin{cases} x & \text{si } t \leq 1/2 \\ \gamma(2t - 1) & \text{si } t > 1/2 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\gamma \cdot 1_y)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ y & \text{si } t > 1/2. \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre les reparamétrisations de γ :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1/2 \\ 2t - 1 & \text{si } t > 1/2 \end{cases} \quad \text{et} \quad g : t \mapsto \begin{cases} 2t & \text{si } t \leq 1/2 \\ 1 & \text{si } t > 1/2 \end{cases}$$

respectivement.

Enfin, pour la dernière assertion, on aura pour $t \in [0, 1]$,

$$(\gamma \cdot \gamma^{-1})(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \gamma(2(1-t)) & \text{si } t > 1/2 \end{cases}$$

Il suffit alors de poser

$$h(t, s) = \begin{cases} \gamma(2(1-s)t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \gamma(2(1-s)(1-t)) & \text{si } t > 1/2 \end{cases}$$

(et de remarquer que $(\gamma^{-1})^{-1} = \gamma$). ■

Corollaire 1.4.12 Un espace topologique X est simplement connexe si et seulement s'il est connexe par arcs et tout lacet est homotope au lacet constant.

Démonstration. Les conditions sont clairement nécessaires. Pour la réciproque, il suffit de montrer que l'application (1.2) est injective. Or, si on se donne $\gamma, \gamma' : x \sim y$, on aura

$$\gamma' \sim_{\{0,1\}} \gamma' \cdot 1_x \sim_{\{0,1\}} \gamma' \cdot (\gamma^{-1} \cdot \gamma) \sim_{\{0,1\}} (\gamma' \cdot \gamma^{-1}) \cdot \gamma \sim_{\{0,1\}} 1_x \cdot \gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma. \quad \blacksquare$$

Il est parfois nécessaire de considérer des homotopies qui ne fixent pas les extrémités :

Lemme 1.4.13 Soit $h : \gamma \sim \gamma'$ une homotopie quelconque (ne fixant pas nécessairement les extrémités). On pose

$$\forall t \in [0, 1], \quad \delta(t) = h(0, t) \quad \text{et} \quad \delta'(t) = h(1, t).$$

On a alors

$$\gamma \cdot \delta' \sim_{\{0,1\}} \delta \cdot \gamma'.$$

Démonstration. On a

$$\forall t \in [0, 1], \quad (\gamma \cdot \delta')(t) = \begin{cases} \gamma(2t) = h(2t, 0) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \delta'(2t - 1) = h(1, 2t - 1) & \text{si } t > 1/2 \end{cases}$$

et

$$\forall t \in [0, 1], \quad (\delta \cdot \gamma')(t) = \begin{cases} \delta(2t) = h(0, 2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \gamma'(2t - 1) = h(2t - 1, 1) & \text{si } t > 1/2. \end{cases}$$

Il suffit donc d'utiliser l'homotopie suivante :

$$\forall t \in [0, 1], \quad g(t, s) = \begin{cases} \delta(2t) = h(0, 2t) & \text{si } t \leq s/2 \\ h(2t - s, s) & \text{si } s/2 < t \leq (s+1)/2 \\ \delta'(2t - 1) = h(1, 2t - 1) & \text{si } t > (s+1)/2. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Proposition 1.4.14 Soit $h : f \sim g : X \rightarrow Y$ et $\gamma : x_1 \sim x_2$ dans X . On pose

$$\forall t \in [0, 1], \quad \delta_1(t) = h(x_1, t) \quad \text{et} \quad \delta_2(t) = h(x_2, t).$$

On a alors

$$(f_*\gamma) \cdot \delta_2 \sim_{\{0,1\}} \delta_1 \cdot (g_*\gamma)$$

Démonstration. On considère l'homotopie composée

$$h' : [0, 1] \times [0, 1] \xrightarrow{\gamma \times \text{Id}_{[0,1]}} X \times [0, 1] \xrightarrow{h} Y$$

entre $f_*\gamma$ et $g_*\gamma$. On peut alors appliquer le lemme 1.4.13. ■

1.5 Exercices

1.5.1 Topologie

- Exercice 1.1** 1. Soient I et J deux intervalles infinis de \mathbb{R} . Montrer qu'il existe une bijection entre I et J . Montrer qu'il existe une bijection continue si et seulement si I et J sont tous les deux ouverts, ou fermés bornés ou semi-ouverts. Montrer qu'alors c'est un homéomorphisme.
2. Montrer que si $m, n > 0$, il existe une bijection entre \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m .
3. Montrer qu'il existe une bijection continue $[0, 1[\rightarrow \mathbb{S}$ mais pas d'homéomorphisme.
4. Montrer qu'il n'existe pas de surjection continue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus 0$ (et donc pas d'homéomorphisme).
5. Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (et donc pas d'homéomorphisme).
6. Montrer ^a qu'il existe une surjection continue $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ (*courbe de Péano* par exemple) mais pas de bijection continue (et donc pas d'homéomorphisme).

a. Le résultat reste valide si on remplace $[0, 1]^2$ par n'importe quel espace compact connexe localement connexe à base dénombrable (théorème de Hahn–Mazurkiewicz).

Solution. 1. On procède à l'envers. On remarque d'abord que deux intervalles bornés qui sont ouverts, ou fermés ou semi-ouverts sont homéomorphes (par une application affine). On rappelle ensuite que les applications

$$\mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[\quad \text{ou} \quad \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1[, \quad x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

sont des homéomorphismes. On en déduit que deux intervalles ouverts ou semi-ouverts sont automatiquement homéomorphes. La réciproque résulte du théorème de la bijection : une application continue sur un intervalle est injective si et seulement si elle est strictement monotone. Or, si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante alors $f(]a, b[) =]\inf f(x), \sup f(x)[$. Les autres cas se traitent de la même manière.

On considère maintenant la notion de cardinal d'un ensemble. On rappelle que, par définition, $\#X = \#Y$ (resp. $\#X \leq \#Y$) si et seulement s'il existe une bijection (resp. injection) $X \rightarrow Y$ et le théorème de Cantor-Bernstein dit que \leq est une relation d'ordre sur les cardinaux. Pour terminer, il suffit donc de montrer que si I est un intervalle infini, il existe une application injective $\mathbb{R} \hookrightarrow I$. Quitte à remplacer \mathbb{R} par un intervalle ouvert borné, c'est immédiat.

2. Il suffit de traiter le cas de \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 , car on aura alors des bijections $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^{n+1}$, et il suffit en fait de montrer que $\#\mathbb{R}^2 \leq \#\mathbb{R}$. On utilise alors le fait que, si $X \neq \emptyset$, alors $\#X \leq \#Y$ si et seulement s'il existe une surjection $Y \rightarrow X$. Il suffit alors d'envoyer, en écriture décimale, $\sum a_i 10^i$ sur $(\sum a_{2i} 10^i, \sum a_{2i+1} 10^i)$.
3. Il s'agit bien sûr de $t \mapsto e^{2i\pi t}$. Pour la seconde assertion, il suffit de remarquer que \mathbb{S} est compact mais pas $[0, 1[$.
4. Il suffit de remarquer que \mathbb{R} est connexe mais pas $\mathbb{R} \setminus 0$.

5. S'il existait une bijection continue $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, alors il existerait une bijection continue $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ mais la source est connexe et pas le but.
6. On rappelle que la courbe de Péano est donnée par $t \mapsto (x, y)$ où, si on pose

$$t = \sum_{k \geq 0} t_k 3^{-k}, \quad x = \sum_{k \geq 0} x_k 3^{-k} \quad \text{et} \quad y = \sum_{k \geq 0} y_k 3^{-k}$$

avec $t_n, x_n, y_n \in \{0, 1, 2\}$, alors on a

$$x_n = \begin{cases} t_{2n-1} & \text{si } \sum_{k=1}^{n-1} t_{2k} \equiv 0 \pmod{2} \\ 2 - t_{2n-1} & \text{sinon} \end{cases} \pmod{3}$$

et

$$y_n = \begin{cases} t_{2n} & \text{si } \sum_{k=1}^n t_{2k-1} \equiv 0 \pmod{2} \\ 2 - t_{2n} & \text{sinon.} \end{cases} \pmod{3}$$

Par contre, il n'existe pas de bijection continue. Sinon, ce serait un homéomorphisme car $[0, 1]$ est compact et $[0, 1]^2$ est séparé. Mais $[0, 1] \setminus \{1/2\}$ n'est pas connexe, alors que, si a désigne l'image de $1/2$, alors $[0, 1]^2 \setminus \{a\}$ est toujours connexe. ■

- Exercice 1.2** 1. On désigne par B_n , U_n et Δ_n les groupes des matrices réelles inversibles d'ordre n qui sont respectivement triangulaires supérieures, triangulaires supérieures unipotentes (des 1 sur la diagonale) et diagonales. Montrer que la multiplication induit un homéomorphisme $\Delta_n \times U_n \simeq B_n$.
2. On désigne maintenant par O_n le groupe orthogonal et par $B_n^+ \subset B_n$ le sous-groupe des matrices à coefficients diagonaux > 0 . Montrer^a que la multiplication induit un homéomorphisme $O_n \times B_n^+ \simeq GL_n$.

a. C'est la décomposition d'Iwasawa (ou de Gram-Schmidt).

- Solution.* 1. Dans l'espace vectoriel M_n des matrices carrées, on a $c = ab$ si et seulement si $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$. En particulier, les composantes sont polynomiales et la multiplication est donc continue. Si a est diagonale, on aura $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$, et si de plus b est triangulaire unipotente, alors $a_{ii} = c_{ii}$ et $b_{ij} = c_{ij}/c_{ii}$. On a donc bien une bijection et c'est un homéomorphisme car toutes les composantes de l'application réciproque sont continues (car rationnelles).
2. On a $O_n \cap B_n^+ = \{I_n\}$. Il en résulte que la multiplication $O_n \times B_n^+ \rightarrow GL_n$ est injective. Si on écrit $a = [a_1, \dots, a_n]$ et $c = [c_1, \dots, c_n]$ comme suite de vecteurs colonnes, on aura

$$\sum_{i=1}^j b_{ij} a_i = c_j.$$

Puisque (a_1, \dots, a_n) est une base orthonormale, on voit que $b_{ij} = c_j^t a_i$ est uniquement déterminé par a et c . De plus, on aura

$$b_{jj} a_j = a'_j := c_j - \sum_{i=1}^{j-1} b_{ij} a_i$$

et donc $b_{jj} = |b_{jj}| = \|a'_j\|$. C'est le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt : on définit par récurrence

$$b_{ij} := c_j^t a_i \ (i < j), \quad a'_j := c_j - \sum_{i=1}^{j-1} b_{ij} a_i, \quad b_{jj} := \|a'_j\| \quad \text{et} \quad a_j := \frac{a'_j}{b_{jj}}.$$

On a donc bien un homéomorphisme. ■

1.5.2 Connexité, compacité

Exercice 1.3 1. Soit C (resp. C') une partie convexe compacte de \mathbb{R}^n telle que $0 \in \overset{\circ}{C}$ (resp. $0 \in \overset{\circ}{C'}$).

- (a) Montrer que si $x \neq 0$, alors $[0x)$ rencontre ∂C en un unique point a $y =: \partial_C(x)$ et que $[0x) \cap C = [0y]$.
- (b) Montrer que l'application $f : \partial C \rightarrow \partial C', x \mapsto \partial_{C'}(x)$ est bijective.
- (c) Montrer que f se prolonge en une application bijective

$$F : C \rightarrow C', \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\|x\|}{\|\partial_C(x)\|} \partial_{C'}(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (d) Montrer que f et F sont des homéomorphismes (on se ramènera au cas $C' = \mathbb{B}^n$).
- 2. En déduire que si C et C' sont des convexes compacts de même dimension finie, alors il existe un homéomorphisme $C \simeq C'$ qui induit un homéomorphisme $\partial C \simeq \partial C'$.

a. C'est la projection radiale issue de 0.

Solution. 1. (a) Si $x \neq 0$, alors $[0x) \cap C$ est une partie convexe fermée bornée de la demi-droite qui contient 0 et c'est donc un intervalle de la forme $[0y]$. De plus, $[0x) \cap \overset{\circ}{C} \subset [0y[$ (image inverse de l'intérieur) et donc $y \in \partial C$. Pour l'unicité, il suffit de montrer que $[0y[\subset \overset{\circ}{C}$. On peut remplacer C par l'enveloppe convexe de y et de $\mathbb{B}(0, r) \subset C$. Si $z \in [0y[$, alors $\mathring{\mathbb{B}}(z, r\|y - z\|/\|y\|) \subset \overset{\circ}{C}$. En effet, si $b \in \mathring{\mathbb{B}}(z, r\|y - z\|/\|y\|)$ et qu'on pose $a := y + \frac{\|y\|}{\|y - z\|}(b - y)$, on aura $a \in \mathbb{B}(0, r)$ et $b \in [ay]$.

- (b) Il résulte de la première question que l'application $f^{-1} : \partial C' \rightarrow \partial C, x' \mapsto \partial_C(x')$ est la réciproque de f .
- (c) L'application

$$F^{-1} : C' \rightarrow C, \quad x' \mapsto \begin{cases} \frac{\|x'\|}{\|\partial_{C'}(x')\|} \partial_C(x') & \text{si } x' \neq 0 \\ 0 & \text{si } x' = 0 \end{cases}$$

est la réciproque de F .

- (d) On peut supposer par transitivité que $C' = \mathbb{B}^n$. On a alors $f(x) = x/\|x\|$ qui est continue. Puisque ∂C et \mathbb{S}^{n-1} sont compacts, f est un homéomorphisme. De même, on a

$$F^{-1}(x') = \begin{cases} \|x'\| f^{-1}\left(\frac{x'}{\|x'\|}\right) & \text{si } x' \neq 0 \\ 0 & \text{si } x' = 0. \end{cases}$$

L'application F^{-1} est donc continue, y compris en 0, puisque f^{-1} est continue sur un compact et donc bornée. C'est un homéomorphisme car C et \mathbb{B}^n sont compacts.

2. Si C est un convexe de dimension n , on peut supposer que $C \subset \mathbb{R}^n$. Après une translation, on peut supposer que $0 \in \overset{\circ}{C}$. ■

Exercice 1.4 1. Montrer que l'application $x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}$ induit un homéomorphisme $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{B}^n$.

2. On désigne par $a := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et on identifie \mathbb{R}^n avec l'hyperplan d'équation $x_{n+1} = 0$ dans \mathbb{R}^{n+1} .

- (a) Soit $x \in \mathbb{S}^n$. Montrer que si $x \neq a$, la droite (ax) rencontre \mathbb{R}^n en un unique point $f(x)$ que l'on déterminera.
 (b) Montrer que l'application $f : \mathbb{S}^n \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est bijective et déterminer son inverse.
 (c) En déduire que f est un homéomorphisme a .

a. C'est la projection stéréographique (sur l'hyperplan équatorial).

Solution. 1. On vérifie aisément que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad y = \frac{x}{1 + \|x\|} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{y}{1 - \|y\|} \\ \|y\| < 1. \end{cases}$$

En effet, puisque $\|x\| < 1 + \|x\|$, si $y := \frac{x}{1+\|x\|}$, on aura toujours $\|y\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < 1$. On suppose dorénavant que $\|y\| < 1$. On a alors

$$\begin{aligned} y = \frac{x}{1 + \|x\|} &\Leftrightarrow y = \frac{x}{1 + \|x\|} \text{ et } \|y\| = \frac{\|x\|}{1 + \|x\|} \\ &\Leftrightarrow x = (1 + \|x\|)y \text{ et } 1 + \|x\| = \frac{1}{1 - \|y\|} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{1 - \|y\|} \text{ et } \|x\| = \frac{\|y\|}{1 - \|y\|} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{1 - \|y\|}. \end{aligned}$$

2. (a) Si $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$, alors la droite (ax) est paramétrée par

$$t \mapsto (tx_1, \dots, tx_n, 1 + t(x_{n+1} - 1))$$

et $f(x)$ est donc caractérisé par $1 + t(x_{n+1} - 1) = 0$ ou encore $t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$. On a donc

$$f(x) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

- (b) On va donner deux démonstrations.

i. Pour déterminer l'inverse de f , on doit résoudre

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad y_i = \frac{x_i}{1 - x_{n+1}} \quad \text{et} \quad \|x\| = 1.$$

On aura donc obligatoirement

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{(1 - x_{n+1})^2} = \frac{\|x\|^2 - x_{n+1}^2}{(1 - x_{n+1})^2} = \frac{1 - x_{n+1}^2}{(1 - x_{n+1})^2} = \frac{1 + x_{n+1}}{1 - x_{n+1}}$$

si bien que $1 + x_{n+1} = \|y\|^2(1 - x_{n+1})$. On en déduit que

$$x_{n+1} = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \quad \text{et} \quad x_i = y_i(1 - x_{n+1}) = y_i \left(1 - \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right) = \frac{2y_i}{\|y\|^2 + 1}$$

pour $i = 1, \dots, n$. On voit donc que f est bijective et que

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right).$$

- ii. On procède comme dans la question précédente mais dans l'autre sens. On se donne un point $y \in \mathbb{R}^n$ et on considère l'intersection de la droite (ay) avec la sphère $\mathbb{S}^n \setminus a$, ce qui conduit à poser $x = (ty_1, \dots, ty_n, 1-t)$ avec $t \neq 0$ et à résoudre

$$\sum_{i=1}^n t^2 y_i^2 + (1-t)^2 = 1 \Leftrightarrow t^2 \|y\|^2 - 2t + t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{\|y\|^2 + 1}.$$

On retrouve bien sûr la même formule.

- (c) C'est un homéomorphisme car les composantes de f et f^{-1} sont continues. ■

- Exercice 1.5** 1. Montrer que si X est un espace topologique séparé et que $K, K' \subset X$ sont compacts disjoints, alors il existe des voisinages ouverts disjoints U et U' de K et K' dans X .
2. Soit $p : X \rightarrow X'$ une application surjective continue fermée à fibres compactes ($p^{-1}(x')$ compact si $x' \in X'$). Montrer que si X est séparé, alors X' aussi.
3. Soit $p : X \rightarrow X'$ une application surjective continue fermée. Montrer que si X est compact, alors X' aussi.
4. Montrer que si X est séparé (resp. compact) et $A \subset X$ est compact, alors X/A est séparé (resp. compact).

Solution. 1. On traite d'abord le cas où $K = \{x\}$ est réduit à un point. Si $x' \in K'$, il existe des voisinages ouverts disjoints $U_{x'}$ et $U'_{x'}$ de x et x' respectivement. Puisque K' est compact, il existe $x'_1, \dots, x'_n \in K'$ tels que $K' \subset U' := \bigcup_{i=1}^n U'_{x'_i}$. On pose alors $U := \bigcap_{i=1}^n U_{x'_i}$. On traite maintenant le cas général. Par ce qui précède, il existe pour tout $x \in K$, des voisinages ouverts disjoints U_x et U'_x de x et K' respectivement. Puisque K est compact, il existe $x_1, \dots, x_n \in K$ tels que $K \subset U := \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. On pose alors $U' := \bigcap_{i=1}^n U'_{x_i}$.

2. On se donne $x' \neq y' \in X'$. Par hypothèse, $p^{-1}(x')$ et $p^{-1}(y')$ sont des compacts nécessairement disjoints dans un espace séparé. Il existe donc des voisinages ouverts disjoints $U \supset p^{-1}(x')$ et $V \supset p^{-1}(y')$. Puisque p est une application

fermée, $p(X \setminus U)$ et $p(X \setminus V)$ sont fermés dans X' et leurs complémentaires U' et V' sont donc ouverts. D'autre part, si $z' \in X'$, on aura

$$z' \in U' \Leftrightarrow z' \notin p(X \setminus U) \Leftrightarrow p^{-1}(z') \cap (X \setminus U) = \emptyset \Leftrightarrow p^{-1}(z') \subset U$$

et le résultat analogue pour V . On en déduit que immédiatement que $x' \in U'$ et $y' \in V'$. Enfin, si $z' \in U' \cap V'$, alors $p^{-1}(z') \subset U \cap V = \emptyset$, ce qui est impossible car f est surjective.

3. Il suffit de montrer que X' est séparé car l'image d'un compact par une application continue dans un espace séparé est toujours compact. Puisque X est séparé, ses points sont fermés. Puisque p est surjective et fermée, les points de X' aussi sont fermés. Puisque f est continue, les fibres sont fermées, donc compactes car tout fermé d'un compact est compact. On peut donc appliquer le résultat précédent.
4. Il suffit de vérifier les hypothèses mais si F est un fermé de X et $p : X \twoheadrightarrow X/A$ désigne l'application quotient, on aura $p^{-1}(p(F)) = F$ si $F \cap A = \emptyset$ et $p^{-1}(p(F)) = F \cup A$ sinon. Puisque A est compact dans X séparé, c'est un fermé et p est donc fermée. De plus, si $x' \in X/A$ et $x' = p(x)$, alors $p^{-1}(x') = \{x\}$ si $x \notin A$ et $p^{-1}(x') = A$ sinon et les fibres sont donc compactes. ■

Exercice 1.6 Montrer que la *bouteille de Klein*, c'est-à-dire, le quotient \mathbb{K}_2 de \mathbb{T}^2 par la relation

$$(z, w) \mathcal{R} (z', w') \Leftrightarrow \begin{cases} zz' = 1 \\ w + w' = 0, \end{cases}$$

est un espace compact (on rappelle que $\mathbb{T} = \mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$).

Solution. Puisque \mathbb{T}^2 est compact, il suffit de montrer que l'application canonique $p : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{K}_2$ est fermée. L'automorphisme $\sigma : (z, w) \mapsto (z^{-1}, -w)$ de \mathbb{T}^2 est continu. Or si $F \subset \mathbb{T}^2$, on a $p^{-1}(p(F)) = F \cup \sigma^{-1}(F)$. Donc, si F est fermé dans \mathbb{T}^2 , alors $p^{-1}(p(F))$ aussi et il suit que $p(F)$ est fermé dans \mathbb{K}_2 par définition de la topologie quotient. ■

Exercice 1.7 Soit Z une partie de Y , $f : Z \rightarrow X$ une application continue et

$$p : X \coprod_f Y \twoheadrightarrow X \coprod_f Y$$

la projection.

1. Montrer que

$$\forall A \subset X, \quad p^{-1}(p(A)) = A \coprod f^{-1}(A)$$

et que

$$\forall B \subset Y, \quad p^{-1}(p(B)) = f(B \cap Z) \coprod f^{-1}(f(B \cap Z)) \cup B.$$

2. Montrer que p induit une *bijection* continue entre $X \coprod Y \setminus Z$ et $X \coprod_f Y$.

3. Supposons que Z est fermé dans Y . Montrer que alors p induit un homéomorphisme entre X (resp. $Y \setminus Z$) et un fermé (resp. un ouvert) de $X \coprod_f Y$.
4. Supposons que Z est compact. Montrer que si X et Y sont séparés (resp. compacts), alors $X \coprod_f Y$ est séparé (resp. compact).

Solution. 1. Par définition, $X \coprod_f Y$ est le quotient de $X \coprod Y$ par la relation engendrée par $f(z)\mathcal{R}z$ pour $z \in Z$. En d'autres termes, les seules relations non triviales sont

- $x \sim z$ (et $z \sim x$) lorsque $x \in X, z \in Z$ et $f(z) = x$,
- $z \sim z'$ lorsque $z, z' \in Z$ et $f(z) = f(z')$.

On voit donc que la classe de $x \in X$ est $p^{-1}(p(x)) = x \cup f^{-1}(x)$, la classe de $z \in Z$ est $p^{-1}(p(z)) = f(z) \cup f^{-1}(f(z))$ et la classe de $y \in Y \setminus Z$ est $p^{-1}(p(y)) = y$. On en déduit immédiatement les formules annoncées.

2. Considérons l'application induite $\varphi : X \coprod Y \setminus Z \rightarrow X \coprod_f Y$. Si $x \in X$, on a $\varphi^{-1}(p(x)) = x$, si $y \in Y \setminus Z$, alors $\varphi^{-1}(p(y)) = y$ et si $z \in Z$, alors $\varphi^{-1}(p(z)) = f(z)$. Cela implique que l'application est bijective (l'image inverse d'un singleton est un singleton).
3. On a une application injective continue $i : X \hookrightarrow X \coprod_f Y$ et il suffit donc de montrer qu'elle est fermée. Si F est un fermé de X alors F est fermé dans $X \coprod Y$. De plus, puisque f est continue, $f^{-1}(F)$ est fermé dans Z qui est fermé dans Y qui est lui-même fermé dans $X \coprod Y$. Il en résulte que $p^{-1}(i(F)) = p^{-1}(p(F)) = F \cup f^{-1}(F)$ est fermé dans $X \coprod Y$ et donc que $i(F)$ est fermé dans $X \coprod_f Y$. On a de même une application injective continue $j : Y \setminus Z \hookrightarrow X \coprod_f Y$ et il suffit donc de montrer qu'elle est ouverte. Si U est un ouvert de $Y \setminus Z$, alors $p^{-1}(j(U)) = p^{-1}(p(U)) = U$ est ouvert dans $Y \setminus Z$, et donc aussi dans Y (puisque on a supposé Z fermé), et donc aussi finalement dans $X \coprod Y$. Il suit que $j(U)$ est ouvert dans $X \coprod_f Y$.
4. Grâce à l'exercice 1.5, il suffit de montrer que p est fermée à fibres compactes. Tout fermé de $X \coprod Y$ s'écrit $A \cup B$ avec A fermé dans X et B fermé dans Y . Puisque p est une application quotient, pour montrer que c'est une application fermée, il suffit de montrer que $p^{-1}(p(A))$ et $p^{-1}(p(B))$ sont fermés. Puisque f est continue, $f^{-1}(A)$ est fermé dans Z . Puisque Z est compact dans Y séparé, Z est fermé dans Y . Il suit que $f^{-1}(A)$ est fermé dans Y et donc $p^{-1}(p(A)) = A \cup f^{-1}(A)$ est fermé dans $X \coprod Y$. Maintenant, puisque $B \cap Z$ est fermé dans Z qui est compact, $B \cap Z$ est aussi compact. Puisque X est séparé et f continue, $f(B \cap Z)$ est compact et donc fermé dans X séparé. Il suit que $f^{-1}(f(B \cap Z))$ est fermé dans Z et donc aussi dans Y . On en déduit que $p^{-1}(p(B)) = f(B \cap Z) \cup f^{-1}(f(B \cap Z)) \cup B$ est fermé dans $X \coprod Y$. Il faut encore s'assurer que p est à fibres compactes. Cela résulte des formules ci-dessus et du fait que f est à fibres compactes puisque Z est compact et Y séparé. ■

- Exercice 1.8**
1. Montrer que \mathbb{R}^n , \mathbb{B}^n et \mathbb{S}^n sont des variétés topologiques.
 2. Montrer que $\mathbb{B}^n / \mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{S}^n$. En déduire que $[0, 1] / \{0, 1\} \simeq \mathbb{S}$.
 3. Montrer que $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{B}^n \coprod_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbb{B}^n$.
 4. Montrer que $\mathbb{S}^n / (\mathbb{S}^{n-1} \times 0) \simeq \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$.

5. Montrer que $\mathbb{B}^n/(\mathbb{B}^{n-1} \times 0) \simeq \mathbb{B}^n \vee \mathbb{B}^n$.

Solution. 1. Pour \mathbb{R}^n , c'est clair et on a vu dans l'exercice 1.4 que $\mathring{\mathbb{B}}^n \simeq \mathbb{R}^n$.

D'autre part, si $x \in \mathbb{S}^n$ et $a \neq x$, il résulte de l'exercice 1.4 que $\mathbb{S}^n \setminus a$ est un voisinage ouvert de x qui est homéomorphe à \mathbb{R}^n .

2. On a une suite d'homéomorphismes $\mathring{\mathbb{B}}^n \simeq \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{S}^n \setminus a$. On complète avec la projection $\mathbb{S}^{n-1} \twoheadrightarrow a$ pour obtenir une application surjective $p : \mathbb{B}^n \twoheadrightarrow \mathbb{S}^n$ qui induit une bijection $\mathbb{B}^n/\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{S}^n$. Puisque la source (grâce à l'exercice 1.5) et le but sont compacts, il suffit de montrer que p est continue. On propose deux solutions :

(a) On se donne un ouvert $U \subset \mathbb{S}^n$ et on veut montrer que $p^{-1}(U)$ est ouvert. Si $a \notin U$, alors U est un ouvert de $\mathbb{S}^n \setminus a$ et donc $p^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathring{\mathbb{B}}^n$ qui est lui même ouvert dans \mathbb{B}^n . Sinon, on considère le complémentaire F de U . C'est un fermé de \mathbb{S}^n qui ne contient pas a et donc un fermé de $\mathbb{S}^n \setminus a$. Il suit que $p^{-1}(F)$ est un fermé de \mathbb{B}^n et $p^{-1}(U)$ est donc bien ouvert.

(b) Par définition, on a $p = \psi \circ \varphi$ avec

$$\begin{array}{ccc} \mathring{\mathbb{B}}^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & \frac{x}{1-\|x\|} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{S}^n \\ y & \longmapsto & \left(\frac{2y}{\|y\|^2+1}, \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1} \right). \end{array}$$

On se donne une suite convergente $x_n \rightarrow x$ dans \mathbb{B}^n et on veut montrer que $p(x_n) \rightarrow p(x)$. On se ramène rapidement au cas où $x_n \in \mathring{\mathbb{B}}^n$ et $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ et on veut donc montrer que $p(x_n) \rightarrow a = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Puisque $\|x_n\| \rightarrow 1$, on voit que $\|\varphi(x_n)\| \rightarrow +\infty$ et ensuite que $\psi(\varphi(x_n)) \rightarrow a$.

Enfin, puisque l'application $[0, 1] \rightarrow \mathbb{B}, t \mapsto 2t - 1$ est un homéomorphisme qui induit une bijection entre $\{0, 1\}$ et \mathbb{S}^0 , on a une suite d'homéomorphismes $[0, 1]/\{0, 1\} \simeq \mathbb{B}/\mathbb{S}^0 \simeq \mathbb{S}$.

3. On désigne par E^\pm le demi-espace $\pm x_{n+1} \geq 0$ et on pose $\mathbb{B}^{n\pm} := \mathbb{S}^n \cap E^\pm$. On considère la projection $p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (sur les n premiers facteurs). Montrons que si $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, alors

$$\|x\| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \|p(x)\| \leq 1 \\ x_{n+1} = \pm \sqrt{1 - \|p(x)\|^2}. \end{cases}$$

En effet, on a $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + x_{n+1}^2$ si bien que $\|x\| = 1$ si et seulement si $x_{n+1}^2 = 1 - \|p(x)\|^2$, c'est-à-dire $1 - \|p(x)\|^2 \geq 0$ et $x_{n+1} = \pm \sqrt{1 - \|p(x)\|^2}$. On en déduit que p induit un homéomorphisme $\mathbb{B}^{n\pm} \simeq \mathbb{B}^n$ et un homéomorphisme $\mathbb{B}^{n+} \cap \mathbb{B}^{n-} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$. En considérant les applications inverses $\mathbb{B}^n \simeq \mathbb{B}^{n\pm} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ qui coïncident sur \mathbb{S}^{n-1} , on obtient par définition une application continue $\mathbb{B}^n \coprod_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$. C'est une bijection continue entre deux compacts (grâce à l'exercice 1.7) et donc un homéomorphisme.

4. On va donner deux démonstrations.

(a) On reprend les notations de la question précédente. La projection stéréographique $f : \mathbb{S}^n \setminus a \rightarrow \mathbb{R}^n$ induit un homéomorphisme $\mathbb{B}^{n-} \simeq \mathbb{B}^n$. En effet, on sait que

$$\|f(x)\|^2 = \frac{1 + x_{n+1}}{1 - x_{n+1}}$$

et on aura donc

$$\|f(x)\| \leq 1 \Leftrightarrow 1 + x_{n+1} \leq 1 - x_{n+1} \Leftrightarrow x_{n+1} \leq 0.$$

Le même calcul montre que $\|f(x)\| = 1 \Leftrightarrow x_{n+1} = 0$. Autrement dit,

$$f(x) \in \mathbb{S}^{n-1} \Leftrightarrow x \in \mathbb{S}^n \cap (\mathbb{R}^n \times 0) = \mathbb{S}^{n-1} \times 0.$$

On en déduit donc un homéomorphisme $\mathbb{B}^{n-}/(\mathbb{S}^{n-1} \times 0) \simeq \mathbb{B}^n/\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{S}^n$. Par projection stéréographique à partir de $-a$, on a aussi un homéomorphisme analogue $\mathbb{B}^{n+}/(\mathbb{S}^{n-1} \times 0) \simeq \mathbb{S}^n$ et on recolle. Plus précisément, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}^{n-}/(\mathbb{S}^{n-1} \times 0) \amalg \mathbb{B}^{n+}/(\mathbb{S}^{n-1} \times 0) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{S}^n \amalg \mathbb{S}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{S}^n/(\mathbb{S}^{n-1} \times 0) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n. \end{array}$$

- (b) Soit $X := \mathbb{B}^{n+1}(c, 1/2) \cup \mathbb{B}^{n+1}(-c, 1/2)$ avec $c = (0, \dots, 0, 1/2)$ si bien que $\partial X = \mathbb{S}^n(c, 1/2) \cup \mathbb{S}^n(-c, 1/2)$. On a un homéomorphisme évident $\mathbb{B}^{n+1} \vee \mathbb{B}^{n+1} \simeq X$ qui induit un homéomorphisme $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n \simeq \partial X$. On va maintenant construire la projection radiale⁸ $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \partial X$ issue de 0. On a

$$\forall y \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \|y \pm c\|^2 = \|y\|^2 \pm 2y \cdot c + \|c\|^2 = \|y\|^2 \pm y_{n+1} + 1/4.$$

On en déduit que

$$y \in \partial X \Leftrightarrow \|y \pm c\|^2 = 1/4 \Leftrightarrow |y_{n+1}| = \|y\|^2.$$

En particulier, si $y = tx$ avec $x \in \mathbb{S}^n$ et $t > 0$, on voit que

$$y \in \partial X \Leftrightarrow t|x_{n+1}| = t^2\|x\|^2 \Leftrightarrow t = |x_{n+1}| \Leftrightarrow y = |x_{n+1}|x.$$

On peut donc poser

$$f : \mathbb{S}^n \rightarrow \partial X, \quad x \mapsto |x_{n+1}|x.$$

On a

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{n+1} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{S}^{n-1} \times 0.$$

Par propriété universelle du quotient, on en déduit une application continue $\bar{f} : \mathbb{S}^n/(\mathbb{S}^{n-1} \times 0) \rightarrow \partial X$. Puisque la source est compacte, il reste à montrer que \bar{f} est bijective et il suffit de montrer que f induit une bijection $\mathbb{S}^n \setminus (\mathbb{S}^{n-1} \times 0) \rightarrow \partial X \setminus 0$. Si $y = f(x)$, alors $|y_{n+1}| = x_{n+1}^2$ et donc $|x_{n+1}| = \sqrt{|y_{n+1}|}$. On voit donc que pour $y \neq 0$, on a

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{|y_{n+1}|}}y.$$

8. On pourrait aussi considérer la projection horizontale.

5. On va copier presque mot pour mot la seconde démonstration de la question précédente (et on va en fait montrer que $\mathbb{B}^{n+1}/(\mathbb{B}^n \times 0) \simeq \mathbb{B}^{n+1} \vee \mathbb{B}^{n+1}$). Déjà, il suffit de montrer que $\mathbb{B}^{n+1}/(\mathbb{B}^n \times 0) \simeq X$. Les calculs ci-dessus montrent que

$$\forall y \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad y \in X \Leftrightarrow \|y\|^2 \leq |y_{n+1}|.$$

Si $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $y := |x_{n+1}|x$, on aura $|y_{n+1}| = x_{n+1}^2$. Donc, si $\|x\| \leq 1$, on aura

$$\|y\|^2 = x_{n+1}^2 \|x\|^2 \leq x_{n+1}^2 = |y_{n+1}|$$

si bien que $y \in X$. On peut donc définir

$$F : \mathbb{B}^{n+1} \rightarrow X, \quad x \mapsto |x_{n+1}|x$$

exactement comme avant. Bien sûr, $F(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{B}^n \times 0$ si bien que F induit $\bar{F} : \mathbb{B}^{n+1}/(\mathbb{B}^n \times 0) \rightarrow X$. On montre que c'est une bijection (et donc un homéomorphisme) par le même argument que précédemment. ■

- Exercice 1.9** 1. Montrer que $\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{S}^n/\mathcal{R}$ avec $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x + y = 0$.
 2. Montrer que \mathbb{P}^n est compact.
 3. Montrer que $\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{B}^n/\mathcal{R}'$ avec $x \mathcal{R}' y \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ et $x + y = 0$.
 4. Montrer que ^a

$$\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{P}^{n-1} \coprod_p \mathbb{B}^n$$

où $p : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ est l'application canonique.

5. Montrer que \mathbb{P}^n est une variété topologique.
 6. Montrer que l'application $f : z \rightarrow z^2$ induit un homéomorphisme $\mathbb{P} \simeq \mathbb{S}$ et que

$$\mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{S} \coprod_f \mathbb{B}^2.$$

^a. En particulier, on peut identifier $\mathring{\mathbb{B}}^n$ (ou \mathbb{R}^n si on préfère) avec un ouvert de \mathbb{P}^n et \mathbb{P}^{n-1} avec le fermé complémentaire.

Solution. 1. Par définition, $\mathbb{P}^n \simeq (\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0)/\mathcal{S}$ avec $x \mathcal{S} y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times, y = \lambda x$. Si $x, y \in \mathbb{S}^n$ et $x + y = 0$, alors $y = \lambda x$ avec $\lambda = -1$. L'application d'inclusion $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ induit donc une application continue $\mathbb{S}^n/\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{P}^n$. Réciproquement, on considère la rétraction $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{S}^n, x \mapsto x/\|x\|$. Si $y = \lambda x$, alors $r(y) = \pm r(x)$ et donc, soit $r(x) = r(y)$ (réflexivité) ou alors $r(x) + r(y) = 0$. On dispose donc bien d'une application réciproque continue.

2. Il suffit de montrer que l'application quotient $p : \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{S}^n/\mathcal{R}$ est fermée. Or si $F \subset \mathbb{S}^n$ est fermé et qu'on pose $\sigma(x) = -x$, alors $p^{-1}(p(F)) = F \cup \sigma^{-1}(F)$ est bien fermé.

3. On rappelle que $\mathbb{B}^{n+} := \{x \in \mathbb{S}^n, x_{n+1} \geq 0\}$ et que la projection sur les premiers facteurs induit un homéomorphisme $\mathbb{B}^{n+} \simeq \mathbb{B}^n$. On considère l'application composée $\mathbb{B}^n \simeq \mathbb{B}^{n+} \hookrightarrow \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n$. Celle-ci est fermée (continue) comme composée d'applications fermées (continues). Elle est surjective, car si $x \in \mathbb{S}^n$,

soit $x \in \mathbb{B}^{n+}$, ou alors $-x \in \mathbb{B}^{n+}$ et on a $-x\mathcal{R}x$. De plus, l'image de $x \in \mathbb{B}^n$ est la classe de $(x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$ modulo \mathcal{R} . Deux éléments x et y ont même image si et seulement si $(x, \sqrt{1 - \|x\|^2}) + (y, \sqrt{1 - \|y\|^2}) = 0$, ce qui signifie que $x + y = 0$ et $\|x\| = \|y\| = 1$, c'est-à-dire $x\mathcal{R}'y$. L'homéomorphisme annoncé en résulte formellement.

4. L'application $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, x \mapsto (x, 0)$ induit une application injective continue $\mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. On dispose aussi de l'application continue surjective $\mathbb{B}^n \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n$ induite par $y \mapsto (y, \sqrt{1 - \|y\|^2})$. On en déduit une application continue surjective $\mathbb{P}^{n-1} \coprod \mathbb{B}^n \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n$. De plus, on a l'équivalence suivante

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^\times, (y, \sqrt{1 - \|y\|^2}) = \lambda(x, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times, y = \lambda x \\ y \in \mathbb{S}^{n-1}. \end{cases}$$

Par propriété universelle de la somme amalgamée (faire un dessin), on en déduit une application bijective continue entre deux compacts, et donc un homéomorphisme,

$$\mathbb{P}^{n-1} \coprod_p \mathbb{B}^n \simeq \mathbb{P}^n.$$

5. Pour montrer que \mathbb{P}^n est une variété topologique, il suffit de montrer qu'il existe un point qui a un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n . En effet, on peut toujours échanger deux points quelconques par changement de base dans \mathbb{R}^{n+1} . Or il résulte de la description précédente qu'il existe un ouvert homéomorphe à $\mathring{\mathbb{B}}^n$.
6. Puisqu'un nombre complexe (de module 1) a deux racines opposées (de module 1), l'application $f : z \mapsto z^2$ induit une bijection continue entre deux compacts $\mathbb{P} \simeq \mathbb{S}/\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{S}$ et donc un homéomorphisme. On dispose donc d'un homéomorphisme $\mathbb{P} \coprod \mathbb{B}^2 \simeq \mathbb{S} \coprod \mathbb{B}^2$ donné sur le premier terme par $p(z) \mapsto f(z)$ pour $z \in \mathbb{S}$. On en déduit que

$$\mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{P} \coprod_p \mathbb{B}^2 \simeq \mathbb{S} \coprod_f \mathbb{B}^2. \quad \blacksquare$$

Exercice 1.10 Si X et Y deux espaces topologiques avec X séparé, alors la topologie a de $\mathcal{C}(X, Y)$ est la topologie engendrée par les ouverts

$$\mathcal{U}_{K,V} := \mathcal{C}((X, K), (Y, U))$$

où K est compact dans X et V est ouvert dans Y .

1. Montrer que si $\varphi : X \times Y \rightarrow Z$ est une application continue avec Y séparé, alors l'application

$$\tilde{\varphi} : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z), \quad x \mapsto (\varphi_x : y \mapsto \varphi(x, y))$$

est bien définie et continue.

2. Montrer que si X est localement compact, alors l'application

$$\mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y, \quad (f, x) \mapsto f(x)$$

est continue.

3. En déduire que si Y est localement compact, on a une bijection (appelée curryfication)

$$\mathcal{C}(X \times Y, Z) \simeq \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)), \quad \varphi \mapsto \tilde{\varphi}.$$

a. Lorsque Y est un espace métrique, c'est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Solution. 1. Pour tout $x \in X$, puisque φ_x est l'application composée de l'inclusion $Y \hookrightarrow X \times Y, y \mapsto (x, y)$ et de φ qui sont toutes les deux continues, on voit que φ_x est continue. Ensuite, il suffit de montrer que si K est compact dans Y et W est ouvert dans Z , alors $\tilde{\varphi}^{-1}(\mathcal{U}_{K,W})$ est ouvert. Soit $x \in \tilde{\varphi}^{-1}(\mathcal{U}_{K,W})$. On a donc $\tilde{\varphi}(x) = \varphi_x \in \mathcal{U}_{K,W}$, c'est-à-dire $\varphi_x(K) \subset W$. Si $y \in K$, alors $\varphi(x, y) = \varphi_x(y) \in W$. Comme φ est continue, il existe un voisinage ouvert U_y de x dans X et un voisinage ouvert V_y de y dans Y tels que $\varphi(U_y \times V_y) \subset W$. Comme K est compact, il existe y_1, \dots, y_n tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$. On pose $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$. Si $y \in K$, alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $y \in V_{y_i}$. Donc, si $x' \in U$, on a $(x', y) \in U_{y_i} \times V_{y_i}$ et donc $\varphi_{x'}(y) = \varphi(x', y) \in W$. Cela montre que $\varphi_{x'}(K) \subset W$ ou encore que $\tilde{\varphi}(x') = \varphi_{x'} \in \mathcal{U}_{K,W}$. On a donc montré que pour tout $x \in \tilde{\varphi}^{-1}(\mathcal{U}_{K,W})$, il existe un ouvert $U \ni x$ tel que $\tilde{\varphi}(U) \subset \mathcal{U}_{K,W}$, ou encore, que $U \subset \tilde{\varphi}^{-1}(\mathcal{U}_{K,W})$. Cela montre que ce dernier est ouvert.

2. On se donne un point (f, x) de l'ensemble de départ et un voisinage ouvert U de $f(x)$. Puisque f est continue et X localement compact, il existe un voisinage compact K de x tel que $f(K) \subset U$. Il suit que $\mathcal{U}_{K,U} \times U$ est un voisinage ouvert de (f, x) dont l'image est contenue dans U .

3. Il résulte de la première question que l'on a bien une telle application et c'est clairement une bijection si on néglige les hypothèses de continuité. Il suffit donc pour conclure de montrer qu'une application $\varphi : X \times Y \rightarrow Z$ qui a la propriété que $\varphi_x : y \mapsto \varphi(x, y)$ est continue pour tout $x \in X$ et que l'application $\tilde{\varphi} : x \mapsto \varphi_x$ est aussi continue, est nécessairement aussi continue. Les hypothèses impliquent que l'application

$$X \times Y \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z) \times Y, \quad (x, y) \mapsto (\varphi_x, y)$$

est bien définie et continue. Or on sait que l'application

$$\mathcal{C}(Y, Z) \times Y \rightarrow Z, \quad (f, y) \mapsto f(y)$$

est continue. Si on compose ces deux applications, on retombe sur φ . ■

1.5.3 Homotopies

Exercice 1.11 Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ deux applications continues.

1. Montrer que si $f(X) \cup g(X) \subsetneq \mathbb{S}^n$, alors $f \sim g$.
2. Montrer que la condition $\forall x \in X, f(x) + g(x) \neq 0$ implique que $f \sim g$.

Solution. 1. Il suffit de remarquer qu'il existe par hypothèse $a \in \mathbb{S}^n$ tel que f et g sont à valeurs dans $\mathbb{S}^n \setminus a$ qui est homéomorphe à un convexe par projection stéréographique et donc contractile.

2. Il suffit de poser

$$\forall x \in X, \forall t \in [0, 1], \quad h(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|}.$$

Il faut juste s'assurer que c'est bien défini. Mais si le dénominateur s'annule, alors $(1-t)f(x) = -tg(x)$ et donc

$$(1-t)^2 = \|(1-t)f(x)\|^2 = \|-tg(x)\|^2 = t^2.$$

On en déduit que $t = 1/2$ et donc $f(x) + g(x) = 0$. Or ce cas est exclu. ■

Exercice 1.12 Montrer qu'une application continue $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$ est homotope à une application constante si et seulement si elle se prolonge en une application continue $F : \mathbb{B}^n \rightarrow X$.

Solution. On propose plusieurs solutions.

1. Se donner une homotopie $h : \mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow X$ avec une application constante est équivalent à se donner l'application continue

$$\bar{h} : C := (\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]) / (\mathbb{S}^{n-1} \times 1) \rightarrow X.$$

D'autre part, l'homotopie $k : \mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{B}^n, (z, t) \mapsto (1-t)z$ induit une application continue $\bar{k} : C \rightarrow \mathbb{B}^n$ qui est clairement bijective et donc un homéomorphisme (puisque la source et le but sont compacts). Se donner h revient donc à se donner l'application continue $F = \bar{h} \circ \bar{k}^{-1} : \mathbb{B}^n \rightarrow X$. De plus, par construction, $h(z, 0) = F(z)$ si $z \in \mathbb{S}^{n-1}$.

2. On considère directement l'application $k : \mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{B}^n, (z, t) \mapsto (1-t)z$. C'est une application continue surjective. Plus précisément, si $z \neq 0$, alors $k^{-1}(z)$ est réduit au point $(z/\|z\|, 1 - \|z\|)$ et $k^{-1}(0) = \mathbb{S}^{n-1} \times 1$. On peut aussi montrer que k est fermée (à faire) si bien que \mathbb{B}^n est muni de la topologie quotient. Se donner $F : \mathbb{B}^n \rightarrow X$ continue est donc équivalent à se donner une homotopie $h : \mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow X$ constante sur $\mathbb{S}^{n-1} \times 1$.
3. On se donne $x \in X$ et une application continue $h : \mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad h(z, 0) = f(z) \quad \text{et} \quad h(z, 1) = x.$$

On pose alors

$$\forall z \in \mathbb{B}^n, \quad F(z) = \begin{cases} x & \text{si } z = 0 \\ h\left(\frac{z}{\|z\|}, 1 - \|z\|\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il faut montrer que l'application est bien continue en 0 (à faire). Réciproquement, toute application continue $F : \mathbb{B}^n \rightarrow X$ est homotope à une application constante puisque \mathbb{B}^n est contractile. Il en ira alors de même de sa restriction à \mathbb{S}^{n-1} .

4. Alternativement, on pose

$$\forall z \in \mathbb{B}^n, \quad F(z) = \begin{cases} x & \text{si } \|z\| \leq 1/2 \\ h\left(\frac{z}{\|z\|}, 2(1 - \|z\|)\right) & \text{si } \|z\| \geq 1/2. \end{cases}$$

C'est une application continue par l'argument des fermés. ■

- Exercice 1.13** 1. Montrer que \mathbb{S}^n est un rétract (fort) par déformation de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.
2. En déduire que si E est un espace vectoriel de dimension finie et H un sous-espace vectoriel de codimension $k + 1$, alors le complémentaire $E \setminus H \sim \mathbb{S}^k$.

Solution. 1. Il suffit de poser

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad r(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \forall t \in [0, 1], \quad h(x, t) = (1 - t)x + tr(x).$$

On aura bien toujours

$$h(x, 0) = x, \quad h(x, 1) = r(x) \quad \text{et} \quad h(x, t) = x \text{ si } x \in \mathbb{S}^n.$$

Il faut aussi s'assurer que $h(x, t) \neq 0$ mais on aurait sinon

$$(1 - t) + t \frac{1}{\|x\|} = 0.$$

Puisque $t, 1 - t \geq 0$, on aurait alors $t = 1 - t = 0$. Contradiction.

2. On peut supposer que $E = \mathbb{R}^n$ et $H = 0 \times \mathbb{R}^{n-k-1}$ et on a donc

$$E \setminus H \simeq \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k-1} \sim \mathbb{S}^k \times 0 \simeq \mathbb{S}^k. \quad \blacksquare$$

- Exercice 1.14** 1. Montrer que le bouquet $Y = \mathbb{S}((1, 0), 1) \cup \mathbb{S}((-1, 0), 1)$ est un rétract (fort) par déformation de $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$.
2. Montrer que $Y := \mathbb{S}^n \cup (0 \times \mathbb{B})$ est un rétract (fort) par déformation de $X := \mathbb{B}^{n+1} \setminus (\mathbb{S}^{n-1}(0, 1/2) \times \{0\})$.

Solution. 1. Soient $a_+ := (1, 0)$,

$$X_+ := \{x \in X, x_1 \geq 1 \text{ ou } \|x - a_+\| \leq 1\},$$

et a_- , X_- leurs symétriques horizontaux. On désigne aussi par p la projection verticale. On pose alors

$$\forall x \in X, \quad r(x) := \begin{cases} [a_+x] \cap Y & \text{si } x \in X_+ \\ [a_-x] \cap Y & \text{si } x \in X_- \\ [p(x)x] \cap Y & \text{sinon.} \end{cases}$$

Afin de s'assurer que c'est bien défini (et continu), on considère l'expression analytique

$$\forall x \in X, \quad r(x) := \begin{cases} a_+ + \frac{x - a_+}{\|x - a_+\|} & \text{si } x \in X_+ \\ a_- + \frac{x - a_-}{\|x - a_-\|} & \text{si } x \in X_- \\ (x_1, y_2) & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $y_2 = \sqrt{x_1(2 - x_1)}$ si $x_1, x_2 \geq 0$ (et symétriquement dans les autres cas). C'est bien une rétraction continue (utiliser l'argument des fermés). On pose alors comme d'habitude $h(x, t) = (1 - t)x + tr(x)$.

Alternativement, on peut conserver les projections radiales issues des centres à l'intérieur des disques et compléter avec la projection radiale issue de 0 à l'extérieur. Une autre solution, toujours avec les projections radiales à l'intérieur, est de considérer la projection verticale pour $-2 \leq x_1 \leq 2$ en complétant bêtement avec la rétraction sur le point $(2, 0)$ (resp. $(-2, 0)$) pour $x_1 \geq 2$ (resp. $x_1 \leq -2$).

2. Soit $x \in X$. Si $x \notin Y$, on considère le demi-plan $H(x)$ contenant x de frontière $0 \times \mathbb{R}$. On désigne par $s(x)$ le point d'intersection de $H(x)$ avec $\mathbb{S}^{n-1}(1/2) \times 0$. Alternativement, si $p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la projection sur les premiers facteurs, alors $s(x)$ est l'intersection de la demi-droite $[0, p(x))$ avec $\mathbb{S}^n(1/2) \times 0$. On considère alors la projection radiale $r : X \rightarrow Y$ dans $H(x)$ de x issue de $s(x)$:

$$r : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in Y \\ [s(x), x) \cap H(x) \cap Y & \text{sinon.} \end{cases}$$

On aura bien une rétraction (forte) par déformation en posant comme d'habitude

$$h(x, t) = (1 - t)x + tr(x).$$

Il faut tout de même s'assurer que r est bien continue. Notons tout d'abord que, si $x \notin Y$, alors

$$s(x) = \frac{p(x)}{2\|p(x)\|}.$$

Supposons pour l'instant que $r(x) \in 0 \times \mathbb{B}$. On peut alors appliquer le théorème de Thalès dans $H(x)$. Si on désigne par $q : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ la projection sur le dernier facteur, on aura nécessairement $r(x) = tq(x)$ avec $t = \frac{1/2}{1/2 - \|p(x)\|} > 0$, c'est-à-dire

$$r(x) = \frac{q(x)}{1 - 2\|p(x)\|}.$$

De plus, la condition $\|r(x)\| \leq 1$ se traduit par $\|q(x)\| \leq 1 - 2\|p(x)\|$. Supposons maintenant que cette dernière condition n'est pas satisfaite si bien que $r(x) \in \mathbb{S}^n$. On peut écrire $r(x) = s(x) + tx$ avec $t > 0$. La condition $\|r(x)\| = 1$ se traduit alors par

$$\left\| \frac{p(x)}{2\|p(x)\|} + t(p(x) + q(x)) \right\|^2 = 1,$$

ou encore

$$\left(\frac{1}{2} + t\|p(x)\| \right)^2 + t^2\|q(x)\|^2 = 1,$$

et après simplification,

$$t^2\|x\|^2 + t\|p(x)\| - \frac{3}{4} = 0.$$

Si $t(x)$ désigne l'unique racine positive de ce polynôme du second degré, on aura donc

$$r(x) = \begin{cases} \frac{q(x)}{1-2\|p(x)\|} & \text{si } \|q(x)\| \leq 1 - 2\|p(x)\| \\ s(x) + t(x)x & \text{sinon.} \end{cases} \quad \blacksquare$$

- Exercice 1.15** 1. Montrer que le groupe U_n est contractile et en déduire que $B_n \sim \Delta_n$.
2. Montrer que le groupe B_n^+ est contractile et en déduire que $GL_n \sim O_n$.

Solution. 1. L'espace U_n , qui est translaté par I_n de l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures nilpotentes (avec des 0 sur la diagonale), est affine donc convexe donc contractile. On en déduit que $B_n \simeq \Delta_n \times U_n \sim \Delta_n$.
2. On a $B_n^+ \simeq \mathbb{R}_{>0}^n \times U_n$ qui est convexe (comme produits de convexes) et donc contractile. On en déduit que $GL_n \simeq O_n \times B_n^+ \sim O_n$. \blacksquare

1.5.4 Chemins et lacets

- Exercice 1.16** 1. Montrer que S^n est connexe (par arcs) pour $n > 0$.
2. Montrer que SO_n est connexe^a (par arcs).
3. En déduire que, si $n > 0$, O_n a deux composantes connexes (par arcs).
4. Même chose pour GL_n .

^a On rappelle que tout élément de SO_n est conjugué à une matrice diagonale par blocs de taille ≤ 2 .

Solution. 1. On donne quatre solutions.

- (a) Si $x, y \in S^n$ avec $x + y \neq 0$, on pose

$$\gamma(t) = \frac{(1-t)x + ty}{\|(1-t)x + ty\|}.$$

Lorsque $x + y = 0$, il suffit de composer un chemin allant de x à un point $z \neq x, y$ avec un chemin allant de z à y .

- (b) Si $x, y \in S^n$, il suffit de construire un chemin dans le plan H des x, y . Or $S^n \cap H \simeq \mathbb{S}$ et on dispose d'une application continue surjective $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}$.
(c) Si $a \neq b \in S^n$, alors $S^n \setminus a$ et $S^n \setminus b$ sont deux parties connexes par arcs (car homéomorphes à \mathbb{R}^n) et qui se rencontrent.
(d) On a $S^n \simeq \mathbb{B}^n / S^{n-1}$. Or \mathbb{B}^n est convexe et donc connexe (par arcs) et son image par la projection qui est continue est donc aussi connexe (par arcs).
2. Il s'agit de montrer que si $A \in SO_n$, il existe un chemin de I_n vers A . Cette propriété étant stable par conjugaison, on peut supposer que A est diagonale par blocs de taille ≤ 2 . Puisqu'un produit de chemins est un chemin, on peut supposer que $n \leq 2$. Or on a $SO_1 = \{1\}$ et $SO_2 \simeq \mathbb{S}$ qui est connexe par arcs.

3. Si $n > 0$, il existe $A \in O_n$ telle que $A \notin SO_n$ et la multiplication par A induit un homéomorphisme avec le complémentaire $SO_n \simeq O_n \setminus SO_n$, ce qui montre que ce dernier est aussi connexe. On dispose d'une application continue surjective $\det : O_n \rightarrow \{\pm 1\}$. On en déduit que SO_n et $O_n \setminus SO_n$ sont des complémentaires ouverts et fermés non vides dans O_n . Puisqu'ils sont connexes, ce sont les composantes connexes de O_n .
4. On sait que $O_n \sim GL_n$ si bien que GL_n a deux composantes connexes. ■

Exercice 1.17 1. Montrer que l'application $[0, 1] \rightarrow \mathbb{S}, t \mapsto e^{2i\pi t}$ induit une bijection entre l'ensemble des applications continues $\hat{\gamma} : \mathbb{S} \rightarrow X$ et l'ensemble des lacets γ dans X .

2. Montrer de même que si γ, γ' sont deux lacets en x dans X , on a une bijection entre l'ensemble des homotopies $\hat{h} : \hat{\gamma} \sim_{\{1\}} \hat{\gamma}'$ et l'ensemble des homotopies $h : \gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma'$.

3. Montrer que si $h' : \hat{\gamma} \sim \hat{\gamma}'$ est une homotopie (quelconque) et qu'on pose pour $t \in [0, 1]$, $\delta(t) = h'(1, t)$, alors $\gamma \cdot \delta \sim_{\{0,1\}} \delta \cdot \gamma'$.

Solution. 1. Puisque $[0, 1]/\{0, 1\} \simeq \mathbb{S}$, il revient au même de se donner $\hat{\gamma} : \mathbb{S} \rightarrow X$ ou $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ avec la condition $\gamma(0) = \gamma(1)$.

2. Il revient au même de se donner $\hat{h} : \mathbb{S} \times [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\hat{h}(1, t) = x$ pour tout $t \in [0, 1]$ ou bien $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que $h(0, t) = h(1, t) = x$ pour tout $t \in [0, 1]$.

3. Pour la dernière question, il suffit d'appliquer le lemme 1.4.13 à l'homotopie $h : \gamma \sim \gamma'$ correspondante. ■

Exercice 1.18 Soit γ un lacet dans X et $\hat{\gamma} : \mathbb{S} \rightarrow X$ l'application correspondante (donnée par $\hat{\gamma}(e^{2i\pi t}) = \gamma(t)$). Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. γ est un lacet trivial.
2. $\hat{\gamma}$ est homotope relativement à 1 à une application constante.
3. $\hat{\gamma}$ est homotope à une application constante.
4. $\hat{\gamma}$ se prolonge en une application continue $\tilde{\gamma} : \mathbb{B}^2 \rightarrow X$.

Solution. Il résulte de l'exercice 1.17 que les deux premières assertions sont équivalentes. On a montré dans l'exercice 1.12 que les deux dernières assertions sont équivalentes. Bien sûr, la seconde assertion implique la troisième. Supposons pour conclure que $\hat{\gamma} \sim \hat{1}_y$. Grâce à l'exercice 1.17 encore, il existe un chemin δ entre x (si γ est basé en x) et y tel que $\gamma \cdot \delta \sim_{\{0,1\}} \delta \cdot 1_y$ et donc $\gamma \sim_{\{0,1\}} \delta \cdot 1_y \cdot \delta^{-1} \sim_{\{0,1\}} 1_x$. ■

Exercice 1.19 1. Montrer que si γ est un chemin dans une variété topologique X , alors il existe une suite $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_r = 1$ et, pour $i = 0, \dots, r-1$, un ouvert $U_i \subset X$ homéomorphe à \mathbb{R}^n tel que $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$.

2. En déduire que si $\dim(X) \geq 2$, alors γ est homotope (à extrémités fixées) à un chemin γ' dont le support est rare : $\overline{\text{im}(\gamma')} = \emptyset$.

3. En déduire que \mathbb{S}^n est simplement connexe pour $n \geq 2$.

4. En déduire que si E est un espace vectoriel de dimension finie et H un

■ sous-espace vectoriel de codimension ≥ 3 , alors $E \setminus H$ est simplement connexe.

- Solution.* 1. Si $\tau \in [0, 1]$, il existe un ouvert $U_\tau \subset X$ homéomorphe à \mathbb{R}^n tel que $\gamma(\tau) \in U_\tau$. Comme $\gamma^{-1}(U_\tau)$ est un ouvert non vide de $[0, 1]$, il contient un voisinage connexe compact (un intervalle fermé) I_τ de τ . Comme $[0, 1]$ est compact, il existe $\tau_0, \dots, \tau_{r-1} \in [0, 1]$ tels que $[0, 1] = \bigcup_{i=0}^{r-1} I_{\tau_i}$. On a $I_{\tau_i} = [t_i, s_i]$ et on peut supposer que $0 = t_0 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{r-1}$. On pose $t_r = 1$ et $U_i = U_{\tau_i}$ pour $i = 0, \dots, r-1$.
2. Pour la seconde question, on peut supposer que $0 = t_0 < \dots < t_r = 1$ et poser

$$\forall i = 0, \dots, r-1, \forall t \in [0, 1] \quad \gamma_i(t) = \gamma(t_i + t(t_{i+1} - t_i))$$

si bien que $\gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma_1 \cdots \gamma_r$. Quitte à remplacer γ par l'un des γ_i , on est donc ramené au cas où $X = \mathbb{R}^n$. On peut alors poser, si x et y désignent les extrémités de γ , pour $t \in [0, 1]$, $\gamma'(t) = x + t(y - x)$. Puisque \mathbb{R}^n est simplement connexe, on a $\gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma'$. Puisque $\text{im}(\gamma') = [xy]$ est un segment de \mathbb{R}^n et $n \geq 2$, c'est un fermé rare (d'intérieur vide).

3. On sait déjà que \mathbb{S}^n est connexe (par arcs). Si γ est un lacet dans \mathbb{S}^n , on peut supposer que son support est rare. En particulier, $\text{im}(\gamma) \neq \mathbb{S}^n$ et il existe $a \in \mathbb{S}^n$ tel que γ soit à valeur dans $\mathbb{S}^n \setminus a$ qui est simplement connexe.
4. Pour la dernière assertion, il suffit de rappeler qu'on a vu dans l'exercice 1.13 que $E \setminus H \sim \mathbb{S}^n$ avec $n \geq 2$. ■

2. Le groupe fondamental

2.1 Groupes (rappels)

On rappelle les définitions de base.

Définition 2.1.1 Un *groupe* est un ensemble G muni d'une loi interne qui satisfait

1. $\forall x, y, z \in G, (xy)z = x(yz)$,
2. $\exists 1 \in G, \forall x \in G, 1x = x$,
3. $\forall x \in G, \exists x^{-1} \in G, x^{-1}x = 1$.

On fera l'abus de dire que G est un groupe (alors qu'il s'agit en fait du couple formé par G et par sa loi).

Remarque 1. L'élément x^{-1} est unique et satisfait $xx^{-1} = 1$ (en effet, $xx^{-1} = 1xx^{-1} = (x^{-1})^{-1}x^{-1}xx^{-1} = (x^{-1})^{-1}1x^{-1} = (x^{-1})^{-1}x^{-1} = 1$).

2. L'élément 1 est unique et satisfait $\forall x \in G, x1 = x$ (en effet, $x1 = xx^{-1}x = 1x = x$).

3. Le groupe est dit *abélien* si $\forall x, y \in G, xy = yx$.

4. Le *groupe opposé* G^{op} est le même ensemble avec la loi $(x, y) \mapsto yx$.

Définition 2.1.2 Un (*homo*) *morphisme* de groupes $f : G \rightarrow G'$ est une application qui satisfait $\forall x, y \in G, f(xy) = f(x)f(y)$. C'est un *isomorphisme* si f est bijective.

Remarque 1. Le composé de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupes. Si f est un isomorphisme de groupes, alors f^{-1} aussi.

2. L'application $G \rightarrow G^{op}, x \mapsto x^{-1}$ est un isomorphisme de groupes.

3. Un *sous-groupe* d'un groupe G est un groupe H contenu dans G tel que l'inclusion soit un morphisme de groupes (on écrit $H < G$).

4. Si $f : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupes, alors

$$\ker f := \{x \in G, f(x) = 1\} < G \quad \text{et} \quad \text{im } f := \{f(x), x \in G\} < G'.$$

5. Un sous-groupe N de G est *distingué* s'il existe un morphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$ tel que $N = \ker f$ (on écrit $H \triangleleft G$).
6. Si $N \triangleleft G$, alors tout morphisme $f : G \rightarrow G'$ avec $\ker f \subset N$ se factorise uniquement par (la projection sur) $G/N := \{xN, x \in G\}$. De plus, f induit un isomorphisme $G/\ker f \simeq \text{im } f$.
7. Une intersection de sous-groupes (resp. distingués) est un sous-groupe (resp. distingué). Il existe donc un plus petit $\langle S \rangle < G$ (resp. $\langle\langle S \rangle\rangle \triangleleft G$) contenant une partie S de G .
8. Si $f : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupes, alors f et f^{-1} induisent des bijections réciproques entre les sous-groupes (distingués) de G contenant $\ker f$ et les sous-groupes (distingués) de $\text{im } f$.

Définition 2.1.3 Une suite de morphismes $\cdots \rightarrow G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G'' \rightarrow \cdots$ est *exacte* en G si $\text{im } f = \ker g$.

- Exemples**
1. La suite $1 \rightarrow G \xrightarrow{f} G'$ est exacte (en G) si et seulement si f est injective.
 2. La suite $G \xrightarrow{f} G' \rightarrow 1$ est exacte (en G') si et seulement si f est surjective.
 3. La suite $1 \rightarrow G \xrightarrow{f} G' \rightarrow 1$ est exacte (en G et G') si et seulement si f est bijective.
 4. La suite $1 \rightarrow G \rightarrow 1$ est exacte (en G) si et seulement si $G = 1$.

On regarde maintenant les propriétés universelles.

Proposition 2.1.4 Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

1. Il existe un morphisme injectif de groupes $\iota : K \hookrightarrow G$ tel que $f \circ \iota = 1$ et tout morphisme $\varphi : H \rightarrow G$ avec $f \circ \varphi = 1$ se factorise de manière unique par ι (un noyau).
2. Il existe un morphisme surjectif de groupes $\pi : G' \twoheadrightarrow C$ tel que $\pi \circ f = 1$ et tout morphisme $\psi : G' \rightarrow H$ avec $\psi \circ f = 1$ se factorise de manière unique par π (un conoyau).

Démonstration. Dans le premier cas, il suffit de prendre $K := \ker f$. Dans le second cas, il suffit de poser

$$C := \text{coker } f := G' / \langle\langle \text{im } (f) \rangle\rangle.$$

Les détails sont laissés en exercice. ■

On fera l'abus de dire que K (resp. C) est un noyau (resp. conoyau) – alors qu'il s'agit en fait du couple formé par K (resp. C) et du morphisme d'inclusion (resp. de projection).

Remarques 1. La suite $1 \rightarrow K \rightarrow G \xrightarrow{f} G'$ (resp. $G \xrightarrow{f} G' \rightarrow C \rightarrow 1$) est exacte (partout) si et seulement si K (resp. C) est un noyau de f (resp. conoyau de f et $\text{im}(f) \triangleleft G'$).

2. Une *suite exacte courte* est une suite

$$1 \rightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G'' \rightarrow 1$$

qui est exacte partout : i est injective, $\text{im } i = \ker p$ et p est surjective. De manière équivalente, G' (c'est-à-dire i) est un noyau de p et G'' (c'est-à-dire p) est un conoyau de i .

3. Si $f : G \twoheadrightarrow G''$ est surjectif, alors $1 \rightarrow \ker f \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 1$ est une suite exacte courte. Si $G' \triangleleft G$, alors $1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G/G' \rightarrow 1$ est une suite exacte courte.

Proposition 2.1.5 Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes.

1. Il existe un groupe G (leur produit) et des morphismes $p_i : G \rightarrow G_i$ tels que si on se donne des morphismes $f_i : H \rightarrow G_i$, alors il existe un unique morphisme $f : H \rightarrow G$ satisfaisant $f_i = p_i \circ f$ pour tout $i \in I$.
2. Il existe un groupe G (leur produit libre) et des morphismes $j_i : G_i \rightarrow G$, tels que si on se donne des morphismes $f_i : G_i \rightarrow H$, alors il existe un unique morphisme $f : G \rightarrow H$ satisfaisant $f_i = f \circ j_i$ pour tout $i \in I$.

Démonstration. Dans le premier cas, il suffit de considérer le *produit* cartésien $G := \prod_{i \in I} G_i$ avec la multiplication terme à terme, ainsi que les projections. Dans le second cas, il s'agit du *produit libre*¹ G qui est l'ensemble des suites finies $((x_1, i_1), \dots, (x_n, i_n))$ avec $x_k \in G_{i_k} \setminus \{1\}$ et $i_{k+1} \neq i_k \in I$. On le munit de la concaténation

$$\begin{aligned} & ((x_1, i_1), \dots, (x_n, i_n)) \star ((y_1, j_1), \dots, (y_m, j_m)) \\ &= ((x_1, i_1), \dots, (x_n, i_n), (y_1, j_1), \dots, (y_m, j_m)) \end{aligned}$$

sauf si $i_n = j_1$. Si c'est le cas et que $x_n y_1 \neq 1$, on prend

$$((x_1, i_1), \dots, (x_{n-1}, i_{n-1}), (x_n y_1, i_n), (y_2, j_2), \dots, (y_m, j_m)).$$

Enfin, si $x_n y_1 = 1$, on prend $((x_1, i_1), \dots, (x_{n-1}, i_{n-1}), (y_2, j_2), \dots, (y_m, j_m))$ (et une récurrence). Là encore, les détails sont laissés en exercice. ■

Remarques 1. Le produit est donc le produit cartésien $\prod_{i \in I} G_i$ et on notera $\star_{i \in I} G_i$ le produit libre.

2. Si G est un groupe, il revient au même de se donner un morphisme $\mathbb{Z}^{\star I} := \star_{i \in I} \mathbb{Z} \rightarrow G$ ou une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de G (dans les notations de la démonstration, x_i est l'image de $(1, i)$).

3. Un groupe L est *libre* s'il existe un isomorphisme $\mathbb{Z}^{\star I} \simeq L$. La famille $(x_i)_{i \in I}$ correspondante est alors dite *génératrice*². Alternativement, L est libre et $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice si et seulement si pour tout groupe G et toute famille $(y_i)_{i \in I} \subset G$ d'éléments de G , il existe un unique morphisme $f : L \rightarrow G$ tel que $f(x_i) = y_i$.

1. On devrait dire *coproduit*.

2. On devrait dire une *base*.

4. Une *présentation* d'un groupe G est une suite exacte $L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow G \rightarrow 1$ où L_0 et L_1 sont des groupes libres. En pratique, on écrit

$$G \simeq \langle (x_i)_{i \in I} \mid (r_j = 1)_{j \in J} \rangle$$

où les x_i sont des générateurs de L_0 et les r_j les images dans L_0 des générateurs de L_1 .

Exemples 1. Si L est un groupe libre sur deux générateurs t, s , alors

$$L = \langle t, s \rangle = \{t^{n_1} s^{m_1} \dots t^{n_k} s^{m_k}, n_i, m_i \in \mathbb{Z}\}.$$

2. $\mathcal{S}_3 \simeq \langle t, s \mid t^2 = 1, s^2 = 1, (ts)^3 = 1 \rangle$ (exemple de groupe de *Coxeter*).

Proposition 2.1.6 Si $f_1 : H \rightarrow G_1$ et $f_2 : H \rightarrow G_2$ sont deux morphismes, alors il existe un groupe G (leur *produit libre amalgamé*), ainsi que des morphismes $G_1 \rightarrow G, G_2 \rightarrow G$ qui coïncident le long de f_1, f_2 , tels que toute paire morphismes $\psi_1 : G_1 \rightarrow G', \psi_2 : G_2 \rightarrow G'$ telle que $\psi_1 \circ f_1 = \psi_2 \circ f_2$ se factorise uniquement par G .

Démonstration. Il suffit de poser (on devrait écrire $G_1 \star_{f_1, f_2} G_2$)

$$G := G_1 \star_H G_2 = (G_1 \star G_2) / \langle\langle j_1(f_1(x)) \star j_2((f_2(x))^{-1}, x \in H) \rangle\rangle$$

ou $j_i : G_i \hookrightarrow G_1 \star G_2$ désigne l'application canonique pour $i = 1, 2$. Détails en exercice. ■

Remarques (Voir exercice 2.6).

1. $G_1 \star_{\{1\}} G_2 \simeq G_1 \star G_2$.
2. $G_1 \star_H \{1\} \simeq \text{coker}(f_1)$.
3. Si f_2 est surjectif (resp. bijectif), alors $G_1 \rightarrow G_1 \star_H G_2$ aussi.
4. On peut montrer que si f_1 et f_2 sont injectifs, alors $G_1 \rightarrow G$ et $G_2 \rightarrow G$ aussi.

Proposition 2.1.7 Si G est un groupe, il existe alors un morphisme de groupes $p : G \rightarrow G^{\text{ab}}$ avec G^{ab} abélien tel que, pour tout groupe abélien M et tout morphisme de groupes $f : G \rightarrow M$, il existe un unique morphisme de groupes $f' : G^{\text{ab}} \rightarrow M$ tel que $f = f' \circ p$.

Démonstration. Il suffit de poser $G^{\text{ab}} = G/[G, G]$ ou $[G, G]$ est le sous-groupe (automatiquement distingué) *dérivé* engendré par les commutateurs $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$. Détails en exercice. ■

- Remarques** 1. Tout morphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$ induit un morphisme de groupes $f^{\text{ab}} : G^{\text{ab}} \rightarrow G'^{\text{ab}}$ et c'est fonctoriel.
2. Comme nous le verrons plus tard (lemme 4.1.1), on dispose de la notion de *somme directe* $\bigoplus_{i \in I} M_i \subset \prod_{i \in I} M_i$ (familles presque toujours nulles) de groupes *abéliens* ainsi que de celle de groupe *abélien libre* (isomorphe à $\mathbb{Z}^{(I)} := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^I := \prod_{i \in I} \mathbb{Z}$).
3. On a $(\star_{i \in I} G_i)^{\text{ab}} \simeq \bigoplus_{i \in I} G_i^{\text{ab}}$ et en particulier $(\mathbb{Z}^{\star I})^{\text{ab}} \simeq \mathbb{Z}^{(I)}$ si bien que L libre implique L^{ab} abélien libre.

Nous terminons avec un mot sur les groupes topologiques.

Définition 2.1.8 Un *groupe topologique* est un espace topologique G muni d'une structure de groupe telle que la multiplication et l'inverse sont des applications continues. Un *morphisme de groupes topologiques* $f : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes qui est continu. C'est un *isomorphisme de groupes topologiques* si, de plus, c'est un homéomorphisme.

Remarques

1. On munit toujours un sous-groupe (resp. un groupe quotient) d'un groupe topologique de la topologie induite (resp. de la topologie quotient).
2. Un morphisme de groupes topologiques $f : G \rightarrow G'$ est *strict* si $G/\ker(f) \simeq \text{im}(f)$ est un homéomorphisme (par exemple $\text{Id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{\text{disc}} \rightarrow \mathbb{R}^{\text{top}}$ n'est pas strict).
3. Une suite exacte $1 \rightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G'' \rightarrow 1$ est *stricte* si i et p sont stricts. De manière équivalente, G' a la topologie induite et G'' a la topologie quotient. On remarquera que p est alors une application ouverte.

Exemples

1. Un espace vectoriel normé est un groupe topologique (pour l'addition).
2. Un groupe discret est un groupe topologique.
3. Les groupes linéaires (les sous-groupes fermés de GL_n) sur \mathbb{R} et \mathbb{C} sont des groupes topologiques.
4. On a une suite exacte stricte $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S} \rightarrow 1$.

Remarques

1. Si G est un groupe topologique et X un espace topologique, alors $\mathcal{C}(X, G)$ est un groupe pour la loi $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
2. Si G' est un autre groupe topologique et $\varphi : G \rightarrow G'$ un morphisme continu, alors $\varphi_* : \mathcal{C}(X, G) \rightarrow \mathcal{C}(X, G')$ est un morphisme de groupes.
3. De même pour $\mathcal{C}((X, A), (G, H))$ lorsque H est un sous-groupe de G et A une partie de X .

2.2 Groupe fondamental

Définition 2.2.1 Le *groupe fondamental*^a $\pi_1(X, x)$ d'un espace topologique X en un point $x \in X$ est l'ensemble des classes d'homotopie (à extrémités fixées) des lacets basés en x .

^a. Ou *groupe de Poincaré*.

Puisque $\pi_1(X, x) \subset \pi(X)$, on pourra appliquer librement tous les résultats précédents sur les chemins à homotopie près et on peut déjà faire la remarque suivante :

Proposition 2.2.2 Si X est un espace topologique et $x \in X$, alors $\pi_1(X, x)$ est un groupe (pour la composition des lacets). Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue et $y = f(x)$, alors

$$f_* = \pi_1(f) : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

est un morphisme de groupes.

Démonstration. En tenant compte du lemme 1.4.10, c'est une conséquence immédiate du théorème 1.4.11 et de la proposition 1.4.3. ■

- Exemples**
1. Si X est simplement connexe, alors $\pi_1(X, x) \simeq 1$.
 2. $\pi_1(\mathbb{S}, x) \simeq \mathbb{Z}$ (voir théorème 2.2.13) et $\pi_1(\mathbb{S}^n, x) = 1$ sinon.
 3. $\pi_1(T, x) \simeq \mathbb{Z}^n$ si T est un tore de dimension n (homéomorphe à \mathbb{T}^n).
 4. $\pi_1(X, x) \simeq \mathbb{Z}^{\star n}$ si X est un disque à n trous (voir exercice 2.20).
 5. $\pi_1(\mathbb{P}^n, x) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geq 2$ (difficile).

- Remarques**
1. Le π_1 est fonctoriel dans la mesure où si $g : Y \rightarrow Z$ est une autre application continue, alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ et que $\text{Id}_{X*} = \text{Id}_{\pi_1(X, x)}$.
 2. On peut aussi définir des groupes (d'homotopie supérieure) $\pi_n(X, x)$ en remplaçant $[0, 1]$ par $[0, 1]^n$ et $\{0, 1\}$ par $\partial[0, 1]^n$. Ceux-ci sont très difficiles à calculer et toujours abéliens. C'est pourquoi on leur préférera les groupes d'homologie $H_n(X)$ que nous verrons plus tard. On peut montrer par exemple que si X est simplement connexe, alors $\pi_2(X, x) \simeq H_2(X)$ (théorème d'Hurewicz) mais les groupes d'homotopie et d'homologie diffèrent en général.

Le point x joue un rôle secondaire :

Proposition 2.2.3 Si $\delta : x \sim y$ dans X , alors on a un isomorphisme

$$\text{ad}_\delta : \pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X, y), \quad [\gamma] \mapsto [\delta]^{-1}[\gamma][\delta].$$

Démonstration. On voit immédiatement que c'est un morphisme de groupes et on a $\text{ad}_\delta^{-1} = \text{ad}_{\delta^{-1}}$. ■

- Remarques**
1. L'isomorphisme $\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X, y)$ dépend du choix du chemin.
 2. Si X est connexe par arcs, alors $\pi_1(X, x)$ est indépendant de x à isomorphisme près.
 3. Si X est connexe par arcs et qu'on choisit pour chaque $y \in X$ un chemin δ_y entre x et y , il existe une rétraction (par conjugaison)

$$\text{ad}_X : \pi(X) \rightarrow \pi_1(X, x), \quad [\gamma] \mapsto [\delta_{\gamma(0)}][\gamma][\delta_{\gamma(1)}]^{-1}$$

compatible avec les opérations.

Corollaire 2.2.4 Soit $x \in X$. Alors X est simplement connexe si et seulement si X est connexe par arcs et $\pi_1(X, x) \simeq 1$.

Démonstration. L'implication est immédiate. Inversement, si $\delta, \delta' : y \sim z$ sont deux chemins, alors $[\delta][\delta']^{-1} \in \pi_1(X, y)$. D'autre part, grâce à la proposition 2.2.3, puisque X est connexe par arcs, $\pi_1(X, y) \simeq \pi_1(X, x) \simeq 1$. On a donc $[\delta][\delta']^{-1} = 1$ et alors $[\delta'] = [\delta]$. ■

Proposition 2.2.5 Si $\iota : Y \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'une composante connexe par arcs

et $x \in Y$, alors on a un isomorphisme

$$\iota_* : \pi_1(Y, x) \simeq \pi_1(X, x).$$

Démonstration. Résulte immédiatement des définitions. ■

Proposition 2.2.6 Soient X_1, X_2 deux espaces topologiques, $a_1 \in X_1$ et $a_2 \in X_2$. On dispose alors un isomorphisme de groupes

$$\pi_1(X_1 \times X_2, (a_1, a_2)) \simeq \pi_1(X_1, a_1) \times \pi_1(X_2, a_2)$$

donné par

$$[\gamma] \mapsto (p_{1*}[\gamma], p_{2*}[\gamma]) \quad \text{et} \quad ([\gamma_1], [\gamma_2]) \mapsto i_{1*}[\gamma_1] i_{2*}[\gamma_2]$$

avec $p_1(x_1, x_2) = x_1, p_2(x_1, x_2) = x_2, i_1(x_1) = (x_1, a_2), i_2(x_2) = (a_1, x_2)$.

Démonstration. La première application est bien un morphisme de groupes car ses composantes le sont. D'autre part, elle provient d'une bijection au niveau des chemins par définition de la topologie produit. De plus, on a vu que les homotopies entre les produits sont les produits d'homotopies. On a donc bien une bijection. Il reste à montrer que la seconde application est bien l'inverse de la première (et il suffit de le vérifier d'un côté). On a $p_1 \circ i_1 = \text{Id}_{X_1}$ et $p_1 \circ i_2 = a_1$ est constante. On voit donc que

$$p_{1*}(i_{1*}[\gamma_1] i_{2*}[\gamma_2]) = p_{1*}i_{1*}[\gamma_1] p_{1*}i_{2*}[\gamma_2] = [\gamma_1][1_{a_1}] = [\gamma_1]$$

et de même pour p_2 . ■

Lemme 2.2.7 Si $h : f \sim g : X \rightarrow Y$ et qu'on pose pour $t \in [0, 1]$, $\delta(t) := h(x, t)$, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(Y, f(x)) & \\ f_* \nearrow & \downarrow \simeq \text{ad}_\delta & \\ \pi_1(X, x) & & \pi_1(Y, g(x)) \\ g_* \searrow & & \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Résulte immédiatement de la proposition 1.4.14 qui nous dit que $(f_*\gamma) \cdot \delta \sim_{\{0,1\}} \delta \cdot (g_*\gamma)$. ■

Proposition 2.2.8 Si $f : X \sim Y$ et $y := f(x)$, on a alors un isomorphisme

$$f_* : \pi_1(X, x) \simeq \pi_1(Y, y).$$

Démonstration. Résulte immédiatement du lemme 2.2.7. Plus précisément, on sait qu'il existe $g : Y \rightarrow X$ tel que $g \circ f \sim \text{Id}_X$ et $f \circ g \sim \text{Id}_Y$. On en déduit qu'il existe deux chemins δ, δ' tels que

$$\text{ad}_\delta \circ g_* \circ f_* = \text{Id}_{\pi_1(X,x)} \text{ et } \text{ad}_{\delta'} \circ f_* \circ g_* = \text{Id}_{\pi_1(Y,y)}$$

et on sait que ad_δ et $\text{ad}_{\delta'}$ sont des isomorphismes. ■

Corollaire 2.2.9 Si $X \sim Y$ et X est simplement connexe, alors Y aussi. ■

Corollaire 2.2.10 Tout espace contractile est simplement connexe. ■

Proposition 2.2.11 Si γ est un chemin d'origine 1 dans \mathbb{S} , alors il existe un unique chemin $\tilde{\gamma}$ d'origine 0 dans \mathbb{R} tel que $p_*\tilde{\gamma} = \gamma$ avec $p(t) = e^{2i\pi t}$.

Démonstration. C'est un cas particulier du corollaire 3.3.4 que nous démontrerons plus tard (on peut aussi appliquer l'exercice 2.11 au cas $f = \gamma$). ■

Définition 2.2.12 Le *degré* d'un lacet γ en 1 dans \mathbb{S} est $\deg(\gamma) := \tilde{\gamma}(1)$.

Théorème 2.2.13 On a un isomorphisme de groupes $\deg : \pi_1(\mathbb{S}, 1) \simeq \mathbb{Z}$.

Démonstration. C'est une conséquence du corollaire 3.3.7 ci-dessous (voir aussi l'exercice 2.12). ■

Remarque On a un homéomorphisme $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}$ et donc un isomorphisme

$$\pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \bar{0}) \simeq \pi_1(\mathbb{S}, 1) \simeq \mathbb{Z}$$

qui envoie la classe du chemin $\gamma : t \mapsto \bar{t}$ sur 1.

2.3 Théorème de Van Kampen

Soit X un espace topologique et G un groupe. Par définition, un *morphisme* $f : \pi(X) \rightarrow G$ est une application f telle que si γ et γ' sont composables, alors

$$f([\gamma][\gamma']) = f([\gamma])f([\gamma']).$$

Proposition 2.3.1 Soient X un espace topologique et $X_1, X_2 \subset X$ tels que $X = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2$. On désigne par

$$i_1 : X_1 \hookrightarrow X, \quad i_2 : X_2 \hookrightarrow X, \quad j_1 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_1, \quad j_2 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2$$

les applications d'inclusion. On se donne deux morphismes

$$f_1 : \pi(X_1) \rightarrow G, \quad f_2 : \pi(X_2) \rightarrow G$$

tels que $f_1 \circ j_{1*} = f_2 \circ j_{2*}$. Il existe alors un unique morphisme $f : \pi(X) \rightarrow G$ tel que $f_1 = f \circ i_{1*}$ et $f_2 = f \circ i_{2*}$.

Démonstration. On va définir f sur tous les chemins et on montrera à la fin que ça ne dépend que de la classe d'homotopie. Soit $\gamma : x \sim y$ dans X . Si γ est contenu dans X_i avec $i \in \{1, 2\}$, on pose alors $f(\gamma) = f_i([\gamma])$. Ceci est bien défini grâce à notre hypothèse (que f_1 et f_2 coïncident sur $X_1 \cap X_2$).

En général, puisque $[0, 1]$ est compact, il existe $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ tel que, pour tout $i = 0, \dots, n$, on ait $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ contenu dans X_1 ou X_2 (on dira que la subdivision est *adaptée* à γ). Le chemin défini par $\gamma_i(t) := \gamma(t_i + t(t_{i+1} - t_i))$ est alors un chemin dans X_1 ou dans X_2 et on pose

$$f(\gamma) := f(\gamma_0) \cdots f(\gamma_{n-1}). \quad (2.1)$$

Cette définition étant forcée par les conditions montre l'unicité de f et la dernière propriété est aussi automatique. Il faut tout de même nous assurer que notre définition ne dépend pas de la subdivision choisie. Il faut donc montrer que si $0 = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_{n'} = 1$ est une autre subdivision adaptée à γ , alors

$$f(\gamma_0) \cdots f(\gamma_{n-1}) = f(\gamma'_0) \cdots f(\gamma'_{n'-1}).$$

On peut bien sûr supposer que la première subdivision est plus fine que la seconde, ce qui nous ramène par récurrence au cas $n' = 1$ auquel cas l'assertion résulte du fait que f_1 et f_2 sont des morphismes.

Il faut aussi montrer que si γ et γ' sont deux chemins composables, alors $f(\gamma \cdot \gamma') = f(\gamma)f(\gamma')$. Or, si on se donne deux subdivisions $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ et $0 = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_{n'} = 1$ adaptées respectivement à γ, γ' , alors la subdivision

$$0 = t_0/2 < \dots < t_{n-1}/2, 1/2, 1/2 + t'_1/2 < \dots < 1/2 + t'_{n'}/2 = 1$$

sera adaptée à $\gamma \cdot \gamma'$.

Pour conclure, il reste à montrer que $f(\gamma)$ ne dépend de γ qu'à homotopie près. On se donne une homotopie $h : \gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma'$ dans X . Puisque $[0, 1]^2$ est compact, on peut trouver comme ci-dessus $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ et $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ tel que, pour tout $i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, m-1$, on ait $h([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}])$ contenu dans X_1 ou dans X_2 . On pose alors

$$\gamma_{i,j}(t) := h(t_i + t(t_{i+1} - t_i), s_j), \quad \delta_{i,j}(t) := h(t_i, s_j + t(s_{j+1} - s_j)),$$

et on définit

$$h_{i,j} : \gamma_{i,j} \cdot \delta_{i+1,j} \sim_{\{0,1\}} \delta_{i,j} \cdot \gamma_{i,j+1}$$

comme dans le lemme 1.4.13 en partant de

$$h'_{i,j}(t, s) = h(t_i + t(t_{i+1} - t_i), s_j + s(s_{j+1} - s_j)).$$

Tous ces chemins et homotopies sont définis dans X_1 ou dans X_2 . On aura donc d'une part,

$$f(\gamma) = f(\gamma_{0,0}) \cdots f(\gamma_{n-1,0}) \quad \text{et} \quad f(\gamma') = f(\gamma_{0,m}) \cdots f(\gamma_{n-1,m}),$$

et d'autre part, pour tout $i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, m-1$,

$$f(\gamma_{i,j})f(\delta_{i+1,j}) = f(\delta_{i,j})f(\gamma_{i,j+1}).$$

On obtient alors par télescopage, pour tout $j = 0, \dots, m$, puisque $\delta_{0,j} = 1_x$ et $\delta_{n,j} = 1_y$,

$$f(\gamma_{0,j}) \cdots f(\gamma_{n-1,j}) = \prod_{i=0}^{n-1} f(\delta_{i,j})f(\gamma_{i,j+1})f(\delta_{i+1,j})^{-1} = f(\gamma_{0,j+1}) \cdots f(\gamma_{n-1,j+1}).$$

Par récurrence, on aura bien $f(\gamma) = f(\gamma')$. ■

- Remarques**
1. Dans la démonstration, on a utilisé le résultat classique suivant : si X est un compact métrique et $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ est un recouvrement ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in X$, il existe $i \in I$ avec $\mathbb{B}(x, \epsilon) \subset U_i$.
 2. La proposition est plus généralement valable (avec exactement la même démonstration) en remplaçant G par ce qu'on appelle un « groupoïde ».
 3. Un *groupoïde* est un ensemble G muni d'une loi de composition *partielle* $(x, y) \mapsto xy$ et d'une application $x \mapsto x^{-1}$ telles que
 - (a) Si $x, y, z \in G$, alors xy et yz sont définis si et seulement si $(xy)z$ et $x(yz)$ sont définis, et alors $(xy)z = x(yz)$ ($=: xyz$),
 - (b) Si $x \in G$, alors xx^{-1} et $x^{-1}x$ sont définis,
 - (c) Si $x, y \in G$ et xy est défini, alors $xyy^{-1} = x$ et $x^{-1}xy = y$.

On va enfin pouvoir démontrer un théorème qui nous permet de calculer des groupes fondamentaux.

Théorème 2.3.2 — van Kampen. Soient X un espace topologique, $X_1, X_2 \subset X$ tels que $X = \dot{X}_1 \cup \dot{X}_2$ et $x \in X_1 \cap X_2$. Si $X_1 \cap X_2$ est *connexe par arcs*, alors

$$\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X_1, x) \star_{\pi_1(X_1 \cap X_2, x)} \pi_1(X_2, x).$$

Démonstration. On peut supposer que X_1 et X_2 sont connexes par arcs. On désigne toujours par

$$i_1 : X_1 \hookrightarrow X, \quad i_2 : X_2 \hookrightarrow X, \quad j_1 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_1, \quad j_2 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2$$

les applications d'inclusion. On se donne deux morphismes de groupes

$$f_1 : \pi_1(X_1, x) \rightarrow G, \quad f_2 : \pi_1(X_2, x) \rightarrow G$$

tels que $f_1 \circ j_{1*} = f_2 \circ j_{2*}$ et il s'agit de montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $f : \pi_1(X, x) \rightarrow G$ tel que $f_1 = f \circ i_{1*}$ et $f_2 = f \circ i_{2*}$.

On choisit maintenant pour chaque $y \in X_1 \cap X_2$ (resp. $X_1 \setminus X_2$, resp. $X_2 \setminus X_1$) un chemin $\lambda_y : x \sim y$ dans $X_1 \cap X_2$ (resp. dans X_1 , resp. dans X_2). On dispose donc de rétractions compatibles (des morphismes)

$$\begin{aligned} \text{ad}_{X_1 \cap X_2} : \pi(X_1 \cap X_2) &\twoheadrightarrow \pi_1(X_1 \cap X_2, x), \\ \text{ad}_{X_1} : \pi(X_1) &\twoheadrightarrow \pi_1(X_1, x), \quad \text{ad}_{X_2} : \pi(X_2) \twoheadrightarrow \pi_1(X_2, x) \end{aligned}$$

données par $[\gamma] \mapsto [\lambda_{\gamma(0)}][\gamma][\lambda_{\gamma(1)}^{-1}]$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.3.1 aux applications composées

$$\tilde{f}_1 : \pi(X_1) \twoheadrightarrow \pi_1(X_1, x) \xrightarrow{f_1} G, \quad \tilde{f}_2 : \pi(X_2) \twoheadrightarrow \pi_1(X_2, x) \xrightarrow{f_2} G.$$

Clairement, on a $\tilde{f}_1 \circ j_{1*} = \tilde{f}_2 \circ j_{2*}$ et il existe donc un unique morphisme $\tilde{f} : \pi(X) \rightarrow G$ tel que $\tilde{f}_1 = \tilde{f} \circ i_{1*}$ et $\tilde{f}_2 = \tilde{f} \circ i_{2*}$. Il suffit alors de considérer la restriction

$$f : \pi_1(X, x) \hookrightarrow \pi(X) \xrightarrow{\tilde{f}} G. \quad \blacksquare$$

Corollaire 2.3.3 Sous les hypothèses du théorème (avec $X_1 \cap X_2$ connexe par arcs non-vide), on a

1. Si $X_1 \cap X_2$ est simplement connexe, alors

$$\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X_1, x) \star \pi_1(X_2, x).$$

2. Si X_2 est simplement connexe, alors

$$\pi_1(X, x) \simeq \text{coker}(\pi_1(X_1 \cap X_2, x) \rightarrow \pi_1(X_1, x)).$$

3. Si $X_1 \cap X_2$ ainsi que X_2 sont simplement connexes, alors

$$\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X_1, x).$$

4. Si X_1 et X_2 sont simplement connexes, alors X aussi.
5. Si $\pi_1(X_1 \cap X_2, x) \rightarrow \pi_1(X_2, x)$ est surjectif (resp. bijectif), alors $\pi_1(X_1, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ aussi.

Exemples 1. On a $\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^n \setminus a) \cup \mathring{\mathbb{B}}^{n+}$ avec $(\mathbb{S}^n \setminus a) \cap \mathbb{B}^{n+} = \mathbb{B}^{n+} \setminus a$. Donc \mathbb{S}^n est simplement connexe pour $n \geq 2$.
 2. Par récurrence sur n , si X est un disque à n trous, alors $\pi_1(X, x) \simeq \mathbb{Z}^{\star n}$.

Corollaire 2.3.4 Soit Y un espace connexe par arcs tel que $Y \subset X_i$ est un rétract fort par déformation d'un ouvert U_i de X_i pour $i = 1, 2$. Si $X := X_1 \coprod_Y X_2$ et $x \in Y$, alors

$$\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X_1, x) \star_{\pi_1(Y, x)} \pi_1(X_2, x).$$

Démonstration. On peut supposer que $X = X_1 \cup X_2$ et que $Y = X_1 \cap X_2$. Il est immédiat que $X'_1 := X_1 \cup U_2$ (resp. $X'_2 := U_1 \cup X_2$, resp. $X'_1 \cap X'_2 = U_1 \cup U_2$) se rétracte par déformation sur X_1 (resp. X_2 , resp. Y). En particulier, $X'_1 \cap X'_2$ est connexe par arcs et on peut appliquer le théorème de van Kampen à $X = X'_1 \cup X'_2$. \blacksquare

Le résultat suivant s'applique par exemple dans le cas de variétés topologiques :

Corollaire 2.3.5 Soient, pour $i = 1, 2$, X_i un espace topologique et x_i un point qui est un rétract par déformation d'un ouvert de X_i . Alors,

$$\pi_1(X_1 \vee X_2, x) \simeq \pi_1(X_1, x_1) \star \pi_1(X_2, x_2)$$

(où x désigne l'image commune de x_1 et x_2 dans $X_1 \vee X_2$).

Démonstration. C'est un cas particulier du corollaire 2.3.4. ■

Dans le même style que le théorème de van Kampen (et avec le même genre de démonstration), on a aussi :

Proposition 2.3.6 Soient X un espace topologique, $X_1, X_2 \subset X$ tels que $X = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2$ et $x \in X_1 \cap X_2$. Si X_1 et X_2 sont simplement connexes et $X_1 \cap X_2$ a deux composantes connexes par arcs, alors $\pi_1(X, x) \simeq \mathbb{Z}$.

Démonstration. On va montrer que $\pi_1(X, x)$ satisfait la propriété universelle de \mathbb{Z} . Plus précisément, on va montrer qu'il existe $[\mu] \in \pi_1(X, x)$ tel que si G est un groupe et $g \in G$, alors il existe un unique morphisme de groupes $f : \pi_1(X, x) \rightarrow G$ tel que $f([\mu]) = g$.

On désigne par Y et Y' les composantes connexes par arcs de $X_1 \cap X_2$. Montrons qu'il existe un unique morphisme $\varphi_g : \pi(X) \rightarrow G$ tel que

$$\varphi_g([\gamma]) = \begin{cases} g & \text{si } \gamma \subset X_1, \gamma(0) \notin Y', \gamma(1) \in Y' \\ g^{-1} & \text{si } \gamma \subset X_1, \gamma(0) \in Y', \gamma(1) \notin Y', \\ 1 & \text{sinon si } \gamma \subset X_1 \text{ ou } \gamma \subset X_2. \end{cases}$$

Puisque X_1 est simplement connexe, on a une bijection

$$\pi(X_1) \simeq X_1 \times X_1, \quad [\gamma] \rightarrow (\gamma(0), \gamma(1)).$$

L'application

$$(a, b) \in X_1 \times X_1 \mapsto \begin{cases} g & \text{si } a \notin Y', b \in Y' \\ g^{-1} & \text{si } a \in Y', b \notin Y' \\ 1 & \text{si } a, b \in Y' \text{ ou } a, b \notin Y' \end{cases}$$

correspond alors à un unique morphisme $\pi(X_1) \rightarrow G$ satisfaisant les premières conditions ci-dessus. Puisque sa restriction à $X_1 \cap X_2 = Y \cup Y'$ est triviale, il résulte de la proposition 2.3.1 qu'il se prolonge trivialement sur X_2 de manière unique. D'où l'existence et l'unicité de φ_g .

On peut supposer que $x \in Y$ et on choisit $x' \in Y'$. On choisit ensuite pour $i = 1, 2$, un chemin μ_i entre x et x' dans X_i . On pose $\mu := \mu_1^{-1} \cdot \mu_2$. Par construction, on dispose d'un morphisme de groupes $f : \pi_1(X, x) \hookrightarrow \pi(X) \xrightarrow{\varphi_g} G$ tel que $f([\mu]) = g$. On dispose en particulier, de $\varphi_{[\mu]} : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x)$ et on a $f \circ \varphi_{[\mu]} = \varphi_g$. Pour montrer l'unicité de f et conclure, il suffit donc de s'assurer que $\varphi_{[\mu]}$ est surjectif.

On choisit pour chaque $y \in Y$ un chemin λ_y entre x et y dans Y . On choisit pour chaque $y \in Y'$ un chemin λ'_y entre x' et y dans Y' et on pose $\lambda_y = \mu_2 \cdot \lambda'_y$. On choisit

enfin pour $i = 1, 2$ et chaque $y \in X_i \setminus (X_1 \cap X_2)$ un chemin λ_y entre x et y dans X_i . On dispose alors de la rétraction

$$\text{ad} : \pi(X) \twoheadrightarrow \pi_1(X, x), \quad [\gamma] \mapsto [\lambda_{\gamma(0)}][\gamma][\lambda_{\gamma(1)}^{-1}]$$

qui est surjective. En considérant les différents cas un par un, on voit que $\text{ad} = \varphi_{[\mu]}$. ■

Exemple On a $\pi_1(\mathbb{S}, 1) \simeq \mathbb{Z}$ (voir théorème 2.2.13 pour un énoncé plus précis).

2.4 Exercices

2.4.1 Groupes

Exercice 2.1 — . 1. Montrer que si G est un groupe et $S \subset G$, alors

$$\langle S \rangle = \left\{ \prod_{i=1}^n s_i^{\pm}, s_i \in S \right\} \quad \text{et} \quad \langle\langle S \rangle\rangle = \left\{ \prod_{i=1}^n x_i s_i^{\pm} x_i^{-1}, x_i \in G, s_i \in S \right\}.$$

2. Montrer que si

$$G = \langle (x_i)_{i \in I} \mid (r_j = 1)_{j \in J} \rangle \quad \text{et} \quad G' = \langle (x_i)_{i \in I'} \mid (r_j = 1)_{j \in J'} \rangle$$

alors $G \star G' = \langle (x_i)_{i \in I \sqcup I'} \mid (r_j = 1)_{j \in J \sqcup J'} \rangle$.

3. Montrer que $\mathbb{Z}^2 \simeq \langle x, y \mid [x, y] = 1 \rangle$ où on a posé $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$.

Solution. 1. Ce sont manifestement des sous-groupes qui contiennent S et tout sous-groupe (resp. distingué) qui contient S contient aussi $\langle S \rangle$ (resp. $\langle\langle S \rangle\rangle$). Il faut s'assurer que $\langle\langle S \rangle\rangle$ est bien distingué, ce qui résulte de la formule

$$x \left(\prod_{i=1}^n x_i s_i^{\pm} x_i^{-1} \right) x^{-1} = \prod_{i=1}^n (xx_i) s_i^{\pm} (xx_i)^{-1}.$$

2. On peut déjà remarquer que si L et L' sont libres de générateurs $(x_i)_{i \in I}$ et $(x_i)_{i \in I'}$ respectivement, alors $L \star L'$ est libre de générateurs $(x_i)_{i \in I \sqcup I'}$. Le cas général résulte formellement du fait que le conoyau commute avec le produit libre, c'est-à-dire que

$$\text{coker}(L_1 \star L'_1 \rightarrow L_0 \star L'_0) \simeq \text{coker}(L_1 \rightarrow L_0) \star \text{coker}(L'_1 \rightarrow L'_0)$$

puisque ces deux groupes satisfont la même propriété universelle :

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \longrightarrow & L_0 \\ & \searrow & \nearrow \\ & \star & \text{---} \longrightarrow H \\ & \nearrow & \searrow \\ L'_1 & \longrightarrow & L'_0 \end{array}$$

pour H un groupe quelconque. On peut aussi (mais c'est laborieux) construire formellement des morphismes dans chaque sens et montrer que leur composé dans les deux sens est l'identité.

3. Cela résulte de nouveau du fait que les deux groupes ont la même propriété universelle mais on peut le vérifier en détail. On dispose d'un morphisme

$$\langle x, y \rangle \rightarrow \mathbb{Z}^2, \quad x \mapsto (1, 0), y \mapsto (0, 1).$$

Puisque $[x, y]$ est dans le noyau, on en déduit un morphisme

$$G := \langle x, y \mid [x, y] = 1 \rangle \rightarrow \mathbb{Z}^2.$$

Inversement, on vérifie que l'application $(m, n) \rightarrow x^m y^n$ induit un morphisme de groupes $\mathbb{Z}^2 \rightarrow G$. Ce sont clairement des inverses l'un de l'autre. ■

Exercice 2.2 Si G est un groupe, on désigne par $[G, G]$ le sous-groupe ^a engendré par les *commutateurs* $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ et on pose $G^{\text{ab}} := G/[G, G]$.

1. Montrer que $[G, G]$ est un sous-groupe distingué de G .
2. Montrer que G est abélien si et seulement si $[G, G] = \{1\}$ si et seulement si l'application $G \rightarrow G^{\text{ab}}$ est bijective.
3. Montrer que si $f : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupes, alors $f([G, G]) \subset [G', G']$ avec égalité si f est surjectif.
4. En déduire que f induit un morphisme de groupes $f^{\text{ab}} : G^{\text{ab}} \rightarrow G'^{\text{ab}}$.
5. Montrer que G^{ab} est abélien.
6. Montrer que si M est un groupe abélien, alors tout morphisme de groupes $G \rightarrow M$ se factorise de manière unique par $G \rightarrow G^{\text{ab}}$.
7. Montrer que $(\star_{i \in I} G_i)^{\text{ab}} \simeq \oplus_{i \in I} G_i^{\text{ab}}$.
8. Montrer que si L est un groupe libre, alors L^{ab} est un groupe *abélien* libre (c'est-à-dire isomorphe à $\mathbb{Z}^{(I)} = \oplus_{i \in I} \mathbb{Z}$).

a. Appelé *sous-groupe dérivé*.

Solution. 1. Pour $x, y \in G$, on a $[x, y] = 1$ si et seulement si $xy = yx$.
 2. Si $x, y, z \in G$, alors $z[x, y]z^{-1} = [zxz^{-1}, zyz^{-1}]$.
 3. Si $x, y \in G$, on a $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$.
 4. C'est la propriété universelle du quotient.
 5. Puisque $[G^{\text{ab}}, G^{\text{ab}}]$ est l'image de $[G, G]$ par l'application quotient, il est trivial.
 6. En effet, on a $M \simeq M^{\text{ab}}$.
 7. Les deux groupes ont même propriété universelle.
 8. On applique le dernier résultat au cas $G_i = \mathbb{Z}$. ■

Exercice 2.3 Montrer que si ^a $n, m \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{Z}^{\star n} \simeq \mathbb{Z}^{\star m} \Leftrightarrow n = m$.

a. C'est vrai aussi pour des cardinaux infinis.

Solution. En passant aux abélianisés, on aura $\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^m$. L'isomorphisme est donné par des matrices et on aura donc un isomorphisme de \mathbb{Q} -espaces vectoriels $\mathbb{Q}^n \simeq \mathbb{Q}^m$. On a donc $n = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^n = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^m = m$. ■

Exercice 2.4 On désigne par D_{2n} le *groupe diédral* des isométries du plan qui préservent le polygone régulier à n cotés et par D_{∞} le *groupe diédral infini* des isométries de la droite (réelle) qui préservent l'ensemble des entiers relatifs.

1. Montrer qu'on a des suite exacte $0 \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow D_{2n} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow D_{\infty} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$.
2. Montrer que

$$\begin{aligned} D_{2n} &\simeq \langle r, s \mid r^n = 1, s^2 = 1, (sr)^2 = 1 \rangle \\ &\simeq \langle t, s \mid t^2 = 1, s^2 = 1, (ts)^n = 1 \rangle. \end{aligned}$$

3. Montrer que

$$D_{\infty} \simeq \langle t, s \mid t^2 = 1, s^2 = 1 \rangle.$$

4. En déduire un morphisme de groupes surjectif $D_{\infty} \twoheadrightarrow D_{2n}$.

5. Montrer que $D_\infty \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Solution. 1. Le groupe D_{2n} est l'ensemble des rotations d'angle $2k\pi/n$ et des réflexions par rapport aux droites joignant le centre aux sommets ou aux milieux des cotés. Si on désigne par ρ la rotation d'angle $2\pi/n$ et par σ la réflexion par rapport à l'une des droites joignant le centre à un sommet, on a donc

$$D_{2n} = \{1, \rho, \dots, \rho^{n-1}, \sigma, \sigma\rho, \dots, \sigma\rho^{n-1}\}.$$

Puisque $\langle \rho \rangle$ est un sous-groupe d'indice 2, il est distingué et on a donc une suite exacte

$$1 \rightarrow \langle \rho \rangle \rightarrow D_{2n} \rightarrow D_{2n}/\langle \rho \rangle \rightarrow 1.$$

Il suffit alors de remarquer que $\langle \rho \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (groupe cyclique) et $D_{2n}/\langle \rho \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (groupe à deux éléments).

Le groupe D_∞ est l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \pm x + n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Il est clairement engendré par la translation $\rho : x \mapsto x + 1$ et par la réflexion $\sigma : x \mapsto -x$. On a donc

$$D_\infty = \{\dots, \rho^{-1}, 1, \rho, \rho^2, \dots, \sigma\rho^{-1}, \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2, \dots\}$$

et on conclut de la même manière.

2. Puisque $\sigma\rho$ est une réflexion, on dispose d'un morphisme surjectif évident

$$\langle r, s \mid r^n = 1, s^2 = 1, (sr)^2 \rangle \twoheadrightarrow D_{2n}, \quad r \mapsto \rho, s \mapsto \sigma$$

et celui-ci est clairement injectif car tout élément de la source s'écrit sr^k avec $k \in \mathbb{Z}$ puisque $rs = sr^{-1}$ et $s^n = s$ ou 1. Pour l'autre présentation, il suffit de considérer

$$\langle t, s \mid t^2 = 1, s^2 = 1, (ts)^n = 1 \rangle \simeq D_{2n}, \quad t \mapsto \sigma\rho, s \mapsto \sigma.$$

3. Puisque $\sigma\rho$ est une réflexion, on a un morphisme évident

$$\langle t, s \mid t^2 = 1, s^2 = 1 \rangle \rightarrow D_\infty, \quad t \mapsto \sigma\rho, s \mapsto \sigma.$$

On vérifie aisément qu'il est surjectif et injectif (puisque tout élément de la source s'écrit $(st)^n$ ou $t(st)^n$ ou $(st)^n s$).

4. On a par définition un morphisme surjectif

$$\langle t, s \mid t^2 = 1, s^2 = 1 \rangle \twoheadrightarrow \langle t, s \mid t^2 = 1, s^2 = 1, (ts)^n = 1 \rangle$$

et donc aussi $D_\infty \twoheadrightarrow D_{2n}$ comme annoncé.

5. Pour finir, on remarque que les groupes $\langle t, s \mid t^2 = 1, s^2 = 1 \rangle$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ont la même propriété universelle. ■

Exercice 2.5 Soit G le groupe d'isométries de \mathbb{R}^2 engendré par

$$\alpha : (t, s) \mapsto (t + 1, s) \quad \text{et} \quad \beta : (t, s) \mapsto (1 - t, s + \frac{1}{2}).$$

1. Montrer que $\alpha \circ \beta \circ \alpha = \beta$.
2. En déduire que $\beta \circ \alpha = \alpha^{-1} \circ \beta$, $\beta \circ \alpha^{-1} = \alpha \circ \beta$ et $\beta^2 \circ \alpha = \alpha \circ \beta^2$.
3. Montrer plus généralement que

$$\forall m, k \in \mathbb{Z}, \quad \beta^m \circ \alpha^k = \alpha^{(-1)^m k} \circ \beta^m.$$

4. En déduire que tout élément de G s'écrit de manière unique $\alpha^n \circ \beta^m$ avec $n, m \in \mathbb{Z}$.
5. Montrer que $G^{\text{ab}} = G / \langle \alpha^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Solution. 1. On a

$$\alpha(\beta(\alpha(t, s))) = \alpha(\beta((t + 1, s))) = \alpha(-t, s + \frac{1}{2}) = (1 - t, s + \frac{1}{2}).$$

2. Les deux premières égalités sont immédiates et on a alors

$$\beta^2 \circ \alpha = \beta \circ \alpha^{-1} \circ \beta = \alpha \circ \beta^2.$$

3. Puisque β^2 et α commutent, le cas m pair est trivial. On traite maintenant le cas $m = 1$ et on procède d'abord par récurrence sur $k \geq 0$. On aura

$$\beta \circ \alpha^{k+1} = \beta \circ \alpha^k \circ \alpha = \alpha^{-k} \circ \beta \circ \alpha = \alpha^{-k} \circ \alpha^{-1} \circ \beta = \alpha^{-(k+1)} \circ \beta.$$

Si $k < 0$, on aura donc $\beta \circ \alpha^{-k} = \alpha^k \circ \beta$ et alors $\alpha^{-k} \circ \beta = \beta \circ \alpha^k$. Enfin, si m est impair, alors

$$\beta^m \circ \alpha^k = \beta \circ \beta^{m-1} \circ \alpha^k = \beta \circ \alpha^k \circ \beta^{m-1} = \alpha^{-k} \circ \beta \circ \beta^{m-1} = \alpha^{-k} \circ \beta^m.$$

4. Par définition, tout élément u de G s'écrit $u = \alpha^{n_1} \circ \beta^{m_1} \circ \dots \circ \alpha^{n_k} \circ \beta^{m_k}$. Si $k \geq 2$, on a

$$\alpha^{n_1} \circ \beta^{m_1} \circ \alpha^{n_2} \circ \beta^{m_2} = \alpha^{n_1 + (-1)^{m_1} n_2} \circ \beta^{m_1 + m_2}.$$

et on conclut par récurrence descendante pour l'existence. Pour l'unicité, il suffit de montrer que si $\alpha^n = \beta^m$, alors $n = m = 0$. Mais on aura alors $\alpha^n(0, 0) = (n, 0) = (0 \text{ ou } 1, m) = \beta^m(0, 0)$ si bien que $m = 0$ et donc $\alpha^n(0, 0) = (n, 0) = (0, 0)$ si bien que $n = 0$.

5. On a

$$[\alpha, \beta] = \alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1} \circ \beta^{-1} = \alpha^2.$$

De plus, $\beta \circ \alpha^2 \circ \beta^{-1} = \alpha^{-2}$ si bien que $\langle \alpha^2 \rangle \triangleleft G$ et donc $G^{\text{ab}} = G / \langle \alpha^2 \rangle$. L'homomorphisme de groupes $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow G^{\text{ab}}, (n, m) \mapsto \bar{\alpha}^n \bar{\beta}^m$ est surjectif et son noyau est $2\mathbb{Z} \oplus \{0\}$. Cela fournit l'isomorphisme annoncé. ■

Exercice 2.6 Soient $f_1 : H \rightarrow G_1$ et $f_2 : H \rightarrow G_2$ deux morphismes de groupes.

1. Montrer que si $H = \{1\}$, alors $G_1 \star_H G_2 \simeq G_1 \star G_2$.
2. Montrer que si $G_2 = \{1\}$, alors $G_1 \star_H G_2 \simeq \text{coker}(H \xrightarrow{f_1} G_1)$.
3. Montrer que si f_2 est surjectif (resp. bijectif), alors $G_1 \rightarrow G_1 \star_H G_2$ aussi.

Solution. 1. C'est immédiat, soit en considérant la propriété universelle soit en utilisant la définition :

$$G_1 \star_H G_2 := (G_1 \star G_2) / \langle\langle j_1(f_1(x)) \star j_2(f_2(x))^{-1}, x \in H \rangle\rangle.$$

2. Même argument.
3. Puisque $G_1 \star_H G_2$ est engendré par les images de G_1 et de G_2 , il suffit pour obtenir la surjectivité, de montrer que l'image de tout $x_2 \in G_2$ est aussi l'image d'un élément de G_1 . Si f_2 est surjectif, il existe $x \in H$ tel que $f_2(x) = x_2$. Si on pose $x_1 = f_1(x) \in G_1$, on aura dans $G_1 \star_H G_2$,

$$\bar{x}_2 = \overline{f_2(x)} = \overline{f_1(x)} = \bar{x}_1.$$

Enfin, si f_2 est bijectif, on peut considérer les morphismes $\text{Id}_{G_1} : G_1 \rightarrow G_1$ et $f_1 \circ f_2^{-1} : G_2 \rightarrow G_1$ et on a $\text{Id}_{G_1} \circ f_1 = f_1 = (f_1 \circ f_2^{-1}) \circ f_2$. Par définition, ceux-ci se prolongent donc en un morphisme $G_1 \star_H G_2 \rightarrow G_1$. En particulier, l'application composée $G_1 \rightarrow G_1 \star_H G_2 \rightarrow G_1$ est Id_{G_1} et la première flèche est donc nécessairement injective. ■

Exercice 2.7 Montrer qu'on dispose de suites exactes strictes de groupes topologiques :

1. $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times \rightarrow 1$,
2. $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S} \rightarrow 1$,
3. $0 \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n \rightarrow 1$,
4. $0 \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times \rightarrow 1$,
5. $0 \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S} \rightarrow 1$.

Solution. 1. On utilise l'application $z \mapsto e^{2i\pi z}$ ainsi que l'inclusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ (ou si on préfère $z \mapsto e^z$ et $n \mapsto 2i\pi n$). C'est clairement une suite exacte courte, \mathbb{Z} est muni de la topologie induite et l'exponentielle est une application ouverte comme toute application holomorphe non constante.

2. Même chose ou presque.
3. On fait le produit.
4. On utilise les applications $z \mapsto z^n$ et $k \mapsto e^{2ik\pi/n}$.
5. Même chose. ■

2.4.2 Groupe fondamental

Exercice 2.8 — 1. Montrer que si X est un espace topologique et $x \in X$, on a une bijection

$$[(\mathbb{S}, 1), (X, x)]_1 \simeq \pi_1(X, x), \quad [\hat{\gamma}] \leftrightarrow [\gamma]$$

(le premier ensemble désigne les applications continues pointées modulo homotopie relativement à 1).

2. Montrer que si γ et γ' sont deux lacets en x , alors $\hat{\gamma} \sim \hat{\gamma}'$ si et seulement si $[\gamma]$ et $[\gamma']$ sont conjugués dans $\pi_1(X, x)$.

Solution. Les deux assertions résultent de l'exercice 1.17. ■

Exercice 2.9 Montrer que si A est un rétract (continu) de X et $x \in A$, alors les applications induites

$$\pi_1(A, x) \rightarrow \pi_1(X, x) \quad \text{et} \quad \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(A, x)$$

sont respectivement injective et surjective. Montrer qu'elles sont bijectives si A est un rétract par déformation.

Solution. Par définition, si on désigne l'inclusion par $\iota : A \hookrightarrow X$ il existe une application continue $r : X \rightarrow A$ telle que $r \circ \iota = \text{Id}_A$. On aura donc $r_* \circ \iota_* = \text{Id}_{\pi_1(A, x)}$, ce qui implique que ι_* est injective et r_* surjective. Si c'est un rétract par déformation, alors $\iota : A \sim X$ et les applications sont donc bien bijectives. ■

Exercice 2.10 Soit G un groupe topologique et G_e la composante connexe de l'unité e .

1. Montrer qu'on a une suite exacte (stricte) de groupes (topologiques).

$$1 \rightarrow G_e \rightarrow G \rightarrow \pi_0(G) \rightarrow 1.$$

2. On note $*$ la loi de groupe ^a de $\mathcal{C}([0, 1], G)$. Montrer que si γ, γ' sont deux lacets en e , alors

$$(\gamma \cdot 1_e) * (1_e \cdot \gamma') = (1_e \cdot \gamma') * (\gamma \cdot 1_e) = \gamma \cdot \gamma'.$$

3. En déduire que $\pi_1(G, e)$ est abélien avec loi de groupe induite ^b par $*$.

- a. c'est-à-dire $(\gamma * \gamma')(t) = \gamma(t)\gamma'(t)$.
b. c'est-à-dire $[\gamma \cdot \gamma'] = [\gamma * \gamma']$.

Solution. 1. On sait que l'image d'un connexe par une application continue est connexe et qu'un produit de connexes est connexe. Puisque la multiplication et l'inverse sont continus sur G et préservent e , G_e est un sous-groupe de G . Puisque la multiplication par $g \in G$, à droite comme à gauche, est un homéomorphisme, la composante connexe de g est égale à la fois à gG_e et à G_eg . Cela montre que G_e est distingué et que $G/G_e = \pi_0(G)$. Attention que $\pi_0(G)$ n'est pas discret en général (prendre $G = \mathbb{Q}$).

2. Par définition, on a

$$(\gamma \cdot 1_e)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ e & \text{si } t > 1/2 \end{cases} \quad \text{et} \quad (1_e \cdot \gamma')(t) = \begin{cases} e & \text{si } t \leq 1/2 \\ \gamma'(2t - 1) & \text{si } t > 1/2 \end{cases}$$

si bien que

$$((\gamma \cdot 1_e) * (1_e \cdot \gamma'))(t) = ((1_e \cdot \gamma') * (\gamma \cdot 1_e))(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \gamma'(2t - 1) & \text{si } t > 1/2 \end{cases}$$

comme attendu.

3. Puisque la multiplication est continue dans G elle préserve les homotopies et passe donc au quotient. On en déduit que dans $\pi_1(G, e)$, on a toujours

$$[\gamma] * [\gamma'] = [\gamma'] * [\gamma] = [\gamma] \cdot [\gamma']. \quad \blacksquare$$

Exercice 2.11 — . Soit X un compact étoilé en a et $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}, t \mapsto e^{2i\pi t}$.

1. Montrer que si $f : X \rightarrow \mathbb{S}$ est une application continue, alors il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|x - y\| \leq \eta$, alors $f(x)/f(y) \neq -1$.
2. En déduire que le groupe $\mathcal{C}((X, a), (\mathbb{S}, 1))$ est engendré par $\mathcal{C}((X, a), (\mathbb{S} \setminus \{-1\}, 1))$.
3. En déduire que si $f : (X, a) \rightarrow (\mathbb{S}, 1)$ une application continue, alors il existe une unique application continue $\tilde{f} : (X, a) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ telle $p \circ \tilde{f} = f$.

Solution. 1. Puisque f est continue sur X qui est compact, c'est une application uniformément continue et il existe donc $\eta > 0$ tel que, si $\|x - y\| \leq \eta$, alors $|f(x) - f(y)| < 2$. Or, dans \mathbb{S} , on a toujours $|z - z'| \leq 2$ avec égalité si et seulement si $z/z' = -1$.

2. Il s'agit de montrer que si $f : X \rightarrow \mathbb{S}$ est une application continue telle que $f(a) = 1$, alors il existe, pour $i = 0, \dots, n$, des applications continues $f_i : X \rightarrow \mathbb{S} \setminus \{-1\}$ telles que $f_i(a) = 1$ et ³

$$\forall x \in X, \quad f(x) = f_1(x) \cdots f_n(x). \quad (2.2)$$

On peut supposer que $a = 0$. Si $n \in \mathbb{N}$, alors pour tout $i = 0, \dots, n$ et $x \in X$, on a

$$\left\| \frac{(i+1)x}{n+1} - \frac{ix}{n+1} \right\| \leq \|x\|/n+1.$$

Puisque X est borné, si on se donne $\eta > 0$, on peut choisir $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|x\|/(n+1) \leq \eta$ pour tout $x \in X$. Puisque X est étoilé en 0, on peut poser

$$\forall i = 0, \dots, n, \forall x \in X, \quad f_i(x) = \frac{f\left(\frac{i+1}{n+1}x\right)}{f\left(\frac{i}{n+1}x\right)}$$

et on aura bien la formule (2.2). Enfin, la première question nous montre qu'on peut choisir η de telle sorte que $f_i(x) \neq -1$ pour tout $x \in X$.

3. Si f est constante (égale à 1), alors \tilde{f} sera une fonction continue sur X à valeurs dans \mathbb{Z} . Puisque X est connexe et \mathbb{Z} discret, elle est nécessairement constante (égale à 0). Cela montre que le morphisme de groupes

$$p_* : \mathcal{C}((X, a), (\mathbb{R}, 0)) \rightarrow \mathcal{C}((X, a), (\mathbb{S}, 1))$$

est injectif. Supposons maintenant que $\forall x \in X, f(x) \neq -1$. Si on désigne par $\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$ avec $\arg(z) \in]-\pi, \pi[$ pour $z \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$, il suffit alors de poser $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \ln(f(x))$. Puisque $\mathcal{C}((X, a), (\mathbb{S}, 1))$ est engendré par $\mathcal{C}((X, a), (\mathbb{S} \setminus \{-1\}, 1))$, cela montre que p_* est surjectif. Notre assertion est ainsi démontrée. \blacksquare

3. Théoriquement, c'est f_i^\pm mais ça ne change rien ici.

Exercice 2.12 Montrer que l'application $\deg : \pi_1(\mathbb{S}, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme de groupes.

Solution. On note toujours $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}, t \mapsto e^{2\pi it}$ et on désigne par $\tilde{\gamma}$ l'unique relèvement basé en 0 dans \mathbb{R} d'un chemin γ basé en 1 dans \mathbb{S} . On rappelle aussi que si γ est un lacet, alors $\deg(\gamma) := \tilde{\gamma}(1)$. On aura $p(\tilde{\gamma}(1)) = (p_*\tilde{\gamma})(1) = \gamma(1) = 0$ si bien que $\deg(\gamma) \in \mathbb{Z}$. On se donne maintenant deux lacets γ, γ' en 1 dans \mathbb{S} et une homotopie $h : \gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma'$. Il résulte alors de l'exercice 2.11 appliqué à h qu'il existe une homotopie $\tilde{h} : \tilde{\gamma} \sim_{\{0,1\}} \tilde{\gamma}'$ et en particulier que $\deg(\gamma) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1) = \deg(\gamma')$. Cela montre que l'application est bien définie. Montrons que si γ, γ' sont deux lacets en 1 dans \mathbb{S} , alors

$$\forall t \in [0, 1], \quad (\widetilde{\gamma \cdot \gamma'})(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}(2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \tilde{\gamma}(1) + \tilde{\gamma}'(2t - 1) & \text{si } t > 1/2. \end{cases}$$

En effet, si on désigne provisoirement ce chemin par δ , on a bien $p_*\delta = \gamma \cdot \gamma'$ et $\delta(0) = 0$. On en déduit que

$$\deg(\gamma \cdot \gamma') = (\widetilde{\gamma \cdot \gamma'})(1) = \tilde{\gamma}(1) + \tilde{\gamma}'(1) = \deg(\gamma) + \deg(\gamma').$$

Supposons maintenant que $\deg(\gamma) = 0$. Cela signifie que $\tilde{\gamma}$ est un lacet en 0. Puisque \mathbb{R} est simplement connexe, on en déduit que $\tilde{\gamma} \sim_{\{0,1\}} \tilde{1}_0$. On aura donc $\gamma \sim_{\{0,1\}} 1_1$. Cela montre que l'application est injective. Enfin, l'application est surjective car $\gamma(t) := e^{2i\pi nt}$ définit bien un lacet de degré n . ■

Exercice 2.13 Montrer que si T est un tore de dimension n , alors $\pi_1(T, 0)$ est un groupe abélien libre de rang n .

Solution. Puisque $T \simeq \mathbb{T}^n$ et que $\mathbb{T} = \mathbb{S}$, cela résulte de la proposition 2.2.6 et du théorème 2.2.13. ■

Exercice 2.14 Montrer que si $n \leq 2$ et $n \neq m$, il n'existe pas d'homéomorphisme $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^m$.

Solution. On peut supposer $n < m$ et on aurait alors un homéomorphisme $\mathbb{R}^n \setminus 0 \simeq \mathbb{R}^m \setminus a$. Pour $n = 0$, il suffit de remarquer que $\mathbb{R}^m \setminus a$ est non-vide. Pour $n = 1$, il suffit de remarquer que $\mathbb{R}^m \setminus a$ est connexe mais pas $\mathbb{R} \setminus 0$. Pour $n = 2$, il suffit de rappeler que $\mathbb{R}^m \setminus a \sim \mathbb{S}^{m-1}$ est simplement connexe mais pas $\mathbb{R}^2 \setminus 0 \sim \mathbb{S}$. ■

Exercice 2.15 — . 1. Montrer que \mathbb{S} n'est pas un rétract (continu) de \mathbb{B}^2 .
2. Montrer que l'application

$$F : (\mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2) \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{S}, \quad (x, y) \mapsto]xy) \cap \mathbb{S}$$

est continue (on a posé $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{B}^2\}$).

3. Montrer que si $f : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$ est une application continue sans point fixe, alors l'application

$$\mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{S}, \quad x \mapsto F(f(x), x)$$

est une rétraction.

4. En déduire qu'une application continue $f : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$ a un point fixe (théorème de Brouwer).

Solution. 1. Si \mathbb{S} était un rétract de \mathbb{B}^2 , on aurait une application injective

$$\mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{S}, 1) \hookrightarrow \pi_1(\mathbb{B}^2, 1) = 0. \text{ Contradiction.}$$

2. La condition $F(x, y) = z$ s'écrit

$$\exists t > 0, \quad z = x + t(y - x) \quad \text{et} \quad |z| = 1.$$

On voit donc que t est alors l'unique racine positive de l'équation polynomiale $|x + t(y - x)|^2 - 1 = 0$, c'est-à-dire

$$t = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad \text{avec} \quad a = |y - x|^2, b = 2\operatorname{Re}(\bar{x}(y - x)), c = |x|^2 - 1,$$

qui est bien une fonction continue de x et y .

3. Puisque $(f(x), x) \notin \Delta$, l'application $x \mapsto F(f(x), x)$ est bien définie et c'est clairement une rétraction car $]f(x), x) \cap \mathbb{S} = x$ si $x \in \mathbb{S}$.
4. Il existerait sinon une rétraction continue, ce qui contredirait la première assertion. ■

Exercice 2.16 — . Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme unitaire de degré $n > 0$ sans racine dans \mathbb{C} . On pose $f(z) := \frac{P(z)}{\|P(z)\|}$ et on considère, pour $r > 0$, le lacet $\gamma(t) = f(re^{2i\pi t})$ dans \mathbb{S} . On considère aussi le lacet standard $\gamma_n(t) := e^{2i\pi nt}$.

1. Montrer que $f \sim_0 f(0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}$ et en déduire que γ est trivial.
2. Montrer que $\lim_{\|z\| \rightarrow +\infty} \left(\frac{P(z)}{\|P(z)\|} - \frac{z^n}{\|z^n\|} \right) = 0$.
3. En déduire qu'il existe $r > 0$, tel que $\forall t \in [0, 1], |\gamma(t) - \gamma_n(t)| < 2$, et donc que $\gamma(t) \neq -\gamma_n(t)$, puis finalement que $\gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma_n$.
4. Conclure finalement que \mathbb{C} est algébriquement clos (théorème de D'Alembert-Gauss).

Solution. 1. L'existence de l'homotopie résulte du fait que \mathbb{C} est contractile et \mathbb{S} connexe par arcs. Par composition, on déduit que γ est homotope (à extrémités fixées) au lacet trivial.

2. Quand $\|z\| \rightarrow +\infty$, on a $P(z)/z^n \rightarrow 1$ et donc

$$\frac{P(z)}{\|P(z)\|} - \frac{z^n}{\|z^n\|} = \frac{z^n}{\|z^n\|} \left(\frac{P(z)/z^n}{\|P(z)/z^n\|} - 1 \right) \rightarrow 0.$$

3. Si $r \gg 0$, en posant $z = re^{2i\pi t}$ pour $t \in [0, 1]$, on aura

$$|\gamma(t) - \gamma_n(t)| = \left| \frac{P(z)}{\|P(z)\|} - \frac{z^n}{\|z^n\|} \right| < 2$$

et donc nécessairement $\gamma(t) \neq -\gamma_n(t)$. Or on a vu dans l'exercice 1.11 qu'alors $\gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma_n$.

4. On voit donc que γ_n est trivial si bien que $n = 0$. Contradiction. Donc P a une racine dans \mathbb{C} . ■

- Exercice 2.17** 1. Déterminer le groupe fondamental de \mathbb{C}^\times .
 2. Déterminer le groupe fondamental du cylindre

$$X := \{(x, y, z), x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

3. Montrer que si L est une droite dans un espace affine E de dimension trois et $x \notin L$, alors $\pi_1(E \setminus L, x) \simeq \mathbb{Z}$.
 4. Montrer que la rétraction $\text{id} : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas une rétraction par déformation.

Solution. 1. On a $\mathbb{S} \sim \mathbb{C}^\times$ et donc $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \simeq \mathbb{Z}$.

2. On a $X \simeq \mathbb{S} \times [0, 1] \sim \mathbb{S}$ et on trouve encore \mathbb{Z} .

3. On a $E \setminus L \simeq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus 0) \sim \mathbb{R}^2 \setminus 0 \sim \mathbb{S}$.

4. On a $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{i\}, 0) \simeq \mathbb{Z}$ et \mathbb{R} est simplement connexe si bien que $\mathbb{C} \setminus \{i\} \not\sim \mathbb{R}$. ■

- Exercice 2.18** — . 1. Montrer que l'action naturelle de $A \in M_n(\mathbb{Z})$ sur \mathbb{R}^n induit une application continue $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ et que f_* a pour matrice A dans la base canonique de $\pi_1(\mathbb{T}^n, 0)$.
 2. En déduire que f est bijective si et seulement si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Solution. 1. Comme $\mathbb{T}^n \simeq \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, la multiplication par A induit bien une application continue sur le tore. L'entrée a_{ij} de A va induire un homomorphisme $\pi_1(\mathbb{S}, 1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}, 1)$ et il faut montrer qu'il est donné par $\gamma \mapsto \gamma^{a_{ij}}$ avec $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$. On est donc ramené au cas $n = 1$. On regarde donc la multiplication par $a \in \mathbb{Z}$ sur \mathbb{R} et l'application correspondante f sur \mathbb{S} qui est donnée par $z \mapsto z^a$. On aura alors

$$f_*(\gamma)(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t)) = f(e^{2i\pi t}) = e^{2i\pi at} = \gamma^a(t)$$

si bien que $f_*[\gamma] = [\gamma]^a$. On pouvait aussi travailler sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} avec le générateur $\tilde{\gamma}(t) = \bar{t}$.

2. Si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$, il est clair que f est bijective (son inverse étant induit par A^{-1}). Réciproquement, si f est bijective, c'est un automorphisme du groupe topologique \mathbb{T}^n et il suit que f_* est un automorphisme du groupe $\pi_1(\mathbb{T}^n, 1) \simeq \mathbb{Z}^n$. Comme sa matrice est A , on doit avoir $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$. ■

Exercice 2.19 Montrer que

1. $\pi_1(\text{SO}_n, 1) \simeq \pi_1(\text{O}_n, 1) \simeq \pi_1(\text{GL}_n, 1)$,
 2. En déduire que $\pi_1(\text{GL}_2, 1) \simeq \mathbb{Z}$.

Solution. 1. On sait que SO_n est la composante connexe de O_n et que $\text{O}_n \sim \text{GL}_n$.
 2. En effet, on sait que $\text{SO}_2 \simeq \mathbb{S}$. ■

2.4.3 Théorème de van Kampen

- Exercice 2.20** 1. Montrer (par récurrence sur n) que si $E \subset \mathbb{R}^2$ est un ensemble à n éléments et $x \notin E$, alors $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus E, x) \simeq \mathbb{Z}^{*n}$.
 2. Montrer que si $E \subset \mathbb{S}^2$ est un ensemble à $n > 0$ éléments et $x \notin E$, alors $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus E, x) \simeq \mathbb{Z}^{*(n-1)}$.

3. Montrer que si X est un disque à n trous, alors $\pi_1(X, x) \simeq \mathbb{Z}^{*n}$.

Solution. 1. Si $n = 1$, on a $\mathbb{R}^2 \setminus E \sim \mathbb{S}$ et on peut donc supposer dorénavant que $n \geq 2$ et procéder par récurrence forte. On peut trouver une droite Δ qui rencontre l'enveloppe convexe de E mais ne passe par aucun point de E . On désigne par H_i avec $i = 1, 2$ les demi-plans délimités par Δ , $E_i = E \cap H_i$, n_i le nombre de points de E_i et $X_i = H_i \setminus E_i$. On a alors $n = n_1 + n_2$ avec $n_1, n_2 < n$. Par construction, $\mathbb{R}^2 \setminus E = X_1 \cup X_2$ et $X_1 \cap X_2 = \Delta$ est un rétract simplement connexe d'ouverts de X_1 et X_2 . Techniquement, si $\Delta : ax + by + c = 0$ et qu'on pose $\Delta_\epsilon : |ax + by + c| < \epsilon$, alors $\Delta_\epsilon \cap E = \emptyset$ pour ϵ petit et on prend $\Delta_i = \Delta_\epsilon \cap H_i$. On applique ensuite le (corollaire du) théorème de van Kampen :

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus E, x) \simeq \pi_1(X_1, x) \star \pi_1(X_2, x).$$

En projetant H_2 sur Δ , on voit que X_1 est un rétract fort par déformation de $\mathbb{R}^2 \setminus E_1$ et symétriquement. On a donc $\pi_1(X_i, x) = \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus E_i, x) \simeq \mathbb{Z}^{*n_i}$ par récurrence et on peut conclure. Alternativement, on pouvait utiliser le vrai théorème de van Kampen en remplaçant H_i par $H_{i\epsilon} := H_i \cup \Delta_\epsilon$ pour $i = 1, 2$.

2. Si $E = \{a_1, \dots, a_n\}$, on considère la projection stéréographique $p : \mathbb{S}^2 \setminus a_n \simeq \mathbb{R}^2$. On a alors un homéomorphisme $\mathbb{S}^2 \setminus E \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{p(a_1), \dots, p(a_{n-1})\}$.
3. Un disque à n trous est une partie X de \mathbb{R}^2 de la forme $\mathbb{B}^2(a, r) \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathring{\mathbb{B}}^2(a_i, r_i)$ avec $\mathring{\mathbb{B}}^2(a_i, r_i) \subset \mathbb{B}^2(a, r)$ et $\mathring{\mathbb{B}}^2(a_i, r_i) \cap \mathring{\mathbb{B}}^2(a_j, r_j) = \emptyset$ pour $i \neq j$. Il est clair que X est un rétract fort par déformation de $X' := \mathbb{B}^2(a, r) \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$. Techniquement, on considère l'application r qui envoie $x \in \mathbb{B}^2(a_i, r_i) \setminus a_i$ sur $a_i + \frac{x - a_i}{\|x - a_i\|}$ et on pose $h(x, t) = (1 - t)x + tr(x)$. De même X' est un rétract fort par déformation de $\mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$. ■

Exercice 2.21 On suppose $n \geq 3$ et on considère la projection stéréographique $p : \mathbb{S}^n \setminus a \simeq \mathbb{R}^n$ avec $a = (0, \dots, 0, 1)$.

1. Montrer que si $A \subset \mathbb{R}^n$ est bornée, alors p induit un isomorphisme

$$\pi_1(\mathbb{S}^n \setminus p^{-1}(A), x) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus A, p(x)).$$

2. Montrer que p induit des homéomorphismes pour $k = 1, \dots, n - 1$

$$\mathbb{S}^k \times 0 \simeq \mathbb{S}^k \times 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{S}^n \setminus (0 \times \mathbb{S}^k) \simeq \mathbb{R}^n \setminus (0 \times \mathbb{R}^k).$$

3. En déduire le groupe fondamental de $\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{S}^k \times 0)$.

Solution. 1. On pose $X := \mathbb{S}^n \setminus p^{-1}(A)$ et $X_1 := X \setminus a \simeq \mathbb{R}^n \setminus A$. Puisque A est bornée dans \mathbb{R}^n , on voit que \overline{A} est compact et puisque p est un homéomorphisme, $p^{-1}(\overline{A})$ est un compact de \mathbb{R}^{n+1} qui ne contient pas a . Il existe donc une boule $\mathbb{B}(a, \epsilon)$ qui ne rencontre pas $p^{-1}(A)$ et on pose $X_2 := \mathbb{B}(a, \epsilon) \cap \mathbb{S}^n$. On a alors $X = \mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2$ et $X_1 \cap X_2 = X_2 \setminus a$. Bien sûr, $X_2 \simeq \mathbb{B}^n$ est simplement connexe mais, puisque $n \geq 3$, $X_2 \setminus a \simeq \mathbb{B}^n \setminus 0 \sim \mathbb{S}^{n-1}$ aussi est simplement connexe. On applique le théorème de van Kampen.

2. Par définition, p induit un homéomorphisme

$$\mathbb{S}^{n-1} \times 0 = \mathbb{S}^n \cap (\mathbb{R}^n \times 0) \simeq \mathbb{S}^{n-1},$$

et donc en particulier $\mathbb{S}^k \times 0 \simeq \mathbb{S}^k \times 0$. De même, p induit la projection stéréographique $(0 \times \mathbb{S}^k) \setminus a \simeq 0 \times \mathbb{R}^k$.

3. Il résulte de la première question appliquée à $A = \mathbb{S}^k \times 0$ que

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{S}^k \times 0), p(x)) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^n \setminus (\mathbb{S}^k \times 0), x).$$

D'autre part, on a aussi

$$\mathbb{S}^n \setminus (\mathbb{S}^k \times 0) \simeq \mathbb{S}^n \setminus (0 \times \mathbb{S}^k) \simeq \mathbb{R}^n \setminus (0 \times \mathbb{R}^k) \simeq (\mathbb{R}^{n-k} \setminus 0) \times \mathbb{R}^k \sim \mathbb{S}^{n-k-1}.$$

On trouve donc \mathbb{Z} quand $k = n - 2$ et 0 si $n > 3$. Remarquons que, dans le cas $n = 3$ et $k = 1$, on pouvait utiliser la question 2) de l'exercice 1.14 et appliquer le théorème de van Kampen à $\mathbb{S}^2 \cup (0 \times \mathbb{B})$. ■

3. Revêtements

3.1 Action de groupe (rappels)

Si X est un ensemble, on note $\mathcal{S}(X)$ le groupe des permutations de X (les bijections de X dans lui-même muni de la composition).

Définition 3.1.1 Une *action* (à gauche) d'un groupe G sur un ensemble X est un morphisme de groupes

$$G \rightarrow \mathcal{S}(X), \quad g \mapsto (x \mapsto g.x).$$

Remarques 1. Ça signifie que $1.x = x$ et $(gh).x = g(h.x)$.

2. Une *action à droite* est une action (à gauche) du groupe opposé G^{op} . On écrit alors $x.g$ et on aura donc $x.1 = x$ et $x.(gh) = (x.g).h$.

3. L'action est dite *fidèle* si l'application $G \hookrightarrow \mathcal{S}(X)$ est injective. On peut alors identifier G avec un sous-groupe de $\mathcal{S}(X)$.

4. Le *stabilisateur* G_x (resp. l'*orbite* Gx) de $x \in X$ est

$$G_x := \{g \in G, g.x = x\} \quad (\text{resp. } Gx := \{g.x : g \in G\}).$$

Les stabilisateurs sont des sous-groupes, les orbites forment une partition de X et on désigne par X/G l'ensemble *quotient* formé des orbites.

5. On a pour tout $x \in X$, une bijection $G/G_x \simeq Gx, \bar{g} \leftrightarrow g.x$.

6. L'action est *transitive* s'il existe une unique orbite (équivalent à $G/G_x \simeq X$).
En d'autres termes : $\forall x, y \in X, \exists g \in G, y = g.x$.

7. L'action est *libre* (ou sans points fixes) si tous les stabilisateurs sont triviaux (équivalent à $G \simeq Gx$). Une action libre est fidèle.

8. Si $H \subset G$ est un sous-groupe, alors H agit librement sur G par translation à gauche (et à droite).

- Exemples**
1. \mathbb{R}^\times agit sur \mathbb{S}^n par $\lambda.x = \frac{\lambda}{|\lambda|}x$. On a $(\mathbb{R}^\times)_x = \mathbb{R}_{>0}$, $(\mathbb{R}^\times)x = \{x, -x\}$ et $\mathbb{S}^n/\mathbb{R}^\times \simeq \mathbb{P}^n$.
 2. Analogues en remplaçant \mathbb{R}^\times par $\mu_2 = \{1, -1\}$ ou \mathbb{S}^n par $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ (actions libres).

Lemme 3.1.2 Soit G un groupe agissant *librement* sur un ensemble X et $U \subset X$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes

1. L'application composée $U \hookrightarrow X \xrightarrow{p} X/G$ est injective,
2. $\forall g \neq 1 \in G, \quad gU \cap U = \emptyset$,
3. $\forall g \neq h \in G, \quad gU \cap hU = \emptyset$.

Démonstration. Si $g \in G$ et $x \in gU \cap U$, alors il existe $y \in U$ tel que $x = gy$ et donc $p(x) = p(y)$. Si l'application composée est injective, on a $x = y$ et donc $x = gx$ si bien que $g \in G_x$. Comme l'action est libre, on a $g = 1$.

Réciproquement, supposons que la condition est satisfaite. Soient $x, y \in U$ tels que $p(x) = p(y)$. Alors, il existe $g \in G$ tel que $x = gy$ et donc $x \in gU \cap U$ si bien que $g = 1$ et donc $x = y$.

De plus, si ces conditions sont satisfaites et $g \neq h \in G$, alors $gU \cap hU = g(U \cap g^{-1}hU) = \emptyset$. ■

Définition 3.1.3 Une action d'un groupe topologique G sur un espace topologique et X est *continue* si l'application

$$G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto gx$$

est continue.

Remarques (voir exercice 3.1).

1. On munit toujours X/G de la topologie quotient. L'application quotient $p : X \mapsto X/G$ est alors (continue et) ouverte.
2. Si H est un sous-groupe d'un groupe topologique G , alors l'action par translation à gauche est continue (et libre)
3. Si une action est continue, alors c'est une action par homéomorphismes : pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto gx$ est un homéomorphisme. Et réciproquement si G est discret.

Définition 3.1.4 Une action continue d'un groupe *discret* G sur un espace topologique X est *proprement discontinue* si tout point $x \in X$ possède un voisinage U tel que $gU \cap U = \emptyset$ pour $g \neq 1$.

- Remarques**
1. Attention, certains auteurs disent *errante* ou *topologiquement libre* pour ce que nous avons appelé *proprement discontinue*.
 2. Attention, certains auteurs disent que l'action est *proprement discontinue* si pour tout compact $K \subset X$, il existe un nombre fini de $g \in G$ tels que $K \cap gK \neq \emptyset$. Cette condition est strictement plus forte que la notre quand X est séparé.
 3. Une action proprement discontinue est libre. En particulier, elle est fidèle et on peut ainsi identifier G avec un groupe d'homéomorphismes de X .

4. Si H est un sous-groupe discret d'un groupe topologique G , alors l'action par translation à gauche de H est proprement discontinue (voir exercice 3.2).

3.2 Revêtement

On considère maintenant une nouvelle manière de déformer un espace :

Définition 3.2.1 Une application surjective^a $p : X' \rightarrow X$ est un *revêtement* si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x , tel que $p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} U_i$ où les U_i sont des ouverts de X' et p induit un homéomorphisme $U_i \simeq U$:

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xleftarrow{\quad} & \coprod_{i \in I} U_i & & U_i \\ \downarrow p & & \downarrow & & \downarrow \simeq \\ X & \xleftarrow{\quad} & U \ni x & & U. \end{array}$$

On dit alors que $\{U_i\}_{i \in I}$ est une *trivialisat*ion de p au dessus de U et que chaque U_i est un *feuillet*.

^a. C'est automatique si X est connexe et X' non vide.

On dira aussi parfois que X' est un revêtement de X sans mentionner p explicitement.

- Exemples**
1. L'application $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}, t \mapsto e^{2i\pi t}$ est un revêtement.
 2. Plus généralement : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ est un revêtement.
 3. L'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est un revêtement.
 4. L'application $\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}, z \mapsto z^n$ (ou $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$) est un revêtement.
 5. La projection $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ est un revêtement.
 6. La projection $\mathbb{S}^0 \coprod \mathbb{S}^0 \rightarrow \mathbb{S}^0$ est un revêtement (trivial) mais il existe une *autre* décomposition $p^{-1}(\mathbb{S}^0) = V_1 \cup V_2$ avec $V_1 = 1 \coprod -1$ et $V_2 = -1 \coprod 1$.

- Remarques**
1. Un revêtement est une application surjective, continue et ouverte (et X est donc muni de la topologie quotient).
 2. Si I est un espace topologique discret non vide, alors la projection $p : X \times I \rightarrow X$ est un revêtement (dit *trivial*). En effet, on a une décomposition en union disjointe d'ouverts $X \times I = \coprod_{i \in I} (X \times i)$ tous homéomorphes à X .
 3. Réciproquement, si $p : X' \rightarrow X$ est un revêtement, il existe pour tout $x \in X$ un voisinage ouvert U de x et un espace discret I et un homéomorphisme $p^{-1}(U) \simeq U \times I$ compatible avec les projections :

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xleftarrow{\quad} & p^{-1}(U) & \xrightarrow{\quad \simeq \quad} & U \times I \\ \downarrow p & & \searrow & & \swarrow \\ X & \xleftarrow{\quad} & U & & \end{array}$$

4. Si $p : X' \rightarrow X$ est un revêtement, $Y \subset X$ et $Y' := p^{-1}(Y)$, alors l'application induite $Y' \rightarrow Y$ est aussi un revêtement.
5. Un produit fini de revêtements est un revêtement.
6. Si $p : X' \rightarrow X$ est un revêtement et X est séparé, alors X' aussi.

7. Si $p : X' \twoheadrightarrow X$ est un revêtement et X' est connexe (ou connexe par arcs) alors X aussi (car p est continue surjective).
8. Si $p : X' \twoheadrightarrow X$ est un revêtement, X' est compact et X est séparé, alors X est compact.
9. Si $p : X' \twoheadrightarrow X$ est un revêtement, alors X est localement connexe¹ si et seulement si X' l'est.
10. Si $p : X' \twoheadrightarrow X$ est un revêtement et $x \in X$, alors la fibre $p^{-1}(x)$ est discrète et le degré de p en x est le cardinal de la fibre. Si X est connexe, alors le degré est constant.

On dispose aussi d'une notion un peu plus faible (locale en haut) :

Définition 3.2.2 Une application $p : X' \rightarrow X$ est un *homéomorphisme local* si, pour tout $x' \in X'$ il existe un voisinage ouvert U' de x' (resp. U de $x := p(x')$) tel que p induise un homéomorphisme $U' \simeq U$.

Exemple La projection

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1 \text{ ou } y = 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \quad (3.1)$$

est un homéomorphisme local surjectif mais ce n'est pas un revêtement.

Proposition 3.2.3 Si X' est séparé, alors $p : X' \rightarrow X$ est un revêtement de degré fini n si et seulement si c'est un homéomorphisme local et toutes les fibres ont même cardinal n .

Démonstration. La condition est clairement nécessaire et on va montrer qu'elle est suffisante. Soit $x \in X$ et $p^{-1}(x) = \{x'_1, \dots, x'_n\}$. Il existe alors des voisinages ouverts U_i et U'_i de x et x'_i respectivement tel que p induise un homéomorphisme $U'_i \simeq U_i$. Puisque X' est séparé, on peut supposer que $U'_i \cap U'_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. On peut ensuite remplacer U_i par $U := \bigcap_{i=1}^n U_i$ puis U'_i par $U'_i \cap p^{-1}(U)$. On va montrer qu'alors $p^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n U'_i$. Soit $y' \in X'$ tel que $u := p(y') \in U$. Il existe alors pour tout $i = 1, \dots, n$, un $y'_i \in U'_i$ tel que $p(y'_i) = u$. Comme, pour $i \neq j$, $U'_i \cap U'_j = \emptyset$, on a $y'_i \neq y'_j$. Comme les fibres ont le même nombre n d'éléments, on a $p^{-1}(u) = \{y'_1, \dots, y'_n\}$ et il existe donc i tel que $y' = y'_i$. ■

Proposition 3.2.4 Soit G un groupe topologique agissant continûment sur un espace topologique X . Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. G est discret et l'action est proprement discontinue,
2. l'action est libre et l'application quotient est un revêtement,
3. l'action est libre et l'application quotient est un homéomorphisme local.

Démonstration. On désigne la projection par $p : X \twoheadrightarrow X/G$. Supposons que G est discret et que l'action est proprement discontinue. On sait déjà que l'action est libre. Soit $x \in X$ et U un voisinage ouvert de x tel que $gU \cap U = \emptyset$ pour $g \neq 1$. Si on pose $V = p(U)$, alors l'application $U \rightarrow V$ induite par p est surjective, continue et ouverte

1. Ou localement n'importe quoi d'ailleurs.

mais aussi injective grace au lemme 3.1.2. C'est donc un homéomorphisme. De plus, on a $p^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} gU$ qui est une union disjointe d'ouverts homéomorphes à U . Il suit que p est un revêtement.

Supposons réciproquement que l'action est libre et que p est un homéomorphisme local. Soit $x \in X$. Puisque l'action est libre et continue, on a une bijection continue $G \simeq Gx = p^{-1}(x)$ et puisque p est un homéomorphisme local, $p^{-1}(x)$ est discret (clair). Il suit que G est nécessairement discret. De plus, il existe un voisinage U de x dans X tel que p induise un homéomorphisme $U \simeq p(U)$. En particulier, l'application composée $U \hookrightarrow X \twoheadrightarrow X/G$ est injective. Il résulte du lemme 3.1.2 que pour tout $g \neq 1$, on a $U \cap gU = \emptyset$ et l'action est donc proprement discontinue. ■

Corollaire 3.2.5 Soit H un sous-groupe d'un groupe topologique G . Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. H est discret,
2. l'application quotient $G \twoheadrightarrow G/H$ est un revêtement. ■

Remarque De manière équivalente : si $1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 1$ est une suite exacte stricte de groupes topologiques, alors G' est discret si et seulement si $G \rightarrow G''$ est un revêtement.

- Exemples**
1. Avec $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, on trouve $\mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}$.
 2. Avec $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, on trouve $\mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{T}^n$.
 3. Avec $2i\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$, on trouve $\mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{C}^\times$.
 4. Avec $\mu_n \subset \mathbb{S} (\subset \mathbb{C}^\times)$, on trouve $\mathbb{S} \twoheadrightarrow \mathbb{S}/\mu_n \simeq \mathbb{S}$ ($\mathbb{C}^\times \twoheadrightarrow \mathbb{C}^\times/\mu_n \simeq \mathbb{C}^\times$).
 5. Avec $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n, (\bar{1}, x) \mapsto -x$, on trouve $\mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{S}^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{P}^n$.

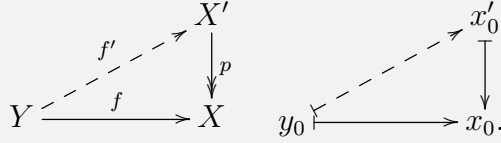
3.3 Monodromie

Définition 3.3.1 Soit $p : X' \twoheadrightarrow X$ un revêtement et $f : Y \rightarrow X$ une application continue. Un *relèvement* de f le long de p est une application continue $f' : Y \rightarrow X'$ telle que $p \circ f' = f$.

- Remarques**
1. Lorsque $f(y) = x$ et $f'(y) = x'$, on dira aussi que $f' : (Y, y) \rightarrow (X', x')$ est un *relèvement* de $f : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ le long de $p : (X', x') \rightarrow (X, x)$.
 2. Si $x \in X$ et $x' \in p^{-1}(x)$, on dira que x' est un *relèvement* de x . Cette définition est compatible avec la précédente dans la mesure où on peut identifier un point $x \in X$ avec l'application (continue) $\{0\} \rightarrow X, 0 \mapsto x$.

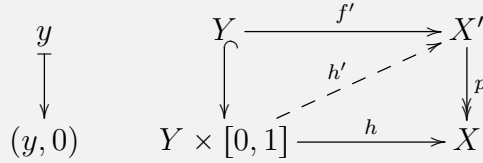
Proposition 3.3.2 Soit $p : X' \twoheadrightarrow X$ un revêtement, $f : Y \rightarrow X$ une application continue avec Y connexe, $y_0 \in Y$ et $x'_0 \in X'$. Il existe alors au plus un relèvement

f' de f tel que $f'(y_0) = x'_0$:



Démonstration. Soient f'' un autre relèvement de f tel que $f''(y_0) = x'_0$ et $C := \{y \in Y, f'(y) = f''(y)\}$. Soit $y \in C$ et U' un feuillet qui contient $f'(y) = f''(y)$. On pose $W = f'^{-1}(U') \cap f''^{-1}(U')$. Par construction, W est un ouvert de C qui contient y . Cela montre que C est ouvert. Soit maintenant $y \notin C$ et U un voisinage de $f(y)$ qui trivialise le revêtement. Puisque $f'(y) \neq f''(y)$, il existe deux feuillets distincts (et donc disjoints) U' et U'' au dessus de U tels que $f'(y) \in U'$ et $f''(y) \in U''$. Par construction, $W := f'^{-1}(U') \cap f''^{-1}(U'')$ est un ouvert de $Y \setminus C$ qui contient y . Cela montre que $Y \setminus C$ est un ouvert. Donc C est fermé, ouvert, et non vide car il contient y_0 . Puisque Y est connexe, on a $Y = C$ et donc $f' = f''$. ■

Proposition 3.3.3 Soit $p : X' \twoheadrightarrow X$ un revêtement, $h : f \sim g : Y \rightarrow X$ une homotopie et $f' : Y \rightarrow X'$ un relèvement de f . Il existe alors un unique relèvement $h' : Y \times [0, 1] \rightarrow X'$ de h tel que $f' = h'_0$:



Démonstration. Si $y \in Y$, alors $y \times [0, 1]$ est connexe et $h'(y, 0) = f'(y)$. L'unicité résulte donc de la proposition 3.3.2.

On montre maintenant qu'on peut composer deux tels relèvements et on suppose déjà qu'il en existe un. Posons $g' = h'_1$. Soit $k : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie satisfaisant $k_0 = g$. Supposons que celle-ci aussi se relève en une homotopie $k' : Y \times [0, 1] \rightarrow X'$ telle que $k'_0 = g'$. On peut alors considérer l'homotopie $h \cdot k$ composée h et k . Il est clair que l'homotopie $h' \cdot k'$ composée h' et k' est un relèvement de $h \cdot k$ tel que $f' = (h' \cdot k')_0$.

On montre ensuite que la question de l'existence est locale sur Y . On suppose donc que pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage W_y de y dans Y et une application h'_y satisfaisant la propriété sur W_y . Par unicité, si $y_1, y_2 \in Y$, alors h'_{y_1} et h'_{y_2} coïncident sur $W_{y_1} \cap W_{y_2}$. L'existence de h' en résulte.

Supposons maintenant que le revêtement est trivial si bien qu'on a une union disjointe d'ouverts $X' = \bigcup_{i \in I} X_i$ tel que p induise un homéomorphisme $p_i : X_i \simeq X$. On dispose alors d'un recouvrement ouvert disjoint $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ en posant $Y_i := f'^{-1}(X_i)$ et il suffit de prendre $h' = p_i^{-1} \circ h$ sur $Y_i \times [0, 1]$.

En général, pour tout $y \in Y$ (fixé pour l'instant) et $t \in [0, 1]$, il existe une trivialisation de p sur un ouvert $U_t \ni h(y, t)$. Puisque h est continue, on peut trouver un voisinage W_t de y ainsi que $\epsilon > 0$ (qui dépend de t) tel que $h(W_t \times [t - \epsilon, t + \epsilon]) \subset U_t$. Par compacité de $y \times [0, 1]$, on peut trouver une suite $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ tel

que $h(W_i \times [t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et p est trivialisé sur U_i . On pose $W_y = \bigcap_{i=1}^n W_i$. L'application induite $h_{y,i} : W_y \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow X'$ possède alors un relèvement $h'_{y,i} : W_y \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow X'$ (cas trivial). Par composition, on obtient des relèvements $h'_y : W_y \times [0, 1] \rightarrow X'$ et finalement h' en recollant. ■

L'énoncé précédent dit qu'un revêtement est une *fibration de Hurewicz* (la propriété de la proposition).

Corollaire 3.3.4 Soit $p : X' \twoheadrightarrow X$ un revêtement et x' un relèvement de x . Alors,

1. si γ est un chemin partant de x , il existe un unique relèvement γ' de γ partant de x' et
2. si $\gamma_1 \sim_{\{0,1\}} \gamma_2$ dans X (partant de x) et γ'_1, γ'_2 désignent les relèvements respectifs de γ_1, γ_2 partant de x' , alors $\gamma'_1 \sim_{\{0,1\}} \gamma'_2$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème aux cas $Y = \{0\}$ puis $Y = [0, 1]$. ■

Remarque 1. En d'autres termes, p induit une application *bijective* entre les (classes de) chemins dans X' partant de x' et les (classes de) chemins dans X partant de x : on a une bijection

$$p_* : \mathcal{C}([0, 1], 0), (X', x') \simeq \mathcal{C}([0, 1], 0), (X, x)$$

compatible avec l'homotopie (à extrémités fixées).

2. Comme conséquence, on obtient une application injective

$$p_* : \pi_1(X', x') \hookrightarrow \pi_1(X, x).$$

3. Si $\delta : x \sim y$ dans X se relève en $\delta' : x' \sim y'$, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X', x') & \xhookrightarrow{p_*} & \pi_1(X, x) \\ \simeq \downarrow \text{ad}_{\delta'} & & \simeq \downarrow \text{ad}_{\delta} \\ \pi_1(X', y') & \xhookrightarrow{p_*} & \pi_1(X, y) \end{array}$$

est commutatif.

Exemple Dans le cas $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}, t \mapsto e^{2i\pi t}$, $x = 1$ et $x' = 0$, le corollaire 3.3.4.1 redonne la proposition 2.2.11 (et la définition du degré).

Si $p : X' \twoheadrightarrow X$ est un revêtement, $\gamma : x \sim y$ est un chemin dans X et $\gamma' : x' \sim y'$ désigne le relèvement de γ partant de x' , on pose $x' \cdot \gamma := y'$. Autrement dit, $x' \cdot \gamma$ est le point final de l'unique relèvement de γ partant de x' . Sous forme compacte : $\gamma' : x' \sim y' \Leftrightarrow y' = x' \cdot p_* \gamma'$. Puisque y' ne dépend que de la classe d'homotopie de γ , on écrit aussi parfois $x' \cdot [\gamma]$.

Proposition 3.3.5 Soit $p : X' \twoheadrightarrow X$ un revêtement et x' un relèvement de x . Alors,

1. $x' \cdot 1_x = x'$ et
2. si $\gamma : x \sim y$ et $\delta : y \sim z$, alors $(x' \cdot \gamma) \cdot \delta = x' \cdot \gamma\delta$.

Démonstration. Puisque $1_{x'}$ est un relèvement de 1_x partant de x' , on a bien $x' \cdot 1_x = x'$. Ensuite, soit γ' le relèvement de γ partant de x' et δ' le relèvement de δ partant de $y' := x' \cdot \gamma$. Alors, $\gamma' \cdot \delta'$ est un relèvement de $\gamma \cdot \delta$ reliant x' à $z' := y' \cdot \delta$. On a donc bien $x' \cdot \gamma\delta = z'$. ■

Corollaire 3.3.6 Si $p : X' \rightarrow X$ est un revêtement et $x \in X$, on dispose d'une action à droite du groupe fondamental sur la fibre appelée *monodromie* :

$$p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) \rightarrow p^{-1}(x), \quad (x', [\gamma]) \mapsto x' \cdot \gamma. \quad \blacksquare$$

Exemple Dans le cas $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}, t \mapsto e^{2i\pi t}$ et $x = 1$, la monodromie s'écrit

$$\mathbb{Z} \times \pi_1(\mathbb{S}, 1) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (n, \gamma) \mapsto n + \deg(\gamma).$$

En particulier, $\deg(\gamma) = 0 \cdot \gamma$.

Proposition 3.3.7 Soit $p : X' \rightarrow X$ un revêtement (avec X') connexe par arcs et $x \in X$. Alors la monodromie sur $p^{-1}(x)$ est transitive et le stabilisateur d'un relèvement x' de x est $p_*\pi_1(X', x')$.

On désigne par $p_*\pi_1(X', x')$ l'image de $p_* : \pi_1(X', x') \hookrightarrow \pi_1(X, x)$.

Démonstration. Soient $x', y' \in p^{-1}(x)$. Puisque X' est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma' : x' \sim y'$. On considère alors le lacet $\gamma = p_*\gamma'$ dans X . Par construction, γ' est le relèvement de γ partant de x' et on a donc $x' \cdot \gamma = y'$. Cela montre que l'action est transitive. Soit maintenant $x' \in p^{-1}(x)$ et γ un lacet en x . Si γ' désigne le relèvement de γ partant de x' , on a $x' \cdot \gamma = x'$ si et seulement si $[\gamma'] \in \pi_1(X', x')$. Il en résulte que le stabilisateur de x' est $p_*\pi_1(X', x')$. ■

Remarques 1. On a donc une bijection (à x' fixé)

$$\pi_1(X, x)/p_*\pi_1(X', x') \simeq p^{-1}(x), \quad [\overline{\gamma}] \leftrightarrow x' \cdot \gamma.$$

2. Le degré du revêtement est égal à l'indice de $p_*\pi_1(X', x')$ dans $\pi_1(X, x)$.
3. La monodromie est libre si et seulement si X' est simplement connexe et on a alors une bijection

$$\pi_1(X, x) \simeq p^{-1}(x), \quad [\gamma] \leftrightarrow x' \cdot \gamma.$$

Exemple Avec $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}, t \mapsto e^{2i\pi t}$, $x = 1$ et $x' = 0$, on obtient une bijection

$$\pi_1(\mathbb{S}, 1) \simeq \mathbb{Z}, \quad [\gamma] \leftrightarrow \deg(\gamma)$$

et donc (presque) le théorème 2.2.13.

Théorème 3.3.8 Soit G un groupe agissant de manière proprement discontinue sur un espace topologique X connexe par arcs et $p : X \rightarrow X/G$ l'application quotient. Si $x \in X$, on a une suite exacte courte

$$1 \rightarrow \pi_1(X, x) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X/G, p(x)) \rightarrow G \rightarrow 1.$$

Démonstration. On a montré dans la proposition 3.2.4 que p est un revêtement. Si $[\gamma] \in \pi_1(X/G, p(x))$, alors $x \cdot \gamma \in p^{-1}(p(x)) = Gx$. Puisque, par hypothèse, l'action de G sur X est libre, il existe un unique $g \in G$ tel que $x \cdot \gamma = gx$. On dispose donc d'une application

$$\phi : \pi_1(X/G, p(x)) \rightarrow G$$

déterminée par $\phi([\gamma]) = g \Leftrightarrow x \cdot \gamma = gx$. Avant d'aller plus loin, remarquons que, grâce à la proposition 3.4.2 plus bas, puisque la multiplication par g est continue, les deux actions commutent² : on a toujours $(gx) \cdot \gamma = g(x \cdot \gamma)$. Supposons maintenant que $\phi([\gamma]) = g$ et $\phi([\delta]) = h$. On aura alors $x \cdot \gamma = gx$ et $x \cdot \delta = hx$. On en déduit que

$$x \cdot \gamma\delta = (x \cdot \gamma) \cdot \delta = (gx) \cdot \delta = g(x \cdot \delta) = g(hx) = (gh)x,$$

c'est-à-dire $\phi([\gamma][\delta]) = gh$. Cela montre que ϕ est un homomorphisme de groupes. Pour conclure, on applique la proposition 3.3.7. Puisque la monodromie est transitive sur X , on voit immédiatement que ϕ est surjective. Puisque le stabilisateur de x pour la monodromie est $p_*\pi_1(X, x)$, on voit que $\ker \phi = p_*\pi_1(X, x)$. On a donc bien la suite exacte courte annoncée. ■

Remarques 1. Comme conséquence, on voit que $p_*\pi_1(X, x) \triangleleft \pi_1(X/G, p(x))$ (le sous-groupe est distingué).
2. Si X est simplement connexe, alors

$$\pi_1(X/G, p(x)) \simeq G \quad ([\gamma] \leftrightarrow g \Leftrightarrow x \cdot \gamma = g \cdot x).$$

Exemple Dans le cas de l'action par translation de \mathbb{Z} sur \mathbb{R} , on trouve un isomorphisme de groupes

$$\pi_1(\mathbb{S}, \bar{1}) \simeq \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \bar{0}) \simeq \mathbb{Z} \quad ([\gamma] \leftrightarrow n \Leftrightarrow 0 \cdot \gamma = n + 0),$$

c'est-à-dire $[\gamma] \mapsto \deg(\gamma)$. On obtient enfin ainsi une démonstration complète du théorème 2.2.13.

On peut aussi calculer le groupe fondamental de l'espace projectif :

Corollaire 3.3.9 Si $n \geq 2$, alors $\pi_1(\mathbb{P}^n, x) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ■

Corollaire 3.3.10 Soit $1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 1$ une suite exacte stricte de groupes topologiques avec G' discret et G connexe par arcs. On dispose alors d'une suite exacte courte

$$1 \rightarrow \pi_1(G, 1) \rightarrow \pi_1(G'', 1) \rightarrow G' \rightarrow 1.$$

Démonstration. On peut supposer que $G' \triangleleft G$ et $G'' = G/G'$. ■

2. Ou bien directement : si $x \cdot \gamma = y$, il existe alors $\gamma' : x \sim y$ avec $p_*\gamma' = \gamma$, donc $g_*\gamma' : gx \sim gy$ avec $p_*g_*\gamma' = p_*\gamma' = \gamma$ et alors $(gx)[\gamma] = gy$.

- Remarques**
1. Si G' est un sous-groupe de G , alors la seconde flèche est donnée par $[\gamma] \mapsto 1 \cdot \gamma$.
 2. Si G est simplement connexe, alors $\pi_1(G'', 1) \simeq G'$.
 3. On obtient automatiquement l'isomorphisme $\deg : \pi_1(\mathbb{S}, 1) \simeq \mathbb{Z}$ à partir de la suite exacte $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S} \rightarrow 1$.
 4. On remarquera qu'on a même une suite exacte longue

$$\pi_1(G', 1) \rightarrow \pi_1(G, 1) \rightarrow \pi_1(G'', 1) \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 1.$$

5. Si on se donne un groupe G , on peut toujours trouver un espace topologique X tel que $\pi_1(X, x) \simeq G$. Il suffit pour cela de considérer le « complexe simplicial » EG obtenu en recollant les simplexes $[g_0, \dots, g_n]$ où $g_0, \dots, g_n \in G$ et de prendre pour X le quotient BG (appelé *espace classifiant*) par l'action naturelle de G .

3.4 Revêtement universel

Il va être pratique de considérer des applications pointées.

Définition 3.4.1 Si $p' : X' \rightarrow X$ est un revêtement tel que $p'(x') = x$, on dit que $p' : (X', x') \rightarrow (X, x)$ est un *revêtement pointé*. Un *morphisme* entre deux revêtements pointés $p' : (X', x') \rightarrow (X, x)$ et $p'' : (X'', x'') \rightarrow (X, x)$ est une application continue $f : (X', x') \rightarrow (X'', x'')$ telle que $p' = p'' \circ f$ et $f(x') = x''$.

- Remarques**
1. Il résulte de la proposition 3.3.2 que, lorsque X' est connexe, il existe au plus un morphisme $f : (X', x') \rightarrow (X'', x'')$ de revêtements pointés de (X, x) .
 2. Si X est localement connexe par arcs et X'' est connexe, alors tout morphisme de revêtements pointés $f : (X', x') \rightarrow (X'', x'')$ est aussi un revêtement pointé (voir exercice 3.11).
 3. On dispose aussi bien sûr de la notion de morphisme de revêtements *non pointés* $p' : X' \rightarrow X$ et $p'' : X'' \rightarrow X$: c'est une application continue $f : X' \rightarrow X''$ telle que $p' = p'' \circ f$. On dit encore *isomorphisme* si f est un homéomorphisme, et *automorphisme* si, de plus, $X' = X''$.

Proposition 3.4.2 Un morphisme $f : (X', x') \rightarrow (X'', x'')$ de revêtements pointés de (X, x) préserve la monodromie : Si γ est un chemin partant de x , alors $f(x' \cdot \gamma) = x'' \cdot \gamma$.

Démonstration. Par définition, $y' := x' \cdot \gamma$ est le point final du relèvement γ' de γ partant de x' . Alors, $\gamma'' := f_* \gamma'$ est un chemin dans X'' joignant x'' à $y'' := f(y')$. De plus, $p''_* \gamma'' := p''_* f_* \gamma' = p'_* \gamma' = \gamma$. On aura donc $y'' = x'' \cdot \gamma$. ■

Proposition 3.4.3 Soit $p : (X', x'_0) \rightarrow (X, x_0)$ un revêtement pointé et $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ une application continue pointée avec Y connexe localement connexe par arcs. Alors, f se relève le long de p (en une application continue pointée) si et

seulement si f_* se factorise par p_* :

$$\begin{array}{ccc} & (X', x'_0) & \Leftrightarrow \\ \nearrow \exists(!) & \downarrow p & \nearrow \exists(!) \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} (X, x_0) & \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(X, x_0) \\ & & \downarrow p_* \\ & & \pi_1(X', x'_0) \end{array}$$

Démonstration. La condition est clairement nécessaire. De plus, le relèvement sera unique car Y est connexe et la factorisation unique car p_* est injectif.

Supposons donnés deux chemins $\gamma_1, \gamma_2 : y_0 \sim y$ dans Y . Alors $\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}$ est un lacet en y_0 et $f_*(\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1})$ est donc un lacet en x_0 . Notre hypothèse implique que celui-ci se relève en un lacet γ' en x'_0 . Si, pour $i = 1, 2$, on désigne par γ'_i l'unique chemin partant de x'_0 qui relève $f_*\gamma_i$, alors $\gamma' \cdot \gamma'_2$ et γ'_1 sont deux relèvements de $f_*\gamma_1$ partant de x'_0 . Cela implique que $\gamma' \cdot \gamma'_2 = \gamma'_1$ et donc que γ'_1 et γ'_2 ont même point final.

Maintenant, puisque Y est connexe par arcs, si $y \in Y$, il existe un chemin $\gamma : y_0 \sim y$. D'après ce qui précède, le point final du relèvement γ' de $f_*\gamma$ partant de x'_0 ne dépend que de y et on le note $f'(y)$.

Soit U' un voisinage ouvert suffisamment petit de $f'(y)$ dans X' que l'on peut supposer être un feuillet au dessus de $U \subset X$. Puisque f est continue, il existe un voisinage ouvert W de y tel que $f(W) \subset U$. Puisque Y est localement connexe par arcs, on peut supposer que W est connexe par arcs. Si $z \in W$, il existe donc un chemin $\delta : y \sim z$ dans W . On peut alors considérer le chemin $\gamma \cdot \delta : y_0 \sim z$ si bien que $f'(z)$ est le point final du relèvement de $f_*(\gamma \cdot \delta)$ partant de x'_0 . Puisque δ est contenu dans W , $f_*(\delta)$ est contenu dans U . Puisque p induit un homéomorphisme $U' \simeq U$, on voit que $f_*(\delta)$ se relève de manière unique en un chemin δ' dans U' partant de $f'(y)$. Il suit que $\gamma' \cdot \delta'$ est le relèvement de $f_*(\gamma \cdot \delta)$ partant de x'_0 si bien que $f'(z) \in U'$. Cela montre que f' est continue (comme composée $W \rightarrow U \simeq U' \subset X'$ au voisinage de y). ■

- Remarques**
1. Le relèvement, s'il existe, est unique grâce à la proposition 3.3.2.
 2. La condition s'exprime plus simplement en disant que $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*\pi_1(X', x'_0)$.
 3. Lorsque Y est simplement connexe et localement connexe par arcs, toute application continue pointée $(Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ se relève de manière unique le long de p' .
 4. Si X est localement connexe par arcs, alors deux revêtements pointés *connexes* (X', x') et (X'', x'') de (X, x) sont isomorphes si et seulement si les images de $\pi_1(X', x')$ et $\pi_1(X'', x'')$ dans $\pi_1(X, x)$ coïncident.

Définition 3.4.4 Un revêtement pointé $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ est *universel* si, pour tout revêtement pointé $p' : (X', x') \rightarrow (X, x)$, il existe un unique morphisme de revêtements pointés $f : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X', x')$.

- Remarques**
1. Un revêtement universel, s'il existe, est unique à unique isomorphisme près, et on dira parfois « le » revêtement universel.
 2. Un revêtement universel est connexe (voir exercice 3.9).
 3. Un revêtement simplement connexe d'un espace localement connexe par arcs est universel grâce à la proposition 3.4.3.

- Exemples**
1. \mathbb{C} est un revêtement universel de \mathbb{C}^\times .
 2. \mathbb{R}^n est un revêtement universel du tore \mathbb{T}^n (et \mathbb{R} est donc un revêtement universel de \mathbb{S}).
 3. \mathbb{S}^n est un revêtement universel de \mathbb{P}^n pour $n \geq 2$ (et \mathbb{R} est un revêtement universel de \mathbb{P}).

Définition 3.4.5 Un voisinage U d'un point x d'un espace topologique X est *simple* si l'image de $\pi_1(U, x)$ dans $\pi_1(X, x)$ est triviale. Un espace est *semi-localement simplement connexe* si tout $x \in X$ possède un voisinage simple.

- Remarques**
1. Un ouvert est simple en x si tout lacet en x dans U est homotope au lacet trivial dans X . Si $x \in U' \subset U$, alors U' aussi est simple.
 2. Un espace localement simplement connexe est semi-localement simplement connexe.
 3. Un espace est semi-localement simplement connexe si et seulement s'il possède une base d'ouverts simples (attention : simple est une notion relative).

- Exemples**
1. La boucle d'oreille hawaïenne $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{S}((1/n, 0), 1/n) \subset \mathbb{R}^2$ n'est pas semi-localement simplement connexe.
 2. Le cône sur la boucle d'oreille hawaïenne est contractile (donc simplement connexe, donc semi-localement simplement connexe) mais pas localement simplement connexe.

Théoreme 3.4.6 Si X est un espace connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe^a, alors il possède un revêtement simplement connexe.

^a. On dit alors que X est *délaçable*.

Démonstration. On fixe $x_0 \in X$ et on définit

$$\tilde{X} := \{[\gamma] : \gamma(0) = x_0\} \subset \pi(X).$$

Si $\gamma : x_0 \sim x$ dans X et U est un voisinage *simple* de x , on pose

$$U_\gamma := \{[\gamma \cdot \delta], \delta \in \mathcal{C}([0, 1], 0), (U, x))\} \subset \tilde{X}.$$

C'est donc l'ensemble des classes de chemins $\gamma' = \gamma \cdot \delta$ ou $\delta : x \sim y$ est contenu dans U . On a alors les propriétés suivantes :

1. Si $\gamma, \gamma' : x_0 \sim x$, alors

$$\begin{cases} U_\gamma = U_{\gamma'} & \text{si } [\gamma] = [\gamma'], \\ U_\gamma \cap U_{\gamma'} = \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. En effet, si $U_\gamma \cap U_{\gamma'} \neq \emptyset$, alors il existe δ et δ' dans U tels que $[\gamma \cdot \delta] = [\gamma' \cdot \delta']$. On a alors $[\gamma] = [\gamma] \cdot \delta' \delta^{-1} = [\gamma']$ puisque $\delta' \delta^{-1}$ est un lacet dans U et que U est simple. Et réciproquement. ■

2. Si $\gamma : x_0 \sim x$ et $\gamma' : x_0 \sim y$, alors $[\gamma'] \in U_\gamma \Leftrightarrow U_\gamma = U_{\gamma'}$.

Démonstration. En effet, il existe alors $\alpha : x \sim y$ contenu dans U tel que $[\gamma'] = [\gamma \cdot \alpha]$. Si $\delta : x \sim z$ est contenu dans U , alors $[\gamma \cdot \delta] = [\gamma' \cdot (\alpha^{-1} \cdot \delta)] \in U_{\gamma'}$ et réciproquement. ■

3. Si $U' \subset U$ est un autre voisinage (automatiquement simple) de x , alors $U'_\gamma \subset U_\gamma$.

Démonstration. Clair. ■

Donnons nous maintenant pour $i = 1, 2$, $\gamma_i : x_0 \sim x_i$ et un voisinage simple U_i de x_i . Soit $\gamma : x_0 \sim x$. Si $[\gamma] \in U_{1,\gamma_1} \cap U_{2,\gamma_2}$ et $U \subset U_1 \cap U_2$ est un voisinage (simple) de x , alors $U_\gamma \subset U_{i,\gamma} = U_{i,\gamma_i}$ pour $i = 1, 2$ et donc $U_\gamma \subset U_{1,\gamma_1} \cap U_{2,\gamma_2}$. Cela montre que les U_γ forment une base pour une topologie sur \tilde{X} . On munit dorénavant \tilde{X} de cette topologie.

On considère maintenant l'application

$$p : \tilde{X} \rightarrow X, \quad [\gamma] \mapsto \gamma(1)$$

qui associe le point x à $\gamma : x_0 \sim x$. On montre alors l'assertion suivante :

Si $\gamma : x_0 \sim x$ et U est un voisinage simple connexe par arcs de x , alors p induit une bijection $U_\gamma \simeq U$.

Démonstration. Si $\delta : x \sim y$ est contenu dans U , alors $p([\gamma \cdot \delta]) = y \in U$ et l'application est donc bien définie. Réciproquement, si $y \in U$, alors il existe un chemin $\delta : x \sim y$ contenu dans U et $p([\gamma \cdot \delta]) = y$, cela montre que l'application est surjective. Enfin, si $\delta, \delta' : x \sim y$ sont contenus dans U , alors $\delta \cdot \delta^{-1}$ est un lacet dans U si bien que $[\delta] = [\delta']$ et donc $[\gamma \cdot \delta] = [\gamma \cdot \delta']$. Cela montre que l'application est injective. ■

On montre maintenant l'assertion suivante :

Si U est un ouvert simple connexe par arcs de X , alors $p^{-1}(U) = \bigcup_{\gamma(1) \in U} U_\gamma$.

Démonstration. Soit $\gamma : x_0 \sim x$. Si $[\gamma] \in p^{-1}(U)$ alors $\gamma(1) = p([\gamma]) \in U$ et on a bien sûr $[\gamma] \in U_\gamma$. Réciproquement, s'il existe γ' tel que $\gamma'(1) \in U$ et $[\gamma] \in U_{\gamma'}$, alors $\gamma(1) \in U$ et donc $[\gamma] \in p^{-1}(U)$. ■

Puisque les ouverts simples U de X forment une base pour la topologie de X et que les ouverts de la forme U_γ forment une base pour la topologie de \tilde{X} , cela implique que p est continue. Mais cela implique aussi que p est ouverte. En particulier, les bijections induites $U_\gamma \simeq U$ induites par p sont des homéomorphismes. Puisque p est clairement surjective et que les U_γ sont disjoints (ou confondus), on en déduit que p est un revêtement.

On pose maintenant $\tilde{x}_0 := [1_{x_0}] \in \tilde{X}$ et on montre :

Si γ est un chemin partant de x_0 dans X , alors le relèvement $\tilde{\gamma}$ de γ partant de \tilde{x}_0 dans \tilde{X} est donné par $\forall t \in [0, 1]$, $\tilde{\gamma}(t) = [\gamma_t]$ avec pour tout $s \in [0, 1]$, $\gamma_t(s) = \gamma(ts)$.

Démonstration. On aura bien sûr $\tilde{\gamma}(0) = [\gamma_0] = [1_{x_0}] = \tilde{x}_0$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$(p_* \tilde{\gamma})(t) = (p \circ \tilde{\gamma})(t) = p([\gamma_t]) = \gamma_t(1) = \gamma(t)$$

si bien que $p_*\tilde{\gamma} = \gamma$. Il faut tout de même s'assurer que $\tilde{\gamma}$ est continu. Comme γ est continu, si $t \in [0, 1]$ et si U est un voisinage ouvert simple de $\gamma(t)$, alors il existe un voisinage I de t dans $[0, 1]$ tel que $\gamma(I) \subset U$. Si $t' \in I$, alors le chemin $\gamma_{tt'}$ défini pour $s \in [0, 1]$ par $\gamma_{tt'}(s) = \gamma((1-s)t + st')$ est contenu dans U et on a $[\gamma_{t'}] = [\gamma_t \cdot \gamma_{tt'}]$. On aura donc $\tilde{\gamma}(t') = [\gamma_{t'}] \in U_{\gamma_t}$. Il suit que $\tilde{\gamma}(I) \subset U_{\gamma_t}$ si bien que $\tilde{\gamma}$ est continu. ■

On voit donc que si γ est un chemin partant de x_0 dans X , alors son relèvement $\tilde{\gamma}$ partant de \tilde{x}_0 dans \tilde{X} satisfait $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma]$. Autrement dit, le point final de $\tilde{\gamma}$ est égal à $[\gamma]$. Il suit que \tilde{X} est connexe (par arcs). Si on impose de plus que $\tilde{\gamma}$ est un lacet, alors $[\gamma] = [\tilde{x}_0] = [1_{x_0}]$. Or on sait que p est un revêtement, et l'application

$$p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

est donc injective. Il suit que $[\tilde{\gamma}] = [1_{\tilde{x}_0}]$. Puisque tout chemin partant de \tilde{x}_0 dans \tilde{X} , et en particulier tout lacet basé en \tilde{x}_0 , est le relèvement $\tilde{\gamma}$ de son image γ par p_* , cela implique que $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 1$ et \tilde{X} est donc simplement connexe. ■

- Remarques**
1. Comme conséquence du théorème, un espace délaçable possède toujours un revêtement universel (qui s'avère être simplement connexe).
 2. On peut montrer qu'un espace localement connexe par arcs possède un revêtement simplement connexe si et seulement si il est délaçable.
 3. On peut montrer plus généralement que si X est délaçable, on a une bijection entre les classes d'isomorphismes de revêtements de X et les sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$. Le cas du revêtement universel correspond au sous-groupe trivial (et le cas du revêtement trivial correspond au groupe fondamental lui même).

3.5 Exercices

3.5.1 Action de groupe

Exercice 3.1 Soit G un groupe topologique agissant sur un espace topologique X .

1. Montrer que si c'est une action par homéomorphismes, alors l'application quotient $p : X \twoheadrightarrow X/G$ est ouverte.
2. Montrer que si l'action est continue, alors c'est une action par homéomorphismes, et réciproquement lorsque G est discret.

Solution. 1. Pour la première assertion, il suffit de remarquer que

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$$

est bien ouvert puisque la multiplication par g est un homéomorphisme et que X/G est muni de la topologie quotient.

2. Pour la seconde assertion, il suffit de rappeler qu'on dispose d'une bijection continue

$$\coprod_{g \in G} X \simeq G \times X$$

et que c'est un homéomorphisme lorsque G est discret. On voit donc que si l'action est continue, alors chaque application $X \rightarrow X, x \mapsto gx$ est continue, ainsi que la réciproque si G est discret. On conclut en remarquant que si g et g^{-1} sont continues, alors ce sont des homéomorphismes réciproques. ■

Exercice 3.2 Montrer que si H est un sous-groupe discret d'un groupe topologique G , alors l'action par translation à gauche de H sur G est proprement discontinue.

Solution. Puisque H est discret, il existe un voisinage ouvert W de 1 dans G tel que $W \cap H = \{1\}$. Puisque l'application $(g, g') \mapsto gg'^{-1}$ est continue, il existe des voisinages V_1, V_2 de 1 dans G tel que $V_1 V_2^{-1} \subset W$. On pose alors $V := V_1 \cap V_2$. Si $h \in H$ et $g \in V \cap hV$, alors il existe $g' \in V$ tel que $g = hg'$ et donc $h = gg'^{-1} \in W \cap H$ si bien que $h = 1$. Par translation, la propriété sera valide en tout point de G : si $g \in G$, on pose $U = Vg$. On aura alors, pour $h \in H \setminus \{1\}$, $U \cap hU = (V \cap hV)g = \emptyset$. ■

3.5.2 Revêtements

Exercice 3.3 Montrer que la projection

$$p : C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1 \text{ ou } y = 0\} \twoheadrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x$$

est un homéomorphisme local mais n'est pas un revêtement.

Solution. On a une union disjointe $p^{-1}(\mathbb{R}^\times) = \Gamma \cup \mathbb{R}^\times$ où $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$ et p induit bien des homéomorphismes $\Gamma \simeq \mathbb{R}^\times$ et $\mathbb{R}^\times \simeq \mathbb{R}^\times$. Cela montre que p induit un revêtement au dessus de \mathbb{R}^\times . De plus, p induit un homéomorphisme (l'identité) $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ au voisinage de 0. C'est donc bien un homéomorphisme local. Par contre la fibre $p^{-1}(0)$ n'a qu'un élément contrairement aux autres. L'application p n'est donc pas un revêtement. ■

- Exercice 3.4** 1. Décrire $p^{-1}(\mathbb{S} \setminus \{1\})$ et $p^{-1}(\mathbb{S} \setminus \{-1\})$ lorsque $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}, t \mapsto e^{2i\pi t}$ ou $p : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}, z \mapsto z^n$.
2. En déduire dans les deux cas que p est un revêtement.
3. En déduire aussi que \mathbb{R}^n est un revêtement de \mathbb{T}^n .

Solution. 1. Dans le premier cas, on a

$$p^{-1}(\mathbb{S} \setminus \{1\}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[\quad \text{et} \quad p^{-1}(\mathbb{S} \setminus \{-1\}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n - 1/2, n + 1/2[.$$

Dans le second cas, on a

$$p^{-1}(\mathbb{S} \setminus \{1\}) = \mathbb{S} \setminus \mu_n \quad \text{et} \quad p^{-1}(\mathbb{S} \setminus \{-1\}) = \mathbb{S} \setminus (\mu_{2n} \setminus \mu_n)$$

avec

$$\mu_n := \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\} = \{e^{2ik\pi/n} : k = 0, \dots, n-1\}.$$

2. On a bien une trivialisatation locale de p . Dans le premier cas, les feuilletts sont les $]n, n+1[$ et $]n - 1/2, n + 1/2[$ respectivement. Dans le second, ce sont les $\{e^{i\theta}, 2k\pi/n < \theta < 2(k+1)\pi/n\}$ et $\{e^{i\theta}, (4k+1)\pi/2n < \theta < (4k+3)\pi/2n\}$.
3. Puisqu'un produit fini de revêtements est un revêtement et que $\mathbb{T} = \mathbb{S}$, \mathbb{R}^n est un revêtement de \mathbb{T}^n . ■

Exercice 3.5 Montrer que l'application canonique $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ est un revêtement de degré 2 et que pour tout $a \in \mathbb{S}^n$, $U(a) := \{x \in \mathbb{S}^n, \|x - a\| < \sqrt{2}\}$ est un feuillet.

Solution. Puisque $p(x) = p(y) \Leftrightarrow y = \pm x$, on voit que si $V \subset \mathbb{S}^n$ est ouvert, alors $p^{-1}(p(V)) = V \cup -V$ est ouvert et donc $p(V)$ est ouvert (puisque c'est la topologie quotient). Cela montre que p est une application ouverte. Clairement, $U(a)$ est ouvert et $-U(a) = U(-a)$. Puisque $\|x - a\|^2 + \|x + a\|^2 = 4$, les conditions $\|x - a\| < \sqrt{2}$ et $\|x + a\| < \sqrt{2}$ sont incompatibles si bien que $U(a) \cap U(-a) = \emptyset$. En particulier, p est injectif sur $U(a)$. Il suit que p induit un homéomorphisme (injectif, continu, ouvert) entre $U(a)$ et son image. Puisque $p^{-1}(p(U(a))) = U(a) \cup U(-a)$, on a bien un revêtement de degré 2 et $U(a)$ est un feuillet. ■

Exercice 3.6 Montrer que les applications $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ et $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^n$ sont des revêtements.

Solution. On utilise les suite exactes $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times \rightarrow 1$ et $0 \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times \rightarrow 1$ de l'exercice 2.7. ■

3.5.3 Monodromie

- Exercice 3.7** 1. Montrer que le revêtement $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}, t \mapsto e^{2i\pi t}$ provient^a d'une action du groupe \mathbb{Z} et en déduire le groupe fondamental de \mathbb{S} . Question analogue avec $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$.
2. Montrer que le revêtement $p : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}, z \mapsto z^n$ provient d'une action du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et en déduire une suite exacte reliant le groupe fondamental de \mathbb{S} et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Montrer que le revêtement $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ provient d'une action du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

et en déduire le groupe fondamental de \mathbb{P}^n lorsque $n \geq 2$.

a. Un revêtement $p : X' \rightarrow X$ provient d'une action de groupes de G sur X' si p induit un homéomorphisme $X'/G \simeq X$.

Solution. 1. On utilise les suites $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S} \rightarrow 1$ et $0 \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n \rightarrow 1$ de l'exercice 2.7.

2. On utilise la suite $0 \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S} \xrightarrow{p} \mathbb{S} \rightarrow 1$ et on en déduit une suite exacte

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}, 1) \xrightarrow{p_*} \pi_1(\mathbb{S}, 1) \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

3. On fait agir $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur \mathbb{S}^n par $\bar{1} \cdot x = -x$. Il résulte de l'exercice 3.5 que c'est une action proprement discontinue. Puisque, pour $n \geq 2$, \mathbb{S}^n est simplement connexe, on en déduit que $\pi_1(\mathbb{P}^n, x) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ■

3.5.4 Revêtement universel

Exercice 3.8 On identifie $\pi_1(\mathbb{S}, 1)$ avec \mathbb{Z} via le degré et μ_n avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en faisant correspondre $e^{2ik\pi/n}$ et $k \bmod n$. On considère le revêtement $p_n : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}, z \mapsto z^n$.

1. Identifier l'image de p_{n*} avec un sous-groupe de \mathbb{Z} .
2. Montrer qu'il existe une application continue $f : (\mathbb{S}, 1) \rightarrow (\mathbb{S}, 1)$ telle que $p_m \circ f = p_n$ si et seulement si $m \mid n$.
3. Montrer que l'action de la monodromie de $\pi_1(\mathbb{S}, 1)$ sur μ_n est l'action naturelle de \mathbb{Z} sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Solution. 1. Clairement, p_{n*} correspond via le degré à l'application $\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}$ et son image s'identifie donc à $n\mathbb{Z}$.

2. Puisque p_m est un revêtement et que \mathbb{S} est connexe localement connexe par arcs, on sait que p_n se relève le long de p_m si et seulement si $p_{n*}\pi_1(\mathbb{S}, 1) \subset p_{m*}\pi_1(\mathbb{S}, 1)$, c'est-à-dire $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$, ou encore $m \mid n$.
3. L'action par la monodromie est donnée par

$$\mu_n \times \pi_1(\mathbb{S}, 1) \rightarrow \mu_n, \quad (\zeta, [\gamma]) \mapsto \zeta \cdot \gamma$$

ou $\zeta \cdot \gamma$ est le point final du relèvement $\tilde{\gamma}$ de γ partant de ζ . D'autre part, l'action naturelle de \mathbb{Z} sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donnée par

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad (k \bmod n, m) \mapsto k + m \bmod n.$$

Posons $\zeta = e^{2i\pi/n}$ et $\forall t \in [0, 1], \gamma(t) = e^{2i\pi t}$. Rappelons que les deux définitions de γ^m (en utilisant la loi de groupe de \mathbb{S} ou la composition des lacets) coïncident à homotopie près. Le relèvement δ de γ^m en ζ^k doit satisfaire $\delta(0) = \zeta^k$ et $p_{n*}(\delta) = \gamma^m$. Or on a pour $t \in [0, 1]$,

$$p_{n*}(\delta)(t) = p_n((\delta(t))) = \delta(t)^n \quad \text{et} \quad \gamma^m(t) = e^{2i\pi m t}$$

(en utilisant la loi de groupe de \mathbb{S}) et la condition $p_{n*}(\delta) = \gamma^m$ s'écrit donc $\delta(t)^n = e^{2i\pi m t}$. Il suffit donc de poser

$$\forall t \in [0, 1], \quad \delta(t) := \zeta^k e^{2i\pi \frac{m}{n} t}.$$

On aura bien $\zeta^k \cdot \gamma^m = \delta(1) = \zeta^{k+m}$. ■

Exercice 3.9 Montrer qu'un revêtement universel est connexe.

Solution. Soit $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \twoheadrightarrow (X, x_0)$ un revêtement universel. On considère le revêtement

$$(X \times \{0, 1\}, (x_0, 0)) \rightarrow (X, x_0).$$

Soit Y la composante connexe de \tilde{x}_0 et Z son complémentaire. Soient $f, g : \tilde{X} \rightarrow X \times \{0, 1\}$ les applications données par $f(y) = g(y) = (p(y), 0)$ si $y \in Y$ et $f(z) = (p(z), 0)$, $g(z) = (p(z), 1)$ si $z \in Z$. Ce sont deux morphismes de revêtements pointés si bien que $f = g$ et $Z = \emptyset$. Il faut tout de même s'assurer que g est continue. Il suffit de montrer que si U est ouvert dans X , alors $g^{-1}(U \times i)$ est ouvert pour $i = 0, 1$. Puisque Y est fermé, Z est ouvert et donc $g^{-1}(U \times 1) = p^{-1}(U) \cap Z$ est ouvert. De même si $F = X \setminus U$, alors $g^{-1}(F \times 0) = p^{-1}(F) \cap Y$ est fermé et $g^{-1}(U \times 0)$ aussi est ouvert. ■

Exercice 3.10 Quels sont les revêtements universels de \mathbb{S}^n , \mathbb{T}^n et \mathbb{P}^n ?

Solution. On a $\mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}, t \mapsto e^{2\pi i t}$, $\text{Id} : \mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n$ pour $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{T}^n, (t_i) \mapsto (e^{2\pi i t_i})$, $\mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S} \simeq \mathbb{P}$ et $\mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n, x \mapsto \bar{x}$ pour $n \geq 2$. ■

Exercice 3.11 Soit $f : X' \rightarrow X''$ un morphisme de revêtements de X .

1. Montrer que si X est localement connexe et f surjective, alors f est un revêtement.
2. Montrer que si X est localement connexe par arcs et X'' est connexe, alors f est un revêtement.

Solution. 1. On peut remplacer X par un voisinage suffisamment petit U d'un de ses points, et conséquemment X' et X'' par $p'^{-1}(U)$ et $p''^{-1}(U)$ respectivement. On peut donc supposer que X est connexe et que les revêtements X' et X'' sont triviaux. On suppose ainsi que $X' = X \times I'$ et $X'' = X \times I''$. Puisque X est connexe, pour tout $i \in I'$, il existe $\alpha(i) \in I''$ tel que $f(X \times i) \subset X \times \alpha(i)$. Puisque les applications $X \times i \rightarrow X$ et $X \times \alpha(i) \rightarrow X$ induites par p' et p'' sont des homéomorphismes, il en va de même de l'application $X \times i \simeq X \times \alpha(i)$ induite par f . De plus, on a clairement $f^{-1}(X \times j) = \bigcup_{\alpha(i)=j} X \times i$. Cela montre que f est un revêtement.

2. On suppose maintenant que X est localement connexe par arcs et X'' est connexe. Cela implique que X et X'' sont tous deux connexes par arcs. Soient $x' \in X'$, $x'' := f(x')$ et $x := p'(x') = p''(x'')$. Si $y'' \in X''$, il existe un chemin $\gamma'' : x'' \sim y''$ dans X'' . On peut relever $\gamma = p''_* \gamma'' : x \sim y := p''(y'')$ en un chemin $\gamma' : x' \sim y'$ dans X' . On considère alors les chemins γ'' et $f_* \gamma'$. Ce sont deux relèvements de γ qui partent de x'' . Puisque X'' est un revêtement de X , ils coïncident et ont donc même point final $f(y') = y''$. Cela montre que f est surjective et c'est donc un revêtement grâce à la première question. ■

Exercice 3.12 Soit $p : Y \twoheadrightarrow X$ un revêtement.

1. Montrer que l'ensemble $\text{Aut}(Y/X)$ des automorphismes g du revêtement est un sous-groupe de $\mathcal{S}(Y)$.

2. Montrer que si Y est connexe et $g \in \text{Aut}(Y/X)$ a un point fixe, alors $g = \text{Id}_Y$.
3. Montrer que p se factorise de manière unique par l'application quotient : $Y \twoheadrightarrow Y/\text{Aut}(Y/X) \xrightarrow{\bar{p}} X$. Lorsque \bar{p} est bijectif, on dit que p est *galoisien*.
4. Montrer que si Y est connexe et p est galoisien, alors $\text{Aut}(Y/X)$ agit de manière proprement discontinue sur Y .
5. Réciproquement, montrer que si un groupe G agit de manière proprement discontinue sur Y connexe, alors $Y \twoheadrightarrow Y/G$ est galoisien.

Solution. 1. Immédiat.

2. Puisque Y est connexe, si $y \in Y$, il existe au plus un morphisme de revêtements $g : Y \rightarrow Y$ tel que $g(y) = y$. C'est nécessairement l'identité.
3. Immédiat.
4. Supposons que p est galoisien et posons $G := \text{Aut}(Y/X)$. Puisque G est discret et qu'il agit par homéomorphismes, c'est une action continue. De plus, par hypothèse, la projection $p : Y \rightarrow Y/G \simeq X$ est un revêtement. Enfin, il résulte de la question 2 que l'action est libre. On sait alors qu'elle est proprement discontinue.
5. Puisque l'action est proprement discontinue, elle est libre et donc fidèle si bien qu'on a une application injective $G \hookrightarrow \mathcal{S}(X)$. Puisque l'action est continue, cette application est à valeurs dans $\text{Aut}(Y/X)$ et il faut montrer que c'est une bijection. Si $f : Y \rightarrow Y$ est un automorphisme du revêtement $p : Y \twoheadrightarrow Y/G$, et $y \in Y$, alors $f(y) \in p^{-1}(p(y)) = Gy$ et il existe donc $g \in G$ tel que $f(y) = g \cdot y$, c'est-à-dire $(g^{-1} \circ f)(y) = y$. Il résulte de la question 2) que $(g^{-1} \circ f) = \text{Id}_Y$ et donc que $f = g$ (la multiplication par g). ■

4. Homologie

4.1 Algèbre linéaire (Rappels)

Lemme 4.1.1 Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de groupes abéliens. Il existe alors un groupe abélien M (leur *somme directe*) et des morphismes $j_i : M_i \rightarrow M$, tels que si on se donne des morphismes $f_i : M_i \rightarrow N$ avec N abélien, alors il existe un unique morphisme $f : M \rightarrow N$ rendant commutatif les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{j_i} & M \\ & \searrow f_i & \downarrow f \\ & & N. \end{array}$$

Démonstration. Il suffit de considérer le sous-groupe $M := \bigoplus_{i \in I} M_i \subset \prod_{i \in I} M_i$ des familles à support fini. Les détails sont laissés en exercice. ■

- Remarques**
1. En particulier, on a $\bigoplus_{i=1}^n M_i = \prod_{i=1}^n M_i$.
 2. Si on pose $\mathbb{Z}^{(I)} := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$, alors toute application $I \rightarrow J$ induit un morphisme de groupes $\mathbb{Z}^{(I)} \rightarrow \mathbb{Z}^{(J)}$ et c'est fonctoriel.
 3. Un groupe abélien M est *libre* s'il est isomorphe à $\mathbb{Z}^{(I)}$. Cela signifie qu'il possède une *base* $(e_i)_{i \in I}$ avec $e_i \in M$: tout $x \in M$ s'écrit de manière unique comme somme finie $x = \sum_{i \in I} a_i e_i$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$ et réciproquement. On écrit alors aussi $M = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} e_i$ (somme directe interne).
 4. Un groupe abélien est *de type fini* s'il possède un nombre fini de générateurs. C'est équivalent à dire qu'il existe un morphisme surjectif $\mathbb{Z}^n \twoheadrightarrow M$. Il est *monogène* s'il est engendré par un seul élément. C'est équivalent à dire qu'il existe un isomorphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq M$ avec $n \in \mathbb{N}$.
 5. Une suite exacte courte $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$ est dite *scindée* si p possède une *section* $s : M'' \rightarrow M$ (c'est-à-dire $p \circ s = \text{Id}_{M''}$) ou de manière équivalente,

si i possède une *rétraction* $r : M \rightarrow M'$ (c'est-à-dire $r \circ i = \text{Id}_{M'}$). Dans ce cas, $M \simeq M' \oplus M''$ (voir exercice 4.1).

Théoreme 4.1.2 Tout sous-groupe d'un groupe abélien libre est libre.

Démonstration. Si $M \subset \mathbb{Z}^{(I)}$, on applique le lemme de Zorn aux bases B de $M_J := M \cap \mathbb{Z}^{(J)}$ pour $J \subset I$. Si B est maximale et $k \notin J$, alors (en notant e_k le vecteur d'indice k de la base canonique de $\mathbb{Z}^{(I)}$)

$$\{n \in \mathbb{N}, \exists x \in M_J, x + ne_k \in M_{J \cup k}\} = d\mathbb{Z}$$

(car c'est un idéal) et $B \cup de_k$ est une base de $M_{J \cup k}$. Contradiction. Détails en exercice. ■

Remarques 1. Comme conséquence, on voit que si M est un groupe abélien, il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ avec L_0, L_1 abéliens libres.
 2. Un groupe abélien L est libre si et seulement si tout morphisme surjectif $M \twoheadrightarrow L$ admet une section (en tant que morphisme de groupe). De manière équivalente, toute suite exacte $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow 0$ est scindée.

Théoreme 4.1.3 Tout groupe abélien de type fini est somme directe de groupes monogènes.

Démonstration. On peut écrire $M \simeq \text{coker } A$ avec $A \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})$. La méthode du pivot montre que A est équivalente à une matrice diagonale D . On aura donc $M \simeq \text{coker } D$. Détails laissés en exercice. ■

Remarques 1. Plus précisément, l'idéal engendré par les mineurs de taille i de A est de la forme $(d_1 \dots d_i)$ avec $d_i \mid d_{i+1}$ et $D = [d_1, \dots, d_r]$ (théorème des facteurs invariants).
 2. Le théorème 4.1.3 implique que M est somme directe d'un groupe abélien libre et d'un groupe fini.

Proposition 4.1.4 Si M est un groupe abélien, il existe un \mathbb{Q} -espace vectoriel $M_{\mathbb{Q}}$ et un morphisme de groupes $j : M \rightarrow M_{\mathbb{Q}}$ tel que si $f : M \rightarrow V$ est un morphisme de groupes où V est un \mathbb{Q} -espace vectoriel, alors il existe une unique application linéaire $\tilde{f} : M_{\mathbb{Q}} \rightarrow V$ avec $\tilde{f} \circ j = f$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{j} & M_{\mathbb{Q}} \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & V \end{array}$$

Démonstration. Il suffit de poser $M_{\mathbb{Q}} := (M \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim$ avec $(x, n) \sim (y, m) \Leftrightarrow mx = ny$. Les détails sont laissés en exercice. ■

Remarques 1. On a

$$M_{\text{tors}} := \ker(M \rightarrow M_{\mathbb{Q}}) = \{x \in M, \exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, nx = 0\}.$$

Le groupe abélien M est *sans torsion* (resp. *de torsion*) si $M_{\text{tors}} = 0$ (resp. $M_{\text{tors}} = M$).

2. Le *rang* de M est $\text{rang}(M) := \dim M_{\mathbb{Q}}$. Si $M \simeq \mathbb{Z}^{(I)}$ alors $M_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}^{(I)}$ et donc $\text{rang}(M) = \#I$. Le groupe M est de torsion si et seulement si $\text{rang}(M) = 0$.
3. Un groupe abélien de type fini est sans-torsion (resp. de torsion) si et seulement s'il est libre (resp. fini).

Lemme 4.1.5 Si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de groupes abéliens, alors la suite $0 \rightarrow M'_{\mathbb{Q}} \rightarrow M_{\mathbb{Q}} \rightarrow M''_{\mathbb{Q}} \rightarrow 0$ est aussi exacte.

Démonstration. Vérification élémentaire. ■

Remarque Il résulte alors du théorème du rang usuel que

$$\text{rang}(M) = \text{rang}(M') + \text{rang}(M'').$$

Définition 4.1.6 Un *complexe (de chaînes)* C est une suite de groupes abéliens et d'homomorphismes

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

tels que $\forall n \in \mathbb{Z}, d_n \circ d_{n+1} = 0$. Le groupe des *cycles* (resp. *bords*) est

$$Z_n(C) := \ker d_n \quad (\text{resp. } B_n(C) := \text{im } d_{n+1}).$$

Le n -ème *groupe d'homologie* de C est $H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$.

- Remarques**
1. On dit que C_n est le *terme* de *degré* n et que d_n est la *différentielle* en degré n .
 2. La suite est exacte en degré n (c'est à dire en C_n) si et seulement si $B_n(C) = Z_n(C)$ si et seulement si $H_n(C) = 0$.
 3. Un complexe exact partout est dit *acyclique*. De manière équivalente : $\forall n \in \mathbb{N}, H_n(C) = 0$.
 4. Un complexe est *de rang fini* si C_n est de rang fini pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $C_n = 0$ pour $|n| \gg 0$.
 5. Si $\{C^{(i)}\}_{i \in I}$ est une famille de complexes, leur somme directe $C := \bigoplus_{i \in I} C^{(i)}$ est le complexe défini par $C_n^{(i)} = \bigoplus_{i \in I} C_n^{(i)}$. C'est bien un complexe puisque d_n respecte des composantes. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(C) \simeq \bigoplus_{i \in I} H_n(C^{(i)})$.

Quand on définit C_n pour seulement certaines valeurs de n , on sous-entend que $C_n = 0$ sinon.

- Exemples**
1. Avec M en degré 0 (et 0 ailleurs), on a $H_0 = M$ et $H_n = 0$ sinon.
 2. Avec $M \xrightarrow{f} N$ en degrés 0 et 1 (et 0 ailleurs), on a $H_0 = \text{coker } f$, $H_1 = \ker f$ et $H_n = 0$ sinon.

Théoreme 4.1.7 — du rang. Si C est un complexe de rang fini, alors

$$\sum (-1)^n \text{rang}(C_n) = \sum (-1)^n \text{rang}(H_n(C)).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème du rang aux suites exactes

$$0 \rightarrow Z_n(C) \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1}(C) \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow B_n(C) \rightarrow Z_n(C) \rightarrow H_n(C) \rightarrow 0.$$

On aura ainsi

$$\sum (-1)^n \text{rang}(C_n) = \sum (-1)^n \text{rang}(Z_n(C)) + \sum (-1)^n \text{rang}(B_{n-1}(C))$$

et

$$\sum (-1)^n \text{rang}(Z_n(C)) = \sum (-1)^n \text{rang}(B_n(C)) + \sum (-1)^n (\text{rang} H_n(C))$$

La formule annoncée en résulte. ■

Définition 4.1.8 Un morphisme de complexes $f : C \rightarrow C'$ est une suite de morphismes $f_n : C_n \rightarrow C'_n$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Remarques 1. Un morphisme de complexes $f : C \rightarrow C'$ induit des morphismes (fonctoriels)

$$f_* = Z_n(f) : Z_n(C) \rightarrow Z_n(C'), \quad f_* = B_n(f) : B_n(C) \rightarrow B_n(C')$$

et

$$f_* = H_n(f) : H_n(C) \rightarrow H_n(C').$$

2. En particulier, si $f' : C' \rightarrow C$ est un autre morphisme de complexes, alors $H_n(f' \circ f) = H_n(f') \circ H_n(f)$ et on a toujours $H_n(\text{Id}_C) = \text{Id}_{H_n(C)}$.
3. f est un *quasi-isomorphisme* si $H_n(f)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et on écrit alors $C \simeq C'$.
4. C est acyclique si et seulement si C est quasi-isomorphe au complexe nul 0.

Définition 4.1.9 1. Si $f, g : C \rightarrow C'$ sont des morphismes de complexes, une *homotopie (de chaînes)* $h : f \sim g$ est une famille de morphismes

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \swarrow h_{n+1} & & \swarrow h_n & & \swarrow h_{n-1} \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = f_n - g_n.$$

2. Un morphisme de complexes $f : C \rightarrow C'$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe un morphisme $g : C' \rightarrow C$ tel que $g \circ f \sim \text{Id}_C$ et $f \circ g \sim \text{Id}_{C'}$.
3. Un complexe est *contractile* s'il est homotopiquement équivalent au complexe nul.

Remarques

1. Si $f \sim g : C \rightarrow C'$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(f) = H_n(g)$.
2. Si $f : C \sim C'$ est une équivalence d'homotopie, alors f est un quasi-isomorphisme.
3. Si C est contractile, alors C est acyclique.

Exemple 1. On dispose d'une homotopie $h : \text{Id} \sim 0$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \searrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Ça implique que le complexe $\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z}$ est contractile et pas seulement acyclique.

2. Le complexe

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

est acyclique mais pas contractile.

Définition 4.1.10 Une *suite exacte courte* de complexes est une suite de morphismes de complexes $0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$ telle que $0 \rightarrow C'_n \rightarrow C_n \rightarrow C''_n \rightarrow 0$ soit une suite exacte courte pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques

1. Soient C un complexe et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $C'_n \subset C_n$ tel que $d(C'_n) \subset C'_{n-1}$. On dit alors que $C' \subset C$ est un *sous-complexe*.
2. Si $C' \subset C$ est un sous-complexe, on pose pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(C/C')_n = C_n/C'_n$ et on désigne par $d_n : (C/C')_n \rightarrow (C/C')_{n-1}$ l'application quotient. Alors, C/C' le *complexe quotient*.
3. Si $C' \subset C$, alors $0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C/C' \rightarrow 0$ est une suite exacte courte.

On démontre maintenant le fondamental théorème du serpent :

Théorème 4.1.11 — du serpent. Si $0 \rightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de complexes, alors il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, un morphisme $\delta_n : H_n(C'') \rightarrow H_{n-1}(C)$ tel que la suite

$$\cdots \rightarrow H_n(C') \rightarrow H_n(C) \rightarrow H_n(C'') \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(C') \rightarrow H_{n-1}(C) \rightarrow H_{n-1}(C'') \rightarrow \cdots$$

soit exacte (partout).

Démonstration. Afin d'alléger l'écriture, on écrira simplement d_n pour les différentielles des différents complexes (et pas d'_n et d''_n).

On construit d'abord δ_n comme suit. Si $\alpha'' \in H_n(C'')$, on peut écrire $\alpha'' := \overline{c''}$ avec $c'' \in Z_n(C'')$. Puisque p_n est surjective, on peut écrire $c'' = p_n(c)$ avec $c \in C_n$. On considère alors $d_n(c) \in C_{n-1}$. On a $p_{n-1}(d_n(c)) = d_n(p_n(c)) = d_n(c'') = 0$ puisque

$c'' \in Z_n(C'')$. Puisque la suite $0 \rightarrow C'_{n-1} \rightarrow C_{n-1} \rightarrow C''_{n-1} \rightarrow 0$ est exacte, il existe donc un unique $c' \in C_{n-1}$ tel que $i_{n-1}(c') = d_n(c)$. On a

$$i_{n-2}(d_{n-1}(c')) = d_{n-1}(i_{n-1}(c')) = d_{n-1}(d_n(c)) = 0$$

et puisque i_{n-2} est injective, $d_{n-1}(c') = 0$. Autrement, dit $c' \in Z_{n-1}(C')$ et on pose $\delta_n(\alpha'') := \beta' := \bar{c}' \in H_{n-1}(C')$.

On montre maintenant que δ_n est bien défini. On peut perturber c en $c + i_n(c'_1)$ avec $c'_1 \in C'_n$. On aura alors

$$d_n(c + i_n(c'_1)) = d_n(c) + d_n(i_n(c'_1)) = i_{n-1}(c') + i_{n-1}(d_n(c'_1)) = i_{n-1}(c' + d_n(c'_1))$$

et $\overline{c' + d_n(c'_1)} = \bar{c}' = \beta'$ puisque $d_n(c'_1) \in B_n(C')$. On peut aussi perturber c'' en $c'' + b''$ avec $b'' \in B_n(C'')$. On peut alors écrire $b'' = d_{n+1}(c'_1)$ puis $c'_1 = p_n(c_1)$ avec $c_1 \in C_{n+1}$. On aura alors

$$p_n(c + d_{n+1}(c_1)) = c'' + d_{n+1}(p_n(c_1)) = c'' + b''$$

et

$$d_n(c + d_{n+1}(c_1)) = d_n(c) + d_n(d_{n+1}(c_1)) = d_n(c).$$

Montrons maintenant que la suite est exacte en $H_{n-1}(C')$. On montre d'abord que $H_{n-1}(i) \circ \delta_n = 0$. Avec les notations ci-dessus, $i_{n-1}(c') = d_n(c) \in B_{n-1}(C)$ et donc $H_{n-1}(i)(\delta_n(\alpha'')) = 0$. Supposons réciproquement, que pour un certain $\beta' \in H_{n-1}(C)$, on ait $H_{n-1}(i)(\beta') = 0$. On écrit alors $\beta' = \bar{c}'$ si bien que $i_{n-1}(c') \in B_{n-1}(C)$. On peut alors écrire $i_{n-1}(c') = d_n(c)$ avec $c \in C_n$ et il suffit de poser $c'' = p_n(c)$ et $\alpha'' = \bar{c}'$ pour que $\delta_n(\alpha'') = \beta'$.

On montre ensuite qu'elle est exacte en $H_n(C'')$. On montre d'abord que $\delta_n \circ H_n(p) = 0$. Avec les notations ci-dessus, on suppose donc que $\alpha'' = H_n(p)(\alpha)$ avec $\alpha \in H_n(C)$. On peut alors choisir $c \in C_n$ de telle sorte que $\alpha = \bar{c}$ avec $c \in Z_n(C)$. On aura alors $d_n(c) = 0$ si bien que $i_{n-1}(c') = 0$ et donc $c' = 0$ puisque i_{n-1} est injective et finalement $\beta = 0$. Réciproquement, on suppose que $\delta_n(\alpha'') = 0$. Avec les notations ci-dessus, on aura donc $c' \in B_{n-1}(C')$ et on peut donc écrire $c' = d_n(c'_1)$ avec $c'_1 \in C'_n$.

$$\begin{aligned} d_n(c - i_n(c'_1)) &= d_n(c) - d_n(i_n(c'_1)) = i_{n-1}(c') - i_{n-1}(d_n(c'_1)) \\ &= i_{n-1}(c' - d_n(c'_1)) = 0 \end{aligned}$$

Cela montre que $c - i_n(c'_1) \in Z_n(C)$ et on peut poser $\alpha = \overline{c - i_n(c'_1)} \in H_n(C)$. On a $p_n(c - i_n(c'_1)) = p_n(c) - p_n(i_n(c'_1)) = p_n(c) = c''$ et donc $H_n(p)(\alpha) = \alpha''$.

Il ne reste plus qu'à montrer l'exactitude en $H_n(C)$. On a bien sûr

$$H_n(p) \circ H_n(i) = H_n(p_n \circ i_n) = H_n(0) = 0.$$

Réciproquement, supposons qu'on ait $H_n(p)(\alpha) = 0$ avec $\alpha \in H_n(C)$. On a donc $\alpha = \bar{c}$ avec $c \in Z_n(C)$ et $p_n(c) \in B_n(C'')$. On peut donc écrire $p_n(c) = d_{n+1}(c'')$ avec $c'' \in C''_{n+1}$. Puisque p_{n+1} est surjective, on a $c'' = p_{n+1}(c_1)$ avec $c_1 \in C_{n+1}$. On aura donc

$$p_n(c - d_{n+1}(c_1)) = p_n(c) - d_{n+1}(p_{n+1}(c_1)) = p_n(c) - d_{n+1}(c'') = 0.$$

Puisque la suite $0 \rightarrow C'_n \rightarrow C_n \rightarrow C''_n \rightarrow 0$ est exacte, il existe un unique $c' \in C'_n$ tel que $i_n(c') = c - d_{n+1}(c_1)$. On a

$$i_{n-1}(d_n(c')) = d_n(i_n(c')) = d_n(c - d_{n+1}(c_1)) = d_n(c) - d_n(d_{n+1}(c_1)) = 0$$

puisque $c \in Z_n(C)$. Puisque i_{n-1} est injective, on en déduit que $d_n(c') = 0$, c'est-à-dire que $c' \in Z_n(C')$. On pose alors $\alpha' = \bar{c}'$. Par construction, $H_n(i)(\alpha') = \alpha$. ■

Remarques 1. Le morphisme δ_n est caractérisé pour $c'' \in Z_n(C'')$ par

$$\begin{aligned} \delta_n(\bar{c}'') = \bar{c}' &\Leftrightarrow \exists c \in C_n, c'' = p_n(c) \text{ et } d_n(c) = i_{n-1}(c') \\ &\Leftrightarrow \forall c \in C_n, c'' = p_n(c) \Rightarrow d_n(c) = i_{n-1}(c'). \end{aligned}$$

2. Si

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & D & \longrightarrow & D'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

est un *morphisme de suites exactes courtes*, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(C) & \longrightarrow & H_n(C'') & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(C') & \longrightarrow & H_{n-1}(C) & \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(D) & \longrightarrow & H_n(D'') & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(D') & \longrightarrow & H_{n-1}(D) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

est aussi commutatif (voir exercice 4.5).

4.2 Ensemble semi-simplicial

Définition 4.2.1 1. Si $n \in \mathbb{N}$, alors le *simplexe standard* de dimension n est

$$|\Delta^n| := \left\{ \underline{t} := (t_0, \dots, t_n) / \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

2. Un *n-simplexe (régulier)* est une application affine injective $\sigma : |\Delta^n| \hookrightarrow X$ où X est une partie d'un espace vectoriel E .

Remarques 1. Si on désigne par (e_0, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} , alors $|\Delta^n|$ est l'enveloppe convexe de $\{e_0, \dots, e_n\}$.

2. Un *n-simplexe* σ est uniquement déterminé par les images a_0, \dots, a_n des vecteurs e_0, \dots, e_n de la base canonique. On écrit alors $\sigma = [a_0, \dots, a_n]$ et on dit que a_0, \dots, a_n sont les *sommets* de σ . On pose $\Delta^n := [e_0, \dots, e_n]$.

3. Des points a_0, \dots, a_n de E sont *affinement indépendants* (i.e. $\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_n}$ sont linéairement indépendants) si et seulement si $[a_0, \dots, a_n]$ est un *n-simplexe*.

4. L'image de $\sigma = [a_0, \dots, a_n]$ est l'enveloppe convexe

$$|\sigma| := \left\{ \sum_{i=0}^n t_i a_i \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}$$

de $\{a_0, \dots, a_n\}$. En pratique, on ne fait pas de différence entre un n -simplexe et son image.

- Exemples**
1. Un 0-simplexe $[a]$ est un point.
 2. Un 1-simplexe $[a, b]$ est un segment fermé orienté à extrémités distinctes.
 3. Un 2-simplexe $[a, b, c]$ est un triangle plein orienté à sommets distincts.

Définition 4.2.2 1. Si $0 \leq i_0 < \dots < i_m \leq n$, alors le n -simplexe régulier

$$[e_{i_0}, \dots, e_{i_m}] : |\Delta^m| \hookrightarrow |\Delta^n|$$

est une *face* de dimension m de Δ^n .

2. En particulier^a, $\delta_i^n := [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n] : |\Delta^{n-1}| \hookrightarrow |\Delta^n|$ est la i -ième face de dimension $n-1$ de Δ^n .

^a. On écrira $e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n$ au lieu de $e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$.

Remarques 1. Explicitement, on a

$$\forall k = 0, \dots, n, \quad \delta_i^n(e_k) = \begin{cases} e_k & \text{si } k < i \\ e_{k+1} & \text{si } k \geq i, \end{cases}$$

ou encore

$$\delta_i^n(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}).$$

2. On dira aussi que $[e_{i_0}, \dots, e_{i_m}]$ est une face de $|\Delta^n|$.
3. On dira aussi que $[a_{i_0}, \dots, a_{i_m}]$ est une *face* de $[a_0, \dots, a_n]$ (c'est le composé avec la face correspondante de $|\Delta^n|$) et on considèrera en particulier la i -ième face $[a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n]$.

Exemples 1. Les faces de dimension 0 du simplexe sont les sommets. Les faces de dimension 1 sont les *arêtes* du simplexe.

2. Les faces de $[a, b, c]$ sont $[a, b, c]$, $[a, b]$, $[a, c]$, $[b, c]$, $[a]$, $[b]$ et $[c]$.
3. La frontière d'un simplexe (vu comme sous-espace de l'espace affine qu'il engendre) est l'union des faces de codimension 1 (et l'intérieur est leur complémentaire).
4. On dispose d'homéomorphismes

$$|\Delta^0| = \{1\} \simeq \{0\} \quad \text{et} \quad |\Delta^1| = \{(t, s) \mid t + s = 1, t, s \geq 0\} \simeq [0, 1], \quad (t, s) \mapsto s.$$

Les applications $\delta_0, \delta_1 : |\Delta^0| \mapsto |\Delta^1|$ correspondent respectivement à $0 \mapsto 1$ et $0 \mapsto 0$:

$$\begin{array}{ccc} |\Delta^0| & \xrightarrow{\simeq} & \{0\} \\ \delta_0 \downarrow \delta_1 & & \downarrow 1 \downarrow 0 \\ |\Delta^1| & \xrightarrow{\simeq} & [0, 1]. \end{array} \quad (4.1)$$

Lemme 4.2.3 $\forall 0 \leq i < j \leq n+1, \quad \delta_j^{n+1} \circ \delta_i^n = \delta_i^{n+1} \circ \delta_{j-1}^n.$

Démonstration. En effet, dans les deux cas, l'image de (t_0, \dots, t_{n-1}) est

$$(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{n-1}). \quad \blacksquare$$

Définition 4.2.4 Un *ensemble semi-simplicial* S est une suite d'ensembles et d'applications

$$\cdots \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} S_{n+1} \begin{array}{c} \xrightarrow{d_{n+1}^0} \\ \vdots \\ \xrightarrow{d_{n+1}^{n+1}} \end{array} S_n \begin{array}{c} \xrightarrow{d_n^0} \\ \vdots \\ \xrightarrow{d_n^n} \end{array} S_{n-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \cdots \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} S_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1^0} \\ \vdots \\ \xrightarrow{d_1^1} \end{array} S_0$$

tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq i < j \leq n+1, \quad d_n^i \circ d_{n+1}^j = d_n^{j-1} \circ d_{n+1}^i.$$

Il est *fini* si S_n est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \emptyset$ pour $n > 0$.

Exemples 1. Si $[a_0, \dots, a_n]$ est un simplexe et S_m désigne l'ensemble des faces de dimension m , on peut considérer les applications face

$$d_m^j([a_{i_0}, \dots, a_{i_m}]) = [a_{i_0}, \dots, \widehat{a_{i_j}}, \dots, a_{i_m}].$$

On obtient ainsi un ensemble semi-simplicial grace au lemme 4.2.3.

2. Plus généralement, on définit un « complexe simplicial » en « recollant » des simplexes.
3. On peut considérer l'ensemble semi-simplicial (correspondant au cercle) $S_0 = \{v\}, S_1 = \{e\}$ (et $S_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$). On a alors pas le choix pour les d_n^i .
4. On peut aussi considérer l'ensemble semi-simplicial $S_0 = \{v\}, S_1 = \{a, b, c\}, S_2 = \{\sigma, \tau\}$ (correspondant au tore) avec

$$d_2^0(\sigma) = b, d_2^1(\sigma) = c, d_2^2(\sigma) = a \quad \text{et} \quad d_2^0(\tau) = a, d_2^1(\tau) = c, d_2^2(\tau) = b.$$

Définition 4.2.5 Soient S et S' deux ensembles semi-simpliciaux. Un *morphisme* d'ensembles semi-simpliciaux $f : S \rightarrow S'$ est famille d'applications $f_n : S_n \rightarrow S'_n$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i = 0, \dots, n, \quad f_{n-1} \circ d_n^i = d_{n-1}^i \circ f_n.$$

Lemme 4.2.6 Soit S un ensemble semi-simplicial. On désigne pour $n \geq 0$, par $C_n(S) := \mathbb{Z}^{(S_n)} \simeq \bigoplus_{\sigma \in S_n} \mathbb{Z}\sigma$ le groupe abélien libre de base S_n et, pour $n > 1$,

$$d_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_n^i : C_n(S) \rightarrow C_{n-1}(S)$$

où $d_n^i : C_n(S) \rightarrow C_{n-1}(S)$ désigne l'unique morphisme de groupes qui prolonge

$d_n^i : S_n \rightarrow S_{n-1}$. On pose aussi $C_n(S) = 0$ pour $n < 0$ et $d_n = 0$ pour $n \leq 0$. Alors $C(S)$ est un complexe de chaînes.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
 d_n \circ d_{n+1} &= \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i d_n^i \right) \circ \left(\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j d_{n+1}^j \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{i+j} d_n^i \circ d_{n+1}^j \\
 &= \sum_{0 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} d_n^i \circ d_{n+1}^j + \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} (-1)^{i+j} d_n^i \circ d_{n+1}^j \\
 &= \sum_{0 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} d_n^{j-1} \circ d_{n+1}^i + \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (-1)^{i+j} d_n^j \circ d_{n+1}^i \\
 &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (-1)^{i+j+1} d_n^j \circ d_{n+1}^i + \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (-1)^{i+j} d_n^j \circ d_{n+1}^i \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

- Remarques**
1. Tout morphisme de complexes simpliciaux $f : S \rightarrow S'$ se prolonge de manière unique en un morphisme de complexes de chaînes $f_* = C(f) : C(S) \rightarrow C(S')$ et c'est fonctoriel.
 2. Si $\{S^{(i)}\}_{i \in I}$ est une famille d'ensemble semi-simpliciaux, leur union disjointe $S := \coprod_{i \in I} S^{(i)}$ est l'ensemble semi-simplicial défini par $S_n^{(i)} = \coprod_{i \in I} S_n^{(i)}$ (union disjointe). C'est bien un ensemble semi-simplicial puisque d_i^n respecte des composantes. De plus $C(S) = \oplus_{i \in I} C(S^{(i)})$.
 3. Si S est un complexe semi-simplicial, le *complexe de chaînes augmenté* est

$$\tilde{C}(S) := \cdots \rightarrow C_n(S) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(S) \rightarrow \cdots \rightarrow C_1(S) \xrightarrow{d_1} C_0(S) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$$

avec $\epsilon(\sum_{\sigma \in S_0} a_\sigma \sigma) = \sum_{\sigma \in S_0} a_\sigma$. On notera qu'on a bien $\epsilon \circ d_1 = 0$.

4. On désigne par $H_n(S)$ (resp. $\tilde{H}_n(S)$) le n -ème groupe d'homologie de $C(S)$ (resp. $\tilde{C}(S)$). Si $S \neq \emptyset$, alors

$$\begin{cases} H_0(S) \simeq \tilde{H}_0(S) \oplus \mathbb{Z} \\ H_n(S) = \tilde{H}_n(S) \end{cases} \quad \text{si } n \neq 0.$$

Les formules avec \tilde{H} sont souvent plus facile à mémoriser que les formules avec H .

- Exemples**
1. Si $[a_0, \dots, a_n]$ est un n -simplexe, alors

$$d_m([a_{i_0}, \dots, a_{i_m}]) = \sum_{j=0}^m (-1)^j [a_{i_0}, \dots, \widehat{a_{i_j}}, \dots, a_{i_m}]$$

(on peut y penser comme étant la frontière – signée – du simplexe).

2. Dans le cas du cercle (exemple (3) ci-dessus), on a

$$C(S) : [\mathbb{Z}e \xrightarrow{0} \mathbb{Z}v].$$

On aura donc $H_0(C(S)) \simeq H_1(C(S)) \simeq \mathbb{Z}$ et $H_n(C(S)) = 0$ sinon.

3. Dans le cas du tore (exemple (4) ci-dessus), on a

$$C(S) : [\mathbb{Z}\sigma \oplus \mathbb{Z}\tau \xrightarrow{d} \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c \xrightarrow{0} \mathbb{Z}v]$$

avec $d(\sigma) = d(\tau) = a - c + b$. On en déduit que $H_0(C(S)) \simeq H_2(C(S)) \simeq \mathbb{Z}$ et $H_1(C(S)) \simeq \mathbb{Z}^2$ (et 0 sinon).

Définition 4.2.7 Si S est un ensemble semi-simplicial fini, sa *caractéristique d'Euler-Poincaré* est

$$\chi(S) = \sum_n (-1)^n \#S_n.$$

Son n -ème *nombre de Betti* est $\beta_n(S) = \text{rang}(H^n(C(S)))$.

Proposition 4.2.8 Si S est un ensemble semi-simplicial fini, alors

$$\chi(S) = \sum_n (-1)^n \beta_n(S).$$

Démonstration. En effet, il résulte de la proposition 4.1.7 que

$$\begin{aligned} \chi(S) &:= \sum_n (-1)^n \#S_n = \sum_n (-1)^n \text{rang}(C_n(S)) \\ &= \sum_n (-1)^n \text{rang}(H_n(S)) = \sum_n (-1)^n \beta_n(S). \end{aligned}$$

■

4.3 Homologie singulière

On pourrait développer maintenant l'homologie simpliciale mais on va se concentrer sur l'homologie singulière qui est bien plus puissante (mais moins intuitive).

Définition 4.3.1 Soit X un espace topologique. Si $n \in \mathbb{N}$, alors un n -simplexe singulier est une application continue $\sigma : |\Delta^n| \rightarrow X$ et on pose $S_n(X) := \mathcal{C}(|\Delta^n|, X)$. Si $n > 0$ et $0 \leq i \leq n$, alors la i -ième face de σ est l'application composée $\sigma \circ \delta_i^n : |\Delta^{n-1}| \rightarrow X$ et on pose $d_n^i(\sigma) := \delta_i^{n*}(\sigma) = \sigma \circ \delta_i^n$.

Lemme 4.3.2 Si X est un espace topologique, alors $S(X)$ est un ensemble semi-simplicial.

Démonstration. On sait que si $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, n+1\}$, alors $\delta_j^{n+1} \circ \delta_i^n = \delta_i^{n+1} \circ \delta_{j-1}^n$. Par fonctorialité, on aura donc

$$\begin{aligned} d_n^i \circ d_{n+1}^j &= \delta_i^{n*} \circ \delta_j^{n+1*} = (\delta_j^{n+1} \circ \delta_i^n)^* \\ &= (\delta_i^{n+1} \circ \delta_{j-1}^n)^* = \delta_{j-1}^{n*} \circ \delta_i^{n+1*} \\ &= d_n^{j-1} \circ d_{n+1}^i. \end{aligned}$$

■

- Remarques**
1. Une application continue $f : X \rightarrow Y$ fournit un morphisme d'ensembles semi-simpliciaux $f_* = S(f) : S(X) \rightarrow S(Y)$ et c'est fonctoriel.
 2. On peut identifier $S_0(X)$ avec X (et on le fera) puisque $|\Delta^0|$ est réduit à un point.
 3. On peut identifier $S_1(X)$ avec l'ensemble $\mathcal{C}([0, 1], X)$ des chemins (et on le fera) puisqu'on a un homéomorphisme $|\Delta^1| \simeq [0, 1], (t, s) \mapsto s$.
 4. Avec cette identification, si $\gamma : x_0 \sim x_1$ est un chemin dans X , on aura donc $d_1^0(\gamma) = x_1$ et $d_1^1(\gamma) = x_0$.
 5. Avec cette identification, si σ est un 2-simplexe, on peut considérer les chemins $\gamma_0 := d_2^0(\sigma)$, $\gamma_1 := d_2^1(\sigma)$ et $\gamma_2 := d_2^2(\sigma)$. Ceux-ci sont explicitement définis pour $t \in [0, 1]$, par

$$\gamma_0(t) = \sigma(0, 1 - t, t), \quad \gamma_1(t) = \sigma(1 - t, 0, t), \quad \gamma_2(t) = \sigma(1 - t, t, 0).$$

Autrement dit, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & x_1 & \\ \gamma_2 \nearrow & \Downarrow \sigma & \searrow \gamma_0 \\ x_0 & \xrightarrow{\gamma_1} & x_2 \end{array}$$

Exemple Si $a_0, \dots, a_n \in X \subset E$ espace vectoriel (pas nécessairement affinement indépendants), on peut considérer le n -simplexe *singulier*

$$[a_0, \dots, a_n] : |\Delta^n| \rightarrow X, \quad \underline{t} \mapsto \sum_{i=0}^n t_i a_i.$$

Lorsque a_0, \dots, a_n sont affinement indépendant, c'est un n -simplexe régulier, mais sinon, il peut aussi être *dégénéré*.

Définition 4.3.3 Si X est un espace topologique, alors $C(X) := C(S(X))$ est le complexe des n -chaînes singulières de X et $H_n(X) := H_n(C(X))$ est le n -ème groupe d'homologie singulière de X .

On notera aussi $Z_n(X)$ et $B_n(X)$ les groupes des cycles et des bords.

- Remarques**
1. Le groupe des n -chaînes singulières est

$$C_n(X) := C(X)_n := \bigoplus_{\sigma \in S_n(X)} \mathbb{Z}\sigma.$$

et la différentielle associée est donnée par

$$d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X), \quad \sigma \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ \delta_i^n).$$

2. Toute application continue $f : X \rightarrow Y$ induit fonctoriellement un morphisme de complexes de chaînes $f_* = C(f) : C(X) \rightarrow C(Y)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, un morphisme de groupes

$$f_* = H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y).$$

3. On écrira aussi $\tilde{H}_n(X) := \tilde{H}_n(C(X)) = H_n(\widetilde{C(X)})$.

Exemples

1. Si on identifie les 0-simplexes singuliers avec les points de X , une 0-chaîne singulière est donc une somme finie $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ avec $x_i \in X$ et $a_i \in \mathbb{Z}$.
2. Si on identifie les 1-simplexes singuliers avec les chemins dans X , une 1-chaîne singulière est donc une somme finie $\sum_{i=1}^n c_i \gamma_i$ où γ_i est un chemin dans X et $c_i \in \mathbb{Z}$ et on aura donc

$$d_1 \left(\sum_{i=1}^n c_i \gamma_i \right) = \sum_{i=1}^n c_i (\gamma_i(1) - \gamma_i(0)).$$

3. En particulier, si γ est un chemin dans X entre x_0 et x_1 , on aura $d_1(\gamma) = x_1 - x_0$ (est le bord orienté de γ). De même, avec les notations ci-dessus, si σ est un 2-simplexe, alors $d_2(\sigma) = \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2$ (est le bord orienté de σ).

Définition 4.3.4 Un espace topologique X est *acyclique* si le complexe *augmenté* $\tilde{C}(X)$ est acyclique.

De manière équivalente, $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$ et $H_n(X) = 0$ pour $n > 0$.

Exemples

1. Un point est acyclique (voir exercice 4.8).
2. Plus généralement, un espace contractile est acyclique (voir corollaire 4.4).
3. Par contre, un espace simplement connexe n'est pas toujours acyclique (par exemple S^n pour $n \geq 2$).
4. Un espace acyclique n'est pas non plus nécessairement simplement connexe (difficile).

Proposition 4.3.5 Si $\{X_i\}_{i \in I}$ désigne l'ensemble des composantes connexes (par arcs) de X , alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_n(X) = \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i).$$

Démonstration. Puisque $|\Delta^n|$ est connexe (par arcs), on a

$$\mathcal{C}(|\Delta^n|, X) = \coprod_{i \in I} \mathcal{C}(|\Delta^n|, X_i)$$

(union disjointe) et $S(X)$ est donc l'union disjointe des ensembles semi-simpliciaux $S(X_i)$. L'assertion en résulte formellement. ■

Remarques

1. De même, si $X = \coprod_{i \in I} X_i$ est une union disjointe, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $H_n(X) = \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i)$.
2. Attention, ces résultats sont faux pour \tilde{H} .

Proposition 4.3.6 $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}^{(\pi_0^{\text{arc}}(X))} \simeq \bigoplus_{X_i \in \pi_0^{\text{arc}}(X)} \mathbb{Z} \cdot X_i$.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où X est non-vide et connexe par arcs et de montrer que $\tilde{H}_0(X) = 0$. En d'autres termes, il faut s'assurer que la suite

$$C_1(X) \xrightarrow{d} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

est exacte en $C_0(X)$. On sait déjà que $\epsilon \circ d = 0$. Réciproquement, on se donne $\sum_{i=0}^n a_i x_i \in C_0(X)$ tel que $\sum_{i=0}^n a_i = 0$. Soit pour tout $i = 0, \dots, n$ un chemin γ_i entre x_0 et x_i . On a alors

$$d_1 \left(\sum_{i=0}^n a_i \gamma_i \right) = \sum_{i=0}^n a_i (x_i - x_0) = \sum_{i=0}^n a_i x_i - \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) x_0 = \sum_{i=0}^n a_i x_i. \quad \blacksquare$$

On va avoir besoin de résultats préliminaires pour comparer le groupe fondamental à l'homologie.

Proposition 4.3.7 Soient $\gamma_0 : x_1 \sim x_2, \gamma_1 : x_0 \sim x_2, \gamma_2 : x_0 \sim x_1$ dans X . Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe alors un 2-simplexe singulier σ dont les faces sont $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$,
2. $\gamma_1 \sim_{\{0,1\}} \gamma_2 \cdot \gamma_0$.

Démonstration. On sait qu'un lacet γ dans X est trivial si et seulement si $\hat{\gamma} : \mathbb{S} \rightarrow X$ se prolonge en un morphisme $\tilde{\gamma} : \mathbb{B}^2 \rightarrow X$. On sait aussi qu'il existe un homéomorphisme $\mathbb{B}^2 \simeq \Delta^2$ induisant un homéomorphisme sur les frontières $\mathbb{S} \simeq \partial \Delta^2$. On considère alors l'application continue $\partial \Delta^2 \rightarrow X$ donnée respectivement par $\gamma_0, \gamma_1^{-1}, \gamma_2$ sur les faces $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ de Δ^2 . On voit alors que le lacet $\gamma_0 \cdot \gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2$ est trivial si et seulement s'il existe une application continue $\sigma : \Delta^2 \rightarrow X$ telle que $\sigma|_{\Delta_0} = \gamma_0, \sigma|_{\Delta_1} = -\gamma_1$ et $\sigma|_{\Delta_2} = \gamma_2$. c'est-à-dire un 2-simplexe singulier dont les faces sont $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$. Enfin, dire que $\gamma_0 \cdot \gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2$ est trivial est équivalent à dire que $\gamma_1 \sim_{\{0,1\}} \gamma_2 \cdot \gamma_0$. \blacksquare

Lemme 4.3.8 Soit X un espace topologique et γ, γ' des chemins dans X . Alors,

1. si γ et γ' sont composables, alors $\gamma \cdot \gamma' \equiv \gamma + \gamma' \pmod{B_1(X)}$,
2. si $\gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma'$, alors $\gamma \equiv \gamma' \pmod{B_1(X)}$.

Démonstration. On désigne par $\bar{c} \in C_1(X)/B_1(X)$ la classe de $c \in C_1(X)$. La première condition de la proposition 4.3.7 s'écrit $\exists \sigma \in C_2(X), \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 = d_2 \sigma$, ce qui est équivalent à $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}_2$. Les deux assertions en résultent. Tout d'abord, si γ et γ' sont composables, on aura trivialement $\gamma \cdot \gamma' \sim_{\{0,1\}} \gamma \cdot \gamma'$ et donc $\overline{\gamma \cdot \gamma'} = \bar{\gamma} + \bar{\gamma}'$. Ensuite, si $\gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma'$ et si y désigne le point final, on remarque d'abord que $1_y \sim_{\{0,1\}} 1_y \cdot 1_y$, et on aura donc $\bar{1}_y = \bar{1}_y + \bar{1}_y$ si bien que $\bar{1}_y = 0$. Puisque $\gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma' \cdot 1_y$, on aura donc $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}' + \bar{1}_y = \bar{\gamma}'$. \blacksquare

Théoreme 4.3.9 — Hurewicz. Si X est connexe par arcs et $x \in X$, alors $\pi_1(X, x)^{\text{ab}} \simeq$

$H_1(X)$.

Démonstration. Si γ est un lacet en x , alors $d_1(\gamma) = x - x = 0$ et donc $\gamma \in Z_1(X)$. En utilisant le lemme (4.3.8), on obtient un morphisme de groupes

$$\Phi : \pi_1(X, x) \rightarrow H_1(X), \quad [\gamma] \mapsto \bar{\gamma}. \quad (4.2)$$

Puisque $H_1(X)$ est abélien, Φ se factorise par un morphisme de groupes abéliens

$$\phi : \pi_1(X, x)^{\text{ab}} \rightarrow H_1(X), \quad \overline{[\gamma]} \mapsto \bar{\gamma}.$$

Réciproquement, on choisit pour tout $y \in X$, un chemin $\delta_y : x \sim y$. Si $\gamma : y \sim z$ dans X , on pose (uniquement dans cette démonstration) $\hat{\gamma} = \delta_y \gamma \delta_z^{-1}$. Ceci définit une application

$$S_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x), \quad \gamma \mapsto [\hat{\gamma}].$$

L'application composée

$$S_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x)^{\text{ab}}$$

se prolonge alors de manière unique en un morphisme de groupes

$$\Psi : C_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x)^{\text{ab}}, \quad \gamma \mapsto \overline{[\hat{\gamma}]}$$

Soit σ un 2-simplexe et $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ ses faces. Il résulte du lemme 4.3.7 que $\gamma_0 \cdot \gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2$ est trivial. Si on désigne par x_0, x_1, x_2 les sommets du 2-simplexe et qu'on écrit $\delta_i := \delta_{x_i}$, on voit donc que

$$\hat{\gamma}_0 \cdot \hat{\gamma}_1^{-1} \hat{\gamma}_2 = \delta_1 \cdot \gamma_0 \cdot \delta_2^{-1} \cdot \delta_2 \cdot \gamma_1^{-1} \cdot \delta_0^{-1} \cdot \delta_0 \cdot \gamma_2 \cdot \delta_1^{-1} = \delta_1 \cdot (\gamma_0 \cdot \gamma_1^{-1} \gamma_2) \cdot \delta_1^{-1}$$

est aussi trivial. Il suit que $(\Psi \circ d_2)(\sigma) = \overline{[1_x]}$ et Ψ induit donc un morphisme

$$\psi : H_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x)^{\text{ab}}, \quad \sum a_i \gamma_i \mapsto \overline{\prod [\hat{\gamma}_i]^{a_i}}$$

Par construction, si γ est un lacet en x , on a $(\psi \circ \phi)(\overline{[\gamma]}) = \overline{[\gamma]}$. Pour la réciproque, on rappelle d'abord que l'application $x \mapsto \delta_x$ se prolonge de manière unique en un morphisme de groupes

$$C_0(X) \rightarrow C_1(X), \quad s = \sum_{i=1}^n a_i x_i \mapsto \delta_s := \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}.$$

Si γ est un chemin dans X , on a

$$(\phi \circ \Psi)(\gamma) = \overline{\delta_{\gamma(0)}} + \bar{\gamma} - \overline{\delta_{\gamma(1)}}.$$

On en déduit que si $c = \sum_i^n a_i \gamma_i \in Z_1(X)$, on aura

$$(\phi \circ \psi)(\bar{c}) = \sum_{i=1}^n a_i (\overline{\delta_{\gamma_i(0)}} + \bar{\gamma}_i - \overline{\delta_{\gamma_i(1)}}) = \bar{c} + \overline{\delta_{d_1(c)}} = \bar{c}. \quad \blacksquare$$

Exemples 1. On a $H_1(\mathbb{B}^n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On a $H_1(\mathbb{S}^n) = 0$ pour $n \neq 1$ et $H_1(\mathbb{S}) \simeq \mathbb{Z}$.

3. On a $H_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geq 2$ et $H_1(\mathbb{P}) \simeq \mathbb{Z}$.

4. On a $H_1(\mathbb{T}^n) \simeq \mathbb{Z}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. On a $H_1(\mathbb{S} \vee \mathbb{S}) \simeq \mathbb{Z}^2$.

Remarques 1. On a toujours $H_1(X \times Y) \simeq H_1(X) \oplus H_1(Y)$.

2. Si X est simplement connexe, alors $H_1(X) = 0$.

3. Si G est un groupe topologique connexe par arcs, alors $H_1(G) = \pi_1(G, 1)$. En particulier, G est simplement connexe si et seulement si $H_1(G) = 0$.

4. Soient X un espace topologique et $X_1, X_2 \subset X$ tels que $X = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2$. Si $X, X_1, X_1 \cap X_2$ sont connexe par arcs, on a une suite exacte

$$H_1(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \rightarrow H_1(X) \rightarrow 0.$$

On généralisera ça dans le théorème 4.4.7.

5. Soient, pour $i = 1, 2$, (X_i, x_i) un espace pointé connexe par arcs tel que x_i soit un rétract par déformation d'un ouvert de X_i . Alors,

$$H_1(X_1 \vee X_2) \simeq H_1(X_1) \oplus H_1(X_2)$$

On généralisera ça dans l'exercice 4.11

6. Si un groupe G agit de manière proprement discontinue sur un espace topologique X connexe par arcs, on a une suite exacte (à droite)

$$H_1(X) \rightarrow H_1(X/G) \rightarrow G^{\text{ab}} \rightarrow 0.$$

7. Si $1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 1$ est une suite exacte courte stricte de groupes topologiques avec G' discret et G connexe par arcs, on a une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow H_1(G) \rightarrow H_1(G'') \rightarrow H_0(G') \rightarrow 0.$$

Et même une suite exacte longue

$$H_1(G') \rightarrow H_1(G) \rightarrow H_1(G'') \rightarrow H_0(G') \rightarrow H_0(G) \rightarrow H_0(G'') \rightarrow 0.$$

4.4 Homologie singulière (suite)

Avant de construire la suite de Mayer-Vietoris, on va d'abord montrer que l'homotopie topologique entraîne l'homotopie algébrique. Nous aurons besoin du résultat technique suivant sur les prismes :

Lemme 4.4.1 On pose pour $0 \leq i \leq n$, $v_i = (e_i, 0)$, $w_i := (e_i, 1) \in |\Delta^n| \times [0, 1]$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] \in C_{n+1}(|\Delta^n| \times [0, 1])$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d_{n+1}(p_n) + \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} (\delta_j^n \times \text{Id}_{[0,1]})_*(p_{n-1}) = [w_0, \dots, w_n] - [v_0, \dots, v_n].$$

Démonstration. On a d'une part

$$\begin{aligned} d_{n+1}(p_n) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i d_{n+1}([v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j d_{n+1}^j([v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]) \\ &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] \\ &\quad - \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w_j}, \dots, w_n]. \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} (\delta_j^n \times \text{Id}_{[0,1]})_*(p_{n-1}) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} (\delta_j^n \times \text{Id}_{[0,1]})_* \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_{n-1}] \right) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+j+1} (\delta_j^n \times \text{Id}_{[0,1]}) \circ [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_{n-1}] \\ &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq n-1} (-1)^{i+j+1} [v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_{i+1}, w_{i+1}, \dots, w_n] \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j+1} [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w_j}, \dots, w_n] \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] \\ &\quad - \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w_j}, \dots, w_n] \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} &d_{n+1}(p_n) + \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} (\delta_j^n \times \text{Id}_{[0,1]})_*(p_{n-1}) \\ &= \sum_{i=0}^n ([v_0, \dots, \widehat{v_i}, w_i, \dots, w_n] - [v_0, \dots, v_i, \widehat{w_i}, \dots, w_n]) \\ &= [w_0, \dots, w_n] - [v_0, \dots, v_n]. \end{aligned}$$

■

Théoreme 4.4.2 Si $f \sim g : X \rightarrow Y$, alors $f_* \sim g_* : C(X) \rightarrow C(Y)$.

Démonstration. Soit $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ une homotopie entre f et g . Si $\sigma \in S_n(X)$, on considère l'application composée

$$h_\sigma : |\Delta^n| \times [0, 1] \xrightarrow{\sigma \times \text{Id}_{[0,1]}} X \times [0, 1] \xrightarrow{h} Y.$$

Avec les notations du lemme 4.4.1, il existe un unique morphisme de groupes

$$P_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y), \quad \sigma \mapsto h_{\sigma*}(p_n)$$

et nous allons montrer que ça définit une homotopie entre f_* et g_* . On aura $h_\sigma(v_i) = f(\sigma(e_i))$ et $h_\sigma(w_i) = g(\sigma(e_i))$ si bien que

$$h_{\sigma*}([v_0, \dots, v_n]) = f_*(\sigma) \quad \text{et} \quad h_{\sigma*}([w_0, \dots, w_n]) = g_*(\sigma).$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} P_{n-1}(d_n(\sigma)) &= (h \circ (d_n(\sigma) \times \text{Id}_{[0,1]}))_*(p_{n-1}) \\ &= h_* \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j (d_n^j(\sigma) \times \text{Id}_{[0,1]})_*(p_{n-1}) \right) \\ &= h_* \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j ((\sigma \circ \delta_j^n) \times \text{Id}_{[0,1]})_*(p_{n-1}) \right) \\ &= (h \circ (\sigma \times \text{Id}_{[0,1]}))_* \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j (\delta_j^n \times \text{Id}_{[0,1]})_*(p_{n-1}) \right) \\ &= h_{\sigma*} \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j (\delta_j^n \times \text{Id}_{[0,1]})_*(p_{n-1}) \right). \end{aligned}$$

On déduit alors du lemme 4.4.1 que

$$\begin{aligned} (d_{n+1} \circ P_n - P_{n-1} \circ d_n)(\sigma) &= \\ &= d_{n+1}(h_{\sigma*}(p_n)) - P_{n-1}(d_n(\sigma)) \\ &= h_{\sigma*}(d_{n+1}(p_n)) - h_{\sigma*} \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j (\delta_j^n \times \text{Id}_{[0,1]})_*(p_{n-1}) \right) \\ &= h_{\sigma*} \left(d_{n+1}(p_n) + \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} (\delta_j^n \times \text{Id}_{[0,1]})_*(p_{n-1}) \right) \\ &= h_{\sigma*}([w_0, \dots, w_n] - [v_0, \dots, v_n]) \\ &= (g_{n*} - f_{n*})(\sigma). \end{aligned}$$

■

Corollaire 4.4.3 1. Si $f \sim g : X \rightarrow Y$, alors

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Si $X \sim Y$, alors $C(X) \sim C(Y)$ et $H_n(X) \simeq H_n(Y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Un espace contractile est acyclique. ■

Remarques 1. Si $f \sim g$, on a aussi $f_* \sim g_* : \tilde{C}(X) \rightarrow \tilde{C}(Y)$ et $\tilde{H}_n(f) = \tilde{H}_n(g)$.
 2. De même, si $X \sim Y$, alors $\tilde{C}(X) \sim \tilde{C}(Y)$ et $\tilde{H}_n(X) \simeq \tilde{H}_n(Y)$.

Pour la suite, nous aurons besoin de la notion de *subdivision barycentrique*. Si $s \in \mathcal{S}_{n+1}$ est une permutation, alors le n -simplexe singulier Bar_s de Δ_n est défini par

$$\text{Bar}_s(e_k) = \text{Bar}(s(0), \dots, s(k))$$

(barycentre). On pourra faire un dessin pour $n = 2$.

Lemme 4.4.4 Si X est un espace topologique, alors l'application

$$\text{Sub}_n : C_n(X) \rightarrow C_n(X), \quad \sigma \mapsto \sum_{s \in \mathcal{S}_{n+1}} (-1)^s (\text{Bar}_s \circ \sigma)$$

définit un endomorphisme du complexe de chaînes $C(X)$ et $\text{Id}_{C(X)} \sim \text{Sub}$.

Démonstration. On vérifie aisément que c'est bien un endomorphisme de $C(X)$. On construit ensuite par récurrence sur n , pour tout espace topologique X , des morphismes $h_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ tels que $d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = \text{Id} - \text{Sub}_n$ en partant de $h_0 = 0$. On aura alors

$$d_{n+1} \circ (h_n \circ d_{n+1} - \text{Id} + \text{Sub}_{n+1}) = (h_n \circ d_{n+1} + h_{n-1} \circ d_n - \text{Id} + \text{Sub}_n) \circ d_{n+1} = 0.$$

En appliquant ça à la $n+1$ -chaîne $[e_0, \dots, e_{n+1}]$ de Δ^{n+1} , on aura

$$d_{n+1}((h_n \circ d_{n+1} - \text{Id} + \text{Sub}_{n+1})([e_0, \dots, e_{n+1}])) = 0.$$

Puisque Δ^{n+1} est contractile, il est acyclique, et il existe donc $c_{n+2} \in C_{n+2}(\Delta^{n+1})$ tel que

$$(h_n \circ d_{n+1} - \text{Id} + \text{Sub}_{n+1})([e_0, \dots, e_{n+1}]) = d_{n+2}(c_{n+2}).$$

Il suffit alors de poser $h_{n+1}(\sigma) = \sigma_*(c_{n+2})$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}(X)$ et de vérifier que

$$d_{n+2} \circ h_{n+1} + h_n \circ d_{n+1} = \text{Id} - \text{Sub}_{n+1}. \quad \blacksquare$$

Définition 4.4.5 Si $X = \bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{X}_i$, alors $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i \in I}$ est un *recouvrement* de X .

On pose alors $S_n(\mathcal{X}) = \bigcup_{i \in I} S_n(X_i) \subset S_n(X)$ et $C(\mathcal{X}) := C(S(\mathcal{X}))$.

Théoreme 4.4.6 — des petites chaînes. Si \mathcal{X} est un recouvrement de X , alors l'inclusion est un quasi-isomorphisme $C(\mathcal{X}) \simeq C(X)$.

Démonstration. Il résulte de la compacité de $|\Delta^n|$ que

$$\forall c \in C_n(X), \exists r \in \mathbb{N}, \quad \text{Sub}_n^r(c) \in C_n(\mathcal{X}).$$

En particulier, si $c \in Z_n(X)$, alors il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $c' := \text{Sub}_n^r(c) \in C_n(\mathcal{X})$. On a alors $c' \in Z_n(\mathcal{X})$ et aussi $c \equiv c' \pmod{B_n(X)}$ grâce au lemme 4.4.4. Cela implique que $H_n(\mathcal{X}) \rightarrow H_n(X)$ est surjective. De même si $c \in Z_n(\mathcal{X})$ et $c \equiv 0 \pmod{B_n(X)}$, alors il existe $c' \in C_n(X)$ tel que $c = d_{n+1}(c')$. Il existe alors $r \in \mathbb{N}$ tel que $c'' := \text{Sub}_{n+1}^r(c') \in C_{n+1}(\mathcal{X})$ et on a

$$d_{n+1}(c'') = d_{n+1}(\text{Sub}_{n+1}^r(c')) = \text{Sub}_{n+1}^r(d_{n+1}(c')) = \text{Sub}_n^r(c) \equiv c \pmod{B_n(\mathcal{X})}.$$

Cela montre que $H_n(\mathcal{X}) \rightarrow H_n(X)$ est injective. ■

On construit maintenant la *suite de Mayer-Vietoris* :

Théorème 4.4.7 Soit X un espace topologique et $X_1, X_2 \subset X$ tels que $X = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2$. On a alors une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow H_n(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \cdots$$

Démonstration. On a

$$S_n(X_1 \cap X_2) = S_n(X_1) \cap S_n(X_2) \quad \text{et} \quad S_n(\{X_1, X_2\}) = S_n(X_1) \cup S_n(X_2).$$

On en déduit une suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow C(X_1 \cap X_2) \rightarrow C(X_1) \oplus C(X_2) \rightarrow C(\{X_1, X_2\}) \rightarrow 0.$$

On applique le théorème du serpent 4.1.11 et le théorème des petites chaînes 4.4.6. ■

- Remarques**
1. le théorème des petites chaînes est aussi valide pour les complexes augmentés : $\tilde{C}(\mathcal{X}) \simeq \tilde{C}(X)$.
 2. De même, la suite de Mayer-Vietoris est toujours valide pour \tilde{H} .

Corollaire 4.4.8 Si $n, k \geq 0$, alors $\tilde{H}_k(\mathbb{S}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{S}^n$ et $X_{\pm} := \mathbb{S}^n \setminus \{\pm a\}$. On a $X_{\pm} \simeq \mathbb{R}^n$ et $X_+ \cap X_- \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim \mathbb{S}^{n-1}$. Par récurrence, la suite de Mayer-Vietoris nous fournit un isomorphisme

$$\tilde{H}_k(\mathbb{S}^n) \simeq \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

et tout le reste est nul. ■

- Remarques**
1. On voit en particulier que \mathbb{S}^n n'est pas acyclique et donc pas contractile.
 2. On voit aussi que, pour $n \neq m$, $\mathbb{S}^n \not\simeq \mathbb{S}^m$.
 3. On obtient ainsi une nouvelle démonstration du théorème 2.2.13 : puisque \mathbb{S} est un groupe topologique, on a $\pi_1(\mathbb{S}, 1) = H_1(\mathbb{S}) = \mathbb{Z}$.

Enfin, on répond à la question de Cantor :

Théoreme 4.4.9 — Brouwer. Soient $m, n \in \mathbb{R}$. Alors \mathbb{R}^n est homéomorphe à \mathbb{R}^m si et seulement si $n = m$.

Démonstration. Sinon, on aurait un homéomorphisme entre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^m \setminus \{c\}$ qui ont respectivement même type d'homotopie que \mathbb{S}^n et \mathbb{S}^m . Contradiction. ■

4.5 Exercices

4.5.1 Algèbre linéaire

- Exercice 4.1** 1. Soit $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$ une suite exacte courte de groupes abéliens. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
- (a) il existe une *section* (un morphisme $s : M'' \rightarrow M$ telle que $p \circ s = \text{Id}_{M''}$),
 - (b) il existe une *rétraction* (un morphisme $r : M \rightarrow M'$ telle que $r \circ i = \text{Id}_{M'}$),
- et qu'alors $\text{Id}_M = i \circ r + s \circ p$.
2. On dit alors que la suite est *scindée*. Montrer que, dans ce cas, $M \simeq M' \oplus M''$.
3. Montrer que si M'' est libre alors la suite est toujours scindée.
4. Montrer que si M' est un \mathbb{Q} -espace vectoriel, alors la suite est toujours scindée.
5. Montrer que la suite $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$ est une suite exacte courte qui n'est pas scindée.

Solution. 1. Supposons pour commencer qu'il existe une section s . Alors, si $x \in M$, on a $p(x - s(p(x))) = 0$ et il existe donc un unique $x' \in M'$ tel que $i(r(x)) = x - s(p(x))$ et on pose $r(x) = x'$. On peut remarquer d'ores et déjà que $\text{Id}_M = i \circ r + s \circ p$. Montrons que r est un morphisme de groupes. Si $y \in M$, on aura

$$\begin{aligned} i(r(x) + r(y)) &= i(r(x)) + i(r(y)) = x - s(p(x)) + y - s(p(y)) \\ &= x + y - s(p(x + y)) = i(r(x + y)). \end{aligned}$$

Puisque i est injective, cela montre que $r(x + y) = r(x) + r(y)$. De plus, si $x' \in M'$, on a $p(i(x')) = 0$ et donc $i(x') - s(p(i(x')))) = i(x')$ si bien que $r(i(x')) = x'$ et r est bien une rétraction.

Supposons maintenant qu'il existe une rétraction r . Si $x \in M''$, alors il existe $x \in M$ tel que $p(x) = x''$. On pose alors $s(x'') = x - i(r(x))$. Il faut montrer que ça ne dépend pas du choix de x . Mais si $p(y) = x''$, alors $p((y - ir(y)) - (x - ir(x))) = 0$. Il existe donc $z' \in M'$ tel que $(y - ir(y)) - (x - ir(x)) = i(z')$. On aura alors $z' = r(i(z')) = r(y - ir(y)) - r(x - ir(x)) = 0$ si bien que $y - ir(y) = x - ir(x)$. Il faut ensuite montrer que c'est un morphisme de groupes. On se donne donc $x, y \in M$ tels que $p(x) = x''$ et $p(y) = y''$. On aura alors $p(x + y) = x'' + y''$ et

$$s(x'') + s(y'') = x - i(r(x)) + y - i(r(y)) = (x + y) - i(r(x + y)) = s(x'' + y'').$$

Enfin, si $p(x) = x'' \in M''$, on aura bien $p(s(x'')) = p(x - i(r(x))) = p(x) = x''$ et s est bien une section.

2. On en déduit des isomorphismes réciproques $M \rightarrow M' \oplus M'', x \mapsto (r(x), p(x))$ et $M' \oplus M'' \rightarrow M, (x', x'') \mapsto i(x') + s(x'')$. Vérifier.
3. Si $B = (e_i)_{i \in I}$ est une base de M'' , il suffit de poser $s(e_i) = x_i$ avec $p(x_i) = e_i$.
4. On a alors $M' = M'_\mathbb{Q}$ et l'application linéaire injective $i_\mathbb{Q} : M'_\mathbb{Q} \hookrightarrow M_\mathbb{Q}$ possède une rétraction linéaire f que l'on peut composer avec le morphisme $M \rightarrow M_\mathbb{Q}$.
5. L'unique morphisme $s : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ est le morphisme nul. ■

Exercice 4.2 Calculer dans chaque cas l'homologie du complexe et vérifier le théorème du rang :

1. $\mathbb{Z}e \xrightarrow{0} \mathbb{Z}v$ (concentré en degrés 0 et 1),
2. $\mathbb{Z}\sigma \oplus \mathbb{Z}\tau \xrightarrow{d} \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c \xrightarrow{0} \mathbb{Z}v$ avec $d(\sigma) = d(\tau) = a - c + b$ (concentré en degrés 0 et 1 et 2).

Solution. 1. On a $H_0 \simeq H_1 \simeq \mathbb{Z}$ et $H_n = 0$ sinon. On a bien $1 - 1 = 0 = 1 - 1$.
 2. On a $H_0 \simeq H_2 \simeq \mathbb{Z}$, $H_1 \simeq \mathbb{Z}^2$ et 0 sinon. Pour le H_1 , on pourra remarquer que B_1 est facteur direct (avec section $a \mapsto a - c + b, b \mapsto 0, c \mapsto 0$ par exemple). On a bien $1 - 3 + 2 = 0 = 1 - 2 + 1$. ■

Exercice 4.3 1. Montrer que si $f \sim g : C \rightarrow C'$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(f) = H_n(g)$.
 2. En déduire que si $f : C \sim C'$ est une équivalence d'homotopie, alors f est un quasi-isomorphisme.

Solution. 1. Il suffit de remarquer que si $c \in Z_n(C)$, alors

$$g_n(c) - f_n(c) = (d_{n+1} \circ h_n)(c) - (h_{n-1} \circ d_n)(c) = d_{n+1}(h_n(c)) \in B_n(C').$$

2. Cela résulte de la fonctorialité de l'homologie. ■

Exercice 4.4 Montrer le *lemme du serpent* : Si

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{j} & N & \xrightarrow{q} & N'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

est un diagramme commutatif à lignes exactes, alors il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow \ker f' \rightarrow \ker f \rightarrow \ker f'' \rightarrow \operatorname{coker} f' \rightarrow \operatorname{coker} f \rightarrow \operatorname{coker} f'' \rightarrow 0.$$

Solution. Il suffit de considérer le complexe

$$C := \dots \rightarrow 0 \rightarrow M \xrightarrow{d_1} N \rightarrow 0 \dots$$

avec $d_1 = f$ et les complexes analogues C' et C'' . On a alors $H_0(C) = \operatorname{coker} f$, $H_1(C) = \ker f$ et $H_n(C) = 0$ sinon. De même pour C' et C'' . On applique alors le théorème du serpent. On peut aussi le refaire à la main, ce qui est un très bon exercice. ■

Exercice 4.5 Montrer que si

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{p} & C'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & D' & \xrightarrow{j} & D & \xrightarrow{q} & D'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

est un *morphisme de suites exactes courtes de complexes*, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_n(C) & \longrightarrow & H_n(C'') & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(C') & \longrightarrow & H_{n-1}(C) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_n(D) & \longrightarrow & H_n(D'') & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(D') & \longrightarrow & H_{n-1}(D) & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

est commutatif.

Solution. Les carrés extérieurs sont commutatifs par fonctorialité et il reste à traiter celui du milieu. On rappelle que, pour $c'' \in Z_n(C'')$,

$$\begin{aligned}
 \delta_n(\bar{c}'') = \bar{c}' &\Leftrightarrow \exists c \in C_n, c'' = p_n(c) \text{ et } d_n(c) = i_{n-1}(c') \\
 &\Leftrightarrow \forall c \in C_n, c'' = p_n(c) \text{ et } d_n(c) = i_{n-1}(c'),
 \end{aligned}$$

et on a

$$H_{n-1}(f'_{n-1})(\delta_n(\bar{c}'')) = \overline{f'_{n-1}(c')}.$$

Mais on aura aussi

$$f''_n(c'') = f''_n(p_n(c)) = q_n(f_n(c))$$

et

$$d_n(f_n(c)) = f_{n-1}(d_n(c)) = f_{n-1}(i_{n-1}(c')) = j_{n-1}(f'_{n-1}(c')).$$

Cela montre qu'on a

$$\delta_n(H_{n-1}(f'_{n-1})(\bar{c}'')) = \delta_n(\overline{f'_{n-1}(c'')}) = \overline{f'_{n-1}(c')}. \quad \blacksquare$$

4.5.2 Ensemble semi-simplicial

- Exercice 4.6** 1. Représenter $|\Delta^n|$ pour $n = 0, 1, 2, 3$.
 2. Quel est le nombre de faces de dimensions k dans $|\Delta^n|$?
 3. Montrer que $|\Delta^n| \simeq \mathbb{B}^n$ et que $\partial|\Delta^n| \simeq \mathbb{S}^{n-1}$.

Solution. 1. On trouve respectivement un point, un segment, un triangle (plein), un tétraèdre (plein).
 2. On a $\binom{n+1}{k+1}$ faces de dimensions k dans $|\Delta^n|$.
 3. On peut utiliser l'exercice 1.3 puisque $|\Delta^n|$ est un convexe compact de dimension n . ■

- Exercice 4.7** 1. Montrer qu'il existe une unique structure d'ensemble semi-simplicial telle que $S_0 = \{v\}$, $S_1 = \{e\}$ et $S_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$. Calculer $H_n(S)$. Vérifier la formule d'Euler-Poincaré.
 2. On pose $S_0 = \{v\}$, $S_1 = \{a, b, c\}$, $S_2 = \{\sigma, \tau\}$ et

$$d_0^2(\sigma) = b, d_1^2(\sigma) = c, d_2^2(\sigma) = a \quad \text{et} \quad d_0^2(\tau) = a, d_1^2(\tau) = c, d_2^2(\tau) = b.$$

Calculer $H_n(S)$. Vérifier la formule d'Euler-Poincaré.

Solution. 1. Il existe une unique application $d_0 = d_1 : S_1 \rightarrow S_0, e \mapsto v$ et seulement l'application $\partial : S_n \rightarrow S_{n-1}$ pour $n \geq 2$. On a donc $d = d_0 - d_1 = 0$ et donc

$$C(S) : [\mathbb{Z}e \xrightarrow{0} \mathbb{Z}v].$$

On a donc $H_0(S) \simeq H_1(S) \simeq \mathbb{Z}$ et $H_n(S) = 0$ sinon. La formule d'Euler-Poincaré, c'est le théorème du rang.

2. On a

$$C(S) : [\mathbb{Z}\sigma \oplus \mathbb{Z}\tau \xrightarrow{d} \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c \xrightarrow{0} \mathbb{Z}v]$$

avec $d(\sigma) = d(\tau) = a - c + b$. On a donc $H_0(S) \simeq H_2(S) \simeq \mathbb{Z}$ et $H_1(S) \simeq \mathbb{Z}^2$ (et 0 sinon). La formule d'Euler-Poincaré, c'est le théorème du rang. ■

4.5.3 Homologie singulière

■ **Exercice 4.8** Montrer (par un calcul) qu'un point est acyclique.

Solution. Il s'agit de montrer que $\tilde{H}^n(x) = 0$ pour tout $n > 0$. On a $d_i^n = \text{Id}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ et, pour $n > 0$,

$$d_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{Id}_{\mathbb{Z}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \text{Id}_{\mathbb{Z}} & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

On doit donc calculer l'homologie du complexe

$$\dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}.$$

Et on trouve \mathbb{Z}/\mathbb{Z} ou $0/0$ selon les cas, c'est-à-dire 0. ■

■ **Exercice 4.9** Soient X un espace topologique et $f, f' \in S_1(X)$ avec $d_0^1(f) = d_0^1(f') = y$ et $d_1^1(f) = d_1^1(f') = x$. On dit que $\sigma \in S_2(X)$ est une *homotopie* entre f et f' si $d_0^2(\sigma) = y$, $d_1^2(\sigma) = f'$ et $d_2^2(\sigma) = f$:

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ f \nearrow & \Downarrow \sigma & \searrow y \\ x & \xrightarrow{f'} & y. \end{array}$$

On considère les applications

$$\pi_1 : [0, 1] \rightarrow \Delta_1, t \mapsto (1-t, t), \quad \pi_2 : [0, 1]^2 \rightarrow \Delta_2, (t, s) \mapsto (1-t, (1-s)t, ts).$$

Montrer que σ est une homotopie entre f et f' si et seulement si $h := \sigma \circ \pi_2$ est une homotopie à extrémités fixées entre $\gamma := f \circ \pi_1$ et $\gamma' := f' \circ \pi_1$.

Solution. Les conditions pour que σ soit une homotopie s'écrivent

$$\sigma(0, t_0, t_1) = y, \quad \sigma(t_0, 0, t_1) = f'(t_0, t_1), \quad \sigma(t_0, t_1, 0) = f(t_0, t_1)$$

lorsque $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ satisfont $t_0 + t_1 = 1$. D'autre part, les conditions pour que h soit une homotopie à extrémité fixées sont

$$h(t, 0) = \gamma(t), \quad h(t, 1) = \gamma'(t), \quad h(0, s) = x \quad \text{et} \quad h(1, s) = y.$$

On a

$$\pi_2(t, 0) = (1 - t, t, 0), \quad \pi_2(t, 1) = (1 - t, 0, t)$$

$$\pi_2(0, s) = (1, 0, 0) \quad \text{et} \quad \pi_2(1, s) = (0, 1 - s, s).$$

Les conditions sur h s'écrivent donc

$$\sigma(1 - t, t, 0) = f(1 - t, t), \quad \sigma(1 - t, 0, t) = f'(1 - t, t),$$

$$\sigma(1, 0, 0) = x \quad \text{et} \quad \sigma(0, 1 - s, s) = y$$

pour $t \in [0, 1]$. C'est bien la même chose que ci-dessus. ■

Exercice 4.10 Soit $X = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

1. Calculer $H_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On pose $Y = X \setminus \{\pm i\}$. Calculer $H_n(Y)$ pour tout $n \leq 1$.
3. On pose $Z = X \setminus \{\pm i, \pm 2i\}$. Calculer $H_n(Z)$ pour tout $n \leq 1$.

Solution. 1. Puisque X a deux composantes connexes par arcs X_{\pm} (partie imaginaire > 0 ou < 0), on a

$$H_0(X) \simeq H_0(X_+) \oplus H_0(X_-) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2.$$

Puisque X_{\pm} est contractile, on a pour $n \geq 0$,

$$H_n(X) \simeq H_n(X_+) \oplus H_n(X_-) = 0 \oplus 0 = 0.$$

2. On regarde maintenant $Y_+ := X_+ \cap Y$. C'est encore un espace connexe par arcs et on a (pour un y quelconque) $\pi_1(Y_+, y) \simeq \mathbb{Z}$ qui est abélien. On aura donc

$$H_1(Y_+) \simeq \pi_1(Y_+, y)^{\text{ab}} \simeq \mathbb{Z}.$$

Donc, finalement $H_0(Y) \simeq H_1(Y) \simeq \mathbb{Z}^2$.

3. On traite le dernier cas de la même manière en posant $Z_+ = X_+ \cap Z$. On sait que (pour z quelconque) $\pi_1(Z_+, z) \simeq \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ et donc $\pi_1(Z_+, z)^{\text{ab}} \simeq \mathbb{Z}^2$. On aura donc $H_0(Z) \simeq \mathbb{Z}^2$ et $H_1(Z) \simeq \mathbb{Z}^4$. ■

4.5.4 Homologie singulière (suite)

Exercice 4.11 1. Montrer que si, pour $i = 1, 2$, (X_i, x_i) est un espace pointé tel que x_i est un rétract par déformation d'un ouvert de X_i , alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{H}_n(X_1 \vee X_2) \simeq \tilde{H}_n(X_1) \oplus \tilde{H}_n(X_2).$$

2. En déduire $H_n(\mathbb{S} \vee \mathbb{S})$.

Solution. 1. On choisit un ouvert U_i de X_i qui se rétracte sur x_i et on applique la suite de Mayer-Vietoris à $\{X_1 \cup U_2, U_1 \cup X_2\}$.
 2. On aura donc $H_0 \simeq \mathbb{Z}$, $H_1 \simeq \mathbb{Z}^2$ et $H_0 = 0$ sinon. ■

Exercice 4.12 1. Calculer $H_n(\mathbb{S} \setminus \{1\} \times \mathbb{S})$, $H_n(\mathbb{S} \setminus \{-1\} \times \mathbb{S})$ et $H_n(\mathbb{S} \setminus \{1, -1\} \times \mathbb{S})$.
 2. En déduire $H_n(\mathbb{T}^2)$.

Solution. 1. On a $\mathbb{S} \setminus \{1\} \times \mathbb{S} \sim \mathbb{S}$ si bien que $H_n(\mathbb{S} \setminus \{1\} \times \mathbb{S}) \simeq \mathbb{Z}$ lorsque $n = 0$ ou $n = 1$ et est réduit à 0 sinon. Même chose pour $H_n(\mathbb{S} \setminus \{-1\} \times \mathbb{S})$. Enfin, puisque $\mathbb{S} \setminus \{1, -1\} \sim \{i, -i\}$, le même argument donne $H_n(\mathbb{S} \setminus \{1, -1\} \times \mathbb{S}) \simeq \mathbb{Z}^2$ pour $n = 0, 1$ et 0 sinon.
 2. On sait déjà que $H_0(X) = \mathbb{Z}$ puisque X est connexe par arcs et que $H_1(X) \simeq \pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}^2$. La suite de Mayer-Vietoris s'écrit donc

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Puisque $H_2(\mathbb{T}^2)$ est un sous-groupe d'un groupe abélien libre, c'est aussi un groupe abélien libre. Il résulte alors du théorème du rang que $H_2(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}$. Bien sûr, $H_n(\mathbb{T}^2) = 0$ pour $n \geq 3$. ■

Exercice 4.13 Calculer $H_k(\mathbb{P}^n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n \leq 3$. On admettra (ou on montrera) que $\mathbb{P}^n = X_1 \cup X_2$ avec X_1, X_2 ouverts dans \mathbb{P}^n , $X_1 \simeq \mathring{\mathbb{B}}^n$, $X_2 \simeq \mathbb{P}^n \setminus \{0\}$ et que l'inclusion $X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2$ s'identifie à homotopie près avec la projection $\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$.

Solution. Puisque \mathbb{P}^n est connexe par arcs, on aura toujours $H_0(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}$. Puisque \mathbb{P}^0 est un point, on a $H_k(\mathbb{P}^0) = 0$ pour $k > 0$. Puisque \mathbb{P} est un cercle, on a $H_1(\mathbb{P}) \simeq \mathbb{Z}$ et $H_k(\mathbb{P}) = 0$ pour $k \neq 0, 1$. On peut donc dorénavant supposer que $n \geq 2$ et on peut déjà remarquer que $H_1(\mathbb{P}^2) = \pi_1(\mathbb{P}^2, x)^{\text{ab}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On dispose en général de la suite de Mayer-Vietoris

$$\cdots \rightarrow H_k(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_k(\mathring{\mathbb{B}}^n) \oplus H_k(\mathbb{P}^{n-1}) \rightarrow H_k(\mathbb{P}^n) \rightarrow H_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \cdots$$

Dans le cas $n = 2$, on aura alors une suite exacte

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{P}^2) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

qui implique que $H_2(\mathbb{P}^2) \simeq 0$ (groupe abélien libre de rang 0) ainsi que des égalités $H_k(\mathbb{P}^2) = 0$ pour $k \geq 3$. Pour $n \geq 2$, on aura une suite exacte longue

$$0 \rightarrow H_n(\mathbb{P}^{n-1}) \rightarrow H_n(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{P}^n) \rightarrow 0$$

et, pour $k \neq 0, n-1, n$, des isomorphismes $H_k(\mathbb{P}^{n-1}) \simeq H_k(\mathbb{P}^n)$. On en déduit alors que $H_k(\mathbb{P}^3) = 0$ pour $k \geq 4$, $H_3(\mathbb{P}^3) = \mathbb{Z}$, $H_2(\mathbb{P}^3) = 0$, $H_1(\mathbb{P}^3) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $H_0(\mathbb{P}^3) \simeq \mathbb{Z}$.

Pour traiter le cas $n \geq 4$, il faudrait étudier l'application $H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{P}^n)$ (l'identifier à $\mathbb{Z} \rightarrow 0$ si n pair et $\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$ si n impair). ■

Exercice 4.14 Montrer que pour deux espaces vectoriels normés de dimension finie, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. être isomorphes,
2. être homéomorphes,
3. avoir même type d'homotopie,
4. avoir même dimension.

Bibliographie

- [Bre93] Glen E. BREDON. *Topology and geometry*. English. Tome 139. New York : Springer-Verlag, 1993.
- [EZ50] Samuel EILENBERG et J. A. ZILBER. “Semi-simplicial complexes and singular homology”. English. In : *Ann. Math. (2)* 51 (1950), pages 499-513.
- [Hat02] Allen HATCHER. *Algebraic topology*. English. Cambridge : Cambridge University Press, 2002.
- [Lur18] Jacob LURIE. *Kerodon*. <https://kerodon.net>. 2018.
- [Mun00] James R. MUNKRES. *Topology*. English. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2000.
- [Spa66] Edwin H. SPANIER. *Algebraic topology*. English. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. New York etc. : McGraw-Hill Book Company. XIV, 528 p. (1966). 1966.
- [Sta19] The STACKS PROJECT AUTHORS. *The Stacks project*. <https://stacks.math.columbia.edu>. 2019.
- [Zis72] Michel ZISMAN. *Topologie algébrique élémentaire*. Armand Colin, 1972.