FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES
(Outils Mathématiques 4)

Bernard Le Stum
Université de Rennes 1

Version du 13 mars 2009

Table des matières

1 Fonctions partielles, courbes de niveau

Exemple 1.1 *i) Volume d'un cylindre.*

[DESSIN]

Une fois fixées des unités (mètre et mètre cube par exemple), lorsque le rayon r *et la longueur* h *d'un cylindre varient dans* $\mathbf{R}_{>0}$*, le volume* $V = \pi r^2 h$ *du cylindre varie dans* $\mathbf{R}_{>0}$*. On dit* V *est* fonction *des deux variables* r *et* h*. On dispose donc d'une fonction réelle*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (r,h) & \longmapsto & V(r,h) = \pi r^2 h \end{array}$$

de deux variables réelles. Cette fonction est définie sur son domaine

$$\mathcal{D} := \{(r,h) \in \mathbf{R}^2, \quad r,h > 0\}$$

et son image *est* $\mathbf{R}_{>0}$*. Choisissons deux valeurs* r_0 *et* h_0*. Si on fixe le rayon* $r = r_0$*, alors on peut considérer la* fonction partielle

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ h & \longmapsto & V(r_0, h) = (\pi r_0^2) \times h \end{array}$$

(qui est linéaire).

[DESSIN]

De même, si on fixe la longueur $h = h_0$*, on peut considérer l'autre* fonction partielle

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ r & \longmapsto & V(r, h_0) = (\pi h_0) \times r^2 \end{array}$$

(qui est cette fois quadratique).

[DESSIN]

Lorsqu'on donne différentes valeurs V_i *à* V*, on obtient ce qu'on appelle les* courbes de niveau *d'équations* $\pi r^2 h = V_i$ *:*

[DESSIN]

Enfin, le graphe de V *est la surface de* $\mathbf{R}^3$ *d'équation* $V = \pi r^2 h$*, c'est à dire l'ensemble des points de la forme* $(r, h, \pi r^2 h)$ *avec* $r, h > 0$*.*

[DESSIN]

ii) Température en un point d'une pièce à un moment donné.

[DESSIN]

Dans une pièce de longueur L*, largeur* l *et hauteur* h*, on peut mesurer pendant une période donnée (disons, une heure) la température en un point donné à un moment donné. Si on fixe des unités (mètre et seconde par exemple), le coin en bas à gauche comme origine de la pièce et le moment de la première mesure comme origine du temps, la température* T *est fonction des coordonnées* x, y, z *du point et du moment* t *ou la température est prise. En d'autres termes,* T *est fonction de* x, y, z, t*. On a définit donc une fonction réelle*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R}^4 & \xrightarrow{T} & \mathbf{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & T(x, y, z, t) \end{array}$$

de quatre variables réelles. Quel est le domaine de définition de cette fonction ?

Définition 1.2 *On rappelle que* $\mathbf{R}^2$ *désigne l'ensemble de* tous *les couples* (x, y) *avec* $x \in \mathbf{R}$ *et* $y \in \mathbf{R}$*. Une* partie *de* $\mathbf{R}^2$ *est* un *ensemble de couples de réels.*

Exemple 1.3 *i) Le quadrant droit du plan.*

[DESSIN]

Il peut être décrit comme

$$Q = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x, y \geq 0\}$$

ou encore comme $Q = \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R}_{>0}$.

ii) Le cercle unité.

[DESSIN]

Il peut être décrit comme

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x^2 + y^2 = 1\}$$

(en compréhension : condition) mais aussi comme l'ensemble

$$C = \{(\cos\theta, \sin\theta), \quad \theta \in \mathbf{R}\}$$

(en extension : paramétrisation).

Définition 1.4 *Une* fonction *réelle de deux variables réelles est une méthode qui associe à certains couples de réels* (x, y)*, un autre réel* $f(x, y)$*. On écrit*

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^2 &\xrightarrow{f} \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Son domaine de définition *est la partie* $\mathcal{D}_f$ *de* $\mathbf{R}^2$ *formée des couples* (x, y) *pour lesquels* $f(x, y)$ *existe. L'*image *(du domaine) de* f *est l'ensemble de toutes les valeurs que* $f(x, y)$ *peut prendre.*

Exemple 1.5 *La fonction* $f(x, y) = \dfrac{xy - 5}{2\sqrt{y - x^2}}$ *est définie lorsque le point de coordonnées* (x, y) *est situé au dessus de la parabole* $y > x^2$*.*

[DESSIN]

On peut montrer que son image est $\mathbf{R}$ *tout entier.*

Définition 1.6 *Étant donne une fonction* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *et un point* (a, b) *de* $\mathbf{R}^2$*, les* fonctions partielles *sont les fonctions d'une variable réelle obtenue en fixant* $y = b$*,*

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto f_x(x, b) = f(x, b) \end{aligned}$$

ou en fixant $x = a$*,*

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ y &\longmapsto f_y(a, y) = f(a, y). \end{aligned}$$

Définition 1.7 (Généralisation) *On désigne par* $\mathbf{R}^n$ *l'ensemble de* tous *les n-uples* $(x_1,\ldots,x_n)$ *avec* $x_1,\ldots,x_n \in \mathbf{R}$. *Alternativement, on verra les éléments de* $\mathbf{R}^n$ *comme des vecteurs* $u = (x_1,\ldots,x_n)$ *ou des points* $P = (x_1,\ldots,x_n)$. *La correspondance étant donnée par* $u = \overrightarrow{OP}$. *Une* partie *de* $\mathbf{R}^n$ *est tout simplement* un *ensemble de n-uples de réels.*

Une fonction *réelle de n variables réelles est une méthode qui associe à certains n-uples* $(x_1,\ldots,x_n)$*, un autre réel* $f(x_1,\ldots,x_n)$. *On écrit*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} \\ (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & f(x_1,\ldots,x_n) \end{array}$$

Son domaine de définition *est la partie* $\mathcal{D}_f$ *de* $\mathbf{R}^n$ *formée des points* P *pour lesquels* $f(P)$ *existe. L'*image *(du domaine) de* f *est l'ensemble de toutes les valeurs que* $f(P)$ *peut prendre.*

Enfin, les fonctions partielles *en un point* $(a_1,\ldots,a_n)$ *sont les fonctions d'une variable réelle obtenue en faisant varier seulement* x_i *:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f_{x_i}(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots a_n) = f(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots a_n) \end{array}$$

Exemple 1.8 *La fonction* $f(x,y) = \dfrac{xye^z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$ *es définie lorsque le point de coordonnées* (x,y,z)*est situé en dehors de la sphère unité* $x^2+y^2+z^2 \leq 1$. *On peut voir que son image est encore* $\mathbf{R}$ *tout entier.*

Définition 1.9 *Le* graphe *d'une fonction* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *est la « surface »* $G(f) \subset \mathbf{R}^3$ *formée de tous les triplets de la forme* $(x,y,f(x,y))$ *avec* $(x,y) \in \mathcal{D}_f$.

Exemple 1.10 *Par exemple, si* $f(x,y) = \dfrac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}$*, alors*

$$G(f) = \{(x,y,\frac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}), \quad y > x^2\}.$$

Définition 1.11 (Généralisation) *Le* graphe *d'une fonction* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *est*

$$G(f) = \{(P, f(P)), \quad P \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbf{R}^{n+1}.$$

Définition 1.12 *Les* courbes de niveau *d'une fonction* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *sont les courbes planes d'étquation* $f(x,y) = k$ *avec* k *fixé.*

Une courbe de niveau d'une fonction f est donc la même chose qu'une courbe de niveau de son graphe $G(f)$.

Exemple 1.13 *La fonction* $f(x,y) = y^2 - x^2$.

[DESSIN]

Définition 1.14 *Les courbes de niveau d'une surface S dans $\mathbf{R}^3$ sont les courbes obtenues en coupant S avec un plan d'équation $z = k$ et en projetant sur le plan xOy.*

[DESSIN]

Proposition 1.15 *Une courbe de niveau d'une fonction f est la même chose qu'une courbe de niveau de son graphe $G(f)$.*

[Démonstration]

Définition 1.16 *Si f est une pression, on dit* courbe isobare. *Si f est une température, on dit* courbe isotherme. *Si f est un potentiel, on dit* courbe equipotentielle *Si f est une altitude, on dit* courbe isoplèthe. *etc.*

2 Limites et continuité

Définition 2.1 *Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction réelle de deux variables réelles, (a, b) un point de $\mathbf{R}^2$ et $l \in \mathbf{R}$. Alors, $f(x, y)$ a pour* limite *l quand (x, y) tend vers (a, b) si pour tout intervalle ouvert I contenant l, il existe un disque ouvert D contenant (a, b) tel que l'image de $D \setminus (a, b)$ par f est contenu dans I.*

[DESSIN]

Autrement dit,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \neq (a, b), \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq \eta \Rightarrow |f(x, y) - l| \leq \epsilon$$

On écrira

$$\lim_{(a,b)} f(x, y) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f = l.$$

Définition 2.2 *Les coordonnées polaires de (x, y) en (a, b) sont données par*

$$\begin{cases} x = a + \rho \cos \theta \\ y = b + \rho \sin \theta \end{cases}$$

avec $\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Proposition 2.3 (Méthode des majorations) *On a $\lim\limits_{(a,b)} f(x, y) = l$ si et seulement si il existe $F : \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R}$ tel que $|f(x, y) - l| \leq F(\rho)$ et $lim_{\rho\to 0} F(\rho) = 0$.*

[Démonstration]

Exemple 2.4 *On a* $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$ *: en effet,*

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{\rho^2}{4}\sin^2 2\theta \leq \frac{\rho^2}{4} \to 0 \quad \text{quand} \quad \rho \to 0.$$

Proposition 2.5 (Méthode des chemins) *S'il existe deux « chemins continus »* $\alpha, \beta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ *tels que* $\alpha(0) = \beta(0) = (a,b)$ *et* $\lim_0(f \circ \alpha) \neq \lim_0(f \circ \beta)$*, alors* f *n'a pas de limite en* (a,b)*.*

[Démonstration]

Exemple 2.6 $\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ *n'a pas de limite en* $(0,0)$ *: il suffit de choisir* $\alpha(t) = (t,0)$ *et* $\beta(t) = (t,t)$*. On trouve d'un coté* 0 *et de l'autre* $\frac{1}{2}$*.*

Définition 2.7 *Une fonction* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *est* continue en $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ *si* $f(a,b) = \lim\limits_{(a,b)} f(x,y)$*. La fonction* f *est* continue *si* f *est continue en tout point de* $\mathcal{D}_f$*.*

Exemple 2.8 *i) La fonction*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue en $(0,0)$*.*

ii) la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$*.*

Proposition 2.9 *Soit* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *une fonction continue (sur son domaine) et* $(a,b) \notin \mathcal{D}_f$*. Alors* $l = \lim\limits_{(a,b)} f(x,y)$ *existe si et seulement si* f *se prolonge par continuité en* (a,b) *et on a alors* $f(a,b) = l$*.*

[Démonstration]

Exemple 2.10 *Soit* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *une fonction réelle de deux variables réelles.*

i) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ *se prolonge par continuité sur* $\mathbf{R}^2$ *en posant* $f(0,0) = 0$*.*

ii) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ *ne peut pas se prolonger par continuité.*

Proposition 2.11 *Si f et g sont continues en (a,b), alors $f+g$, fg et $\dfrac{f}{g}$ aussi (si $g(a,b) \neq 0$ dans le dernier cas).*

[Démonstration]

Corollaire 2.12 *Toute fonction rationnelle est continue (sur son domaine de définition).*

Exemple 2.13 $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ *et* $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ *sont bien continues sur leur domaine.*

Proposition 2.14 *i) Si $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ est continue en t et f est continue en $(a,b) = \alpha(t)$, alors $f \circ \alpha$ est continue en t.*

ii) Si f est continue en (a,b) et $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue en $f(a,b)$, alors $h \circ f$ est continue en (a,b).

[Démonstration]

Exemple 2.15 *On sait que la fonction*

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

se prolonge par continuité sur $\mathbf{R}^2$ en posant $f(0,0) = 0$ et la fonction sin *est continue sur $\mathbf{R}$. Il suit que la fonction*

$$g(x,y) = \sin(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2})$$

« est » continue sur $\mathbf{R}^2$.

Définition 2.16 (Généralisation) *Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction de n variables réelles, $P_0 \in \mathbf{R}^n$ et $l \in \mathbf{R}$. Alors, $f(P)$ a pour* limite *l quand P tend vers P_0 si pour tout intervalle ouvert I contenant l, il existe une boule ouverte B contenant P_0 tel que l'image de $B \setminus P_0$ par f est contenu dans I.*

On écrira

$$\lim_{P_0} f(P) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{P \to P_0} f = l.$$

Si $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, la norme *de u est $\|u\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Si $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $Q = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, la* distance *de P à Q est*

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

On voit alors que $\lim_{P \to P_0} f = l$ *si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall P \neq P_0, d(P_0, P) \leq \eta \Rightarrow |f(x,y) - l| < \epsilon.$$

La fonction f *est* continue *en* P_0 *si* $f(P_0) = l$.

Proposition 2.17 *Ces notions sont stables par somme, produit et quotient.*

Définition 2.18 (Généralisation) *Une* fonction vectorielle $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ *est une méthode qui associe à certains vecteurs (ou points) de* $\mathbf{R}^m$*, un vecteur (ou point) de* $\mathbf{R}^n$*. Si on écrit* $f(P) = (f_1(P), \ldots, f_n(P))$*, on dit que les fonctions vectorielles* $f_1, \ldots, f_n : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ *sont les* composantes *de* f.

Exemple 2.19 *L'application qui à un point du cercle associe son vecteur tangent orienté normalisé est une fonction vectorielle.*

[DESSIN]

C'est tout simplement l'application $(x, y) \mapsto (-y, x)$ *restreinte au cercle unité. Ses composantes sont les fonctions* $(x, y) \mapsto -y$ *et* $(x, y) \mapsto x$.

Définition 2.20 *Une fonction vectorielle est* continue *(en un point) si et seulement si toutes ses composantes sont continues (en ce point).*

Exemple 2.21 $f(x, y) = (xy, (x^2 + y^2)e^{xy}, x \sin(x + y^3))$ *est continue partout.*

Proposition 2.22 f *est continue en* P_0 *si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall P \in \mathcal{D}_f, d(P_0, P) \leq \eta \Rightarrow d(f(P_0), f(P)) < \epsilon.$$

[Démonstration]

Proposition 2.23 (Généralisation) *La continuité est stable par composition.*

3 Différentiabilité

Définition 3.1 *Si* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$*, les* dérivées partielles *de* f *en* $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ *sont les dérivées des fonctions partielles (si elles existent) :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) := f'_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) := f'_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}.$$

Le gradient *de* f *en* (a, b) *est alors le vecteur*

$$\nabla f(a, b) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b))$$

Exemple 3.2 *Si*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a $f_x(x,0) = f(x,0) = 0$ *et donc* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = f'_x(0,0) = 0$. *Symétriquement,* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ *et on a donc* $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Calculons $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$. *On a* $f_x(x,1) = f(x,1) = \frac{x^2}{x^2+1}$ *et donc* $f'_x(x,1) = \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2)}{(x^2+1)^2}$ *si bien que* $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = f'_x(1,1) = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}$.

En général, on écrira aussi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

si bien que $\nabla f = (\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y})$.

Exemple 3.3 *Calculons* ∇f *lorsque*

i)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a déjà vu que $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, *on considère* y *comme constant et on dérive par rapport à* x. *Pour* $(x,y) \neq (0,0)$, *on a donc*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(x^2y^2) - 2xy^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

et par symétrie, on aura donc

$$\nabla f(x,y) = (\frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2x^4y}{(x^2+y^2)^2}).$$

ii)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On voit facilement que

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} (\frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour le second cas, c'est clair et pour le premier cas, il suffit par symétrie de calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(xy) - y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

On voit donc que ∇f *existe tout le temps mais pourtant,* f *n'est* pas *continue en* 0 *!*

Définition 3.4 *Étant donné une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, un point $P := (a,b)$ et un vecteur $v = (\alpha,\beta)$, la* dérivée de direction v *en P de f est la dérivée en P de la fonction directionnelle $t \mapsto f(a+t\alpha, b+t\beta)$:*

$$f'_{(\alpha,\beta)}(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\alpha, b+t\beta) - f(a,b)}{t}.$$

On a en particulier $f'_x = f_{(1,0)}$ et $f'_y = f'_{(0,1)}$.

Exemple 3.5 *La fonction de direction $(1,1)$ en $(0,0)$ associée à*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ et sa dérivée est donc la fonction identique $t \mapsto t$. On voit donc que $f'_{(1,1)}(0,0) = 0$.

Définition 3.6 *Le* produit scalaire *de deux vecteurs de (α,β) et (h,k) de $\mathbf{R}^2$ est*

$$(\alpha,\beta)\cdot(h,k) = \alpha h + \beta k.$$

Définition 3.7 *Une fonction $f := \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est* différentiable *en (a,b) si elle admet des dérivées partielles en (a,b) et qu'en plus,*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

La fonction f est différentiable *si f est différentiable en tout point de $\mathcal{D}_f$.*

Exemple 3.8 *La fonction*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est différentiable en $(0,0)$:

En effet, on a

$$\epsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2y^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2}{|x|} = |x|$$

et bien sûr, $|x| \to 0$ quand $\rho \to 0$ (car $|x| < \rho$).

Rappelons que le *produit scalaire* de deux vecteurs de (α, β) et (h, k) de $\mathbf{R}^2$ est

$$(\alpha, \beta) \cdot (h, k) = \alpha h + \beta k.$$

Si on pose $\Delta P = (x - a, y - b)$ et $\Delta f(P) = f(x, y) - f(a, b)$, la condition de différentiabilité en (x, y) se réécrit :

$$\Delta f(P) = \nabla f(P_0) \cdot \Delta P + o(\Delta P).$$

Théorème 3.9 *Si $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est différentiable en (a, b), alors f est continue en (a, b).*

[Démonstration]

Définition 3.10 *Une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est* de classe $\mathcal{C}^1$ *si ses dérivées partielles existent et sont continues (sur son domaine de définition).*

Exemple 3.11 *Avec*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on calcule pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}(0, 0)\right| = \left|\frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} - 0\right| \leq \left|\frac{2xy^4}{y^4}\right| = 2|x| \to 0.$$

On voit dont que $\frac{\partial}{\partial x}$ est continue et il en va de même de $\frac{\partial}{\partial y}$ par symétrie. Notre fonction est donc de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 3.12 *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est différentiable.*

[Démonstration]

Exemple 3.13 *i) La fonction $f(x, y) = \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2}$ prolongée par 0 à l'origine est continue, possède des dérivées partielles mais n'est pas différentiable (et donc pas de classe $\mathcal{C}^1$). On vérifiera ça plus tard.*

ii) La fonction $f(x, y) = \dfrac{xy^3}{x^4 + y^2}$ prolongée par 0 à l'origine est de classe $\mathcal{C}^1$ (exercice). Elle est donc différenciable et en particulier continue.

Proposition 3.14 *Si $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sont différentiables en (a, b), alors*

$f + g$ est différentiable en (a, b) et on a

$$\begin{cases} \frac{\partial(f+g)}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) \\ \\ \frac{\partial(f+g)}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \end{cases}$$

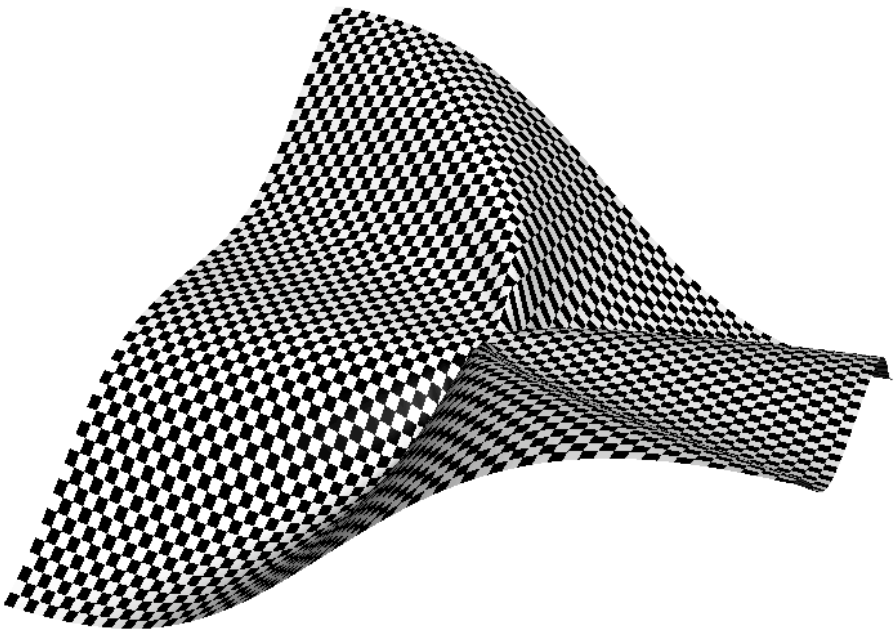

FIGURE 1 – Surface pincée $z = \frac{x^3 y}{x^4+y^2}$

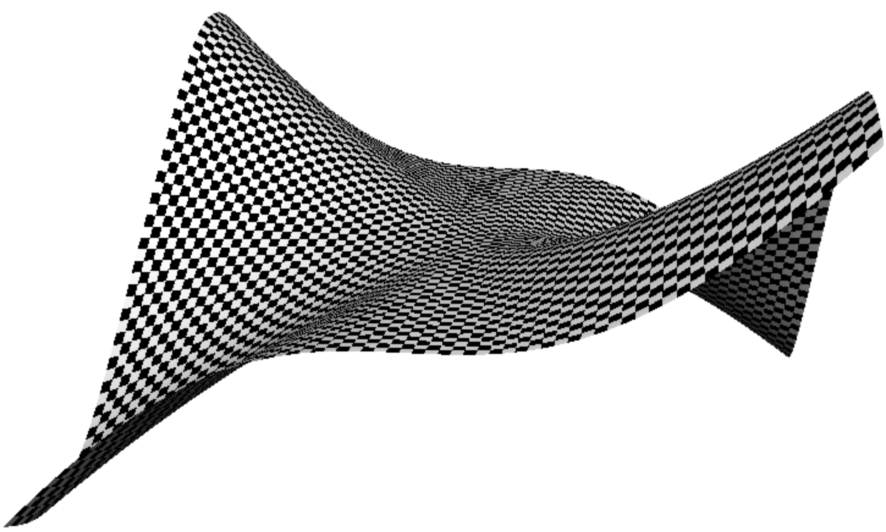

FIGURE 2 – Surface lisse $z = \frac{xy^3}{x^4+y^2}$

ii) *fg est différentiable en (a,b) et*

$$\begin{cases} \frac{\partial(fg)}{\partial x}(a,b) = g(a,b)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + f(a,b)\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) \\ \\ \frac{\partial(fg)}{\partial y}(a,b) = g(a,b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + f(a,b)\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \end{cases}$$

iii) *Si $g(a,b) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est différentiable en (a,b) et*

$$\begin{cases} \frac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial x}(a,b) = \frac{1}{g(a,b)^2}[g(a,b)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - f(a,b)\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)] \\ \\ \frac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial y}(a,b) = \frac{1}{g(a,b)^2}[g(a,b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - f(a,b)\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)] \end{cases}$$

[Démonstration]

Corollaire 3.15 *Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $f+g$, fg et $\dfrac{f}{g}$ aussi.*

Corollaire 3.16 *Une fonction rationnelle est de classe $\mathcal{C}^1$.*

Proposition 3.17 *Supposons que $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est différentiable en $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.*

i) *Si $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dérivable en $f(a,b)$, alors $h \circ f$ est dérivable en (a,b) et*

$$\nabla(h \circ f) = h'(f(a,b))\nabla f(a,b),$$

c'est à dire

$$\frac{\partial(h \circ f)}{\partial x}(a,b) = h'(f(a,b))\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad \text{et} \quad \frac{\partial(h \circ f)}{\partial y}(a,b) = h'(f(a,b))\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

ii) *Si $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ est dérivable en t_0 (ses composantes γ_1 et γ_2 sont dérivables) et $\gamma(t_0) = (a,b)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et*

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(a,b) \cdot (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0)),$$

c'est à dire,

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\gamma_1'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\gamma_2'(t_0))$$

[Démonstration]

Exemple 3.18 *i)* *On sait que la fonction*

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ et que son gradient est nul en 0. Il suit que la fonction

$$g(x,y) = \sin(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2})$$

« est » est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ et que son gradient aussi est nul en 0.

ii) *La fonction* $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$ *prolongée par* 0 *à l'origine n'est pas différentiable : en effet, si on pose* $\alpha(t) = (t,t^2)$*, on a*

$$(f\circ\alpha)(t) = \frac{t^3t^2}{t^4+t^4} = \frac{t}{2}$$

qui est aussi valide pour $t=0$ *si bien que* $(f\circ\alpha)'(t) = \frac{1}{2}$*. Or on a*

$$\nabla f(0,0)\cdot(\alpha_1'(0),\alpha_2'(0)) = (0,0)\cdot(0,0) = 0.$$

Proposition 3.19 *Si* $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ *est différentiable en* (a,b)*, alors toutes les dérivées directionnelles existent en* (a,b) *et on*

$$f'_{(\alpha,\beta)}(a,b) = \nabla f(a,b)\cdot(\alpha,\beta)$$

On résume en $f'_v = \nabla f\cdot v$*. Il suit que* f'_v *est maximal dans la direction de* ∇f *(pour* $\|v\|$ *fixé).*

[Démonstration]

Exemple 3.20 *Avec*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

comme d'habitude, on retrouve bien $f'_{(1,1)}(0,0) = (0,0)\cdot(1,1) = 0$.

Définition 3.21 (Généralisation) *Soit* $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ *une fonction réelle de* n *variables réelles.*

i) *Les* dérivées partielles *de* f *en* $P_0 := (a_1,\dots,a_n)\in\mathbf{R}^n$ *sont les dérivées des fonctions partielles (si elles existent) :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) := f'_{x_i}(P_0)$$

Le gradient *de* f *en* P *est alors le vecteur*

$$\nabla f(P) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0))\in\mathbf{R}^n$$

ii) *Étant donné un vecteur* $v\in\mathbf{R}^n$*, la* dérivée de de direction v *en* P *de* f *est la dérivée en* P *de la fonction directionnelle* $t\mapsto f(P+tv)$

iii) *La fonction* f *est* différentiable *en* P *si elle admet des dérivées partielles en* P *et qu'en plus,*

$$\Delta f(P) = \nabla f(P_0)\cdot\Delta P + o(\Delta P).$$

iv) La fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *est* de classe $\mathcal{C}^1$ *si ses dérivées partielles existent et sont continues.*

Théorème 3.22 (Généralisation) *Si* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$*, alors* f *est différentiable. Et si* f *est différentiable, alors* f *est continue.*

Théorème 3.23 (Généralisation) *Si* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *et* $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *sont différentiables en* P_0*, alors*

i) $f + g$ *est différentiable en* P_0 *et*

$$\nabla(f+g)(P_0) = \nabla f(P_0) + \nabla g(P_0),$$

ii) fg *est différentiable en* P_0 *et*

$$\nabla(fg)(P_0) = g(P_0)\nabla f(P_0) + f(P_0)\nabla g(P_0) \quad \text{et}$$

iii) Si $g(P_0) \neq 0$*, alors* $\frac{f}{g}$ *est différentiable en* (P_0) *et*

$$\nabla(\frac{f}{g})(P_0) = \frac{1}{g(P_0)^2}\left(g(P_0)\nabla f(P_0) - f(P_0)\nabla g(P_0)\right)$$

[Démonstration]

Définition 3.24 (Généralisation) *Une fonction vectorielle de plusieurs variables réelles* $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ *est* différentiable *(en un point* P *de* $\mathbf{R}^m$*) ou* de classe $\mathcal{C}^1$ *si toutes ses composantes* $f_1, \ldots, f_n$ *les sont. La* jacobienne *de* f *en* P *est la matrice*

$$J_f(P) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(P) \\ \vdots \\ \nabla f_n(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1(P) & \ldots & \partial f_1/\partial x_m(P) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1(P) & \ldots & \partial f_n/\partial x_m(P) \end{bmatrix}.$$

Exemple 3.25 *i) Si* $f(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2, xy)$ *et* $P = (2,-1)$*, alors*

$$J_f = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \\ y & x \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J_f(P) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

ii) La fonction $(r,\theta) \mapsto (x,y)$ *avec* $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$ *a pour jacobienne*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ r\sin\theta & -r\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Théorème 3.26 (Généralisation) *Si* $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ *est différentiable en* $P \in \mathbf{R}^m$ *et* $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ *est différentiable en* $f(P)$*, alors* $g \circ f$ *est différentiable en* P *et on a*

$$J_{g\circ f}(P) = J_g(f(P)) \cdot J_f(P).$$

Et de même pour $\mathcal{C}^1$*.*

Corollaire 3.27 *Si $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ et $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ sont $\mathcal{C}^1$, alors $g \circ f$ aussi.*

Exemple 3.28 (Changement de variable) *i) Si u et v dépendent de x et y, on peut voir une fonction f de u et v comme fonction de x et y et (sous réserve d'existence), on aura*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array}\right. .$$

En effet, dire que u et v dépendent de x et y signifie qu'il existe une fonction vectorielle

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (u,v) \end{array}$$

Et dire qu'on voit f comme fonction de x et y signifie qu'on regarde la fonction composée $f \circ \varphi$. On a alors $J_{f\circ\phi}(x,y) = J_f(u,v) \cdot J_\phi(x,y)$. On réécrit ça en

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array}\right]$$

ii) Comme cas particulier, on peut regarder les coordonnées polaires

$$\left\{\begin{array}{l} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta} = r\dfrac{\partial f}{\partial x}\sin\theta - r\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\theta \end{array}\right. .$$

iii) Comme application, on peut voir que $f'_v = \frac{\partial f}{\partial r}$. Plus précisément, si v est le vecteur de norme 1 et d'angle θ, on a

$$f'_v(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\sin\theta = \frac{\partial f}{\partial r}(a,b).$$

Définition 3.29 *Une* courbe *C dans $\mathbf{R}^n$ est l'image d'un chemin $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$. Si α est dérivable en t et $\alpha(t) = P$, la droite dirigée par $\alpha'(t)$ est dite* tangente *à C en P.*

Exemple 3.30 *Le cercle est l'image du chemin $\alpha : t \to (\cos t, \sin t)$. Sa dérivée est $\alpha' : t \to (\sin t, -\cos t)$. On a $\alpha(\frac{\pi}{2}) = (0,1)$ et $\alpha'(\frac{\pi}{2}) = (-1,0)$. Il y a donc une tangente horizontale en $(0,1)$.*

[DESSIN]

Définition 3.31 *Le* plan tangent *à une surface $S \subset \mathbf{R}^3$ en un point $P \in S$ est l'ensemble de toutes les tangentes aux courbes tracées sur S passant par P.*

Attention : ce n'est pas toujours un plan (considérer l'origine d'un cône par exemple).

Proposition 3.32 *Soit $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ différentiable et*

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad F(x, y, z) = 0\}.$$

Soit $P := (a, b, c) \in S$ avec $\nabla F(P) \neq 0$. Alors, le plan tangent à S en P a pour équation

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(P)(y-b) + \frac{\partial F}{\partial z}(P)(z-c) = 0.$$

[Démonstration]

Exemple 3.33 *i) Le plan tangent un point, par exemple $P = (1, 0, 0)$ de la sphère unité $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. On a donc $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ si bien que*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

et alors

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P) = 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(P) = 0.$$

Le plan tangent à donc pour équation $2(x-1)+0y+0z = 0$, c'est à dire $x = 1$.

[DESSIN]

ii) Il n'y a pas de plan tangent à l'origine $P = (0, 0, 0)$ du cône d'équation $x^2+y^2 = z^2$ car $\nabla F(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

[DESSIN]

Corollaire 3.34 *Soit S le graphe d'une fonction différentiable $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ et $P = (a, b) \in \mathbf{R}^2$. Le plan tangent à $(a, b, f(a, b))$ a pour équation*

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y-b).$$

Exemple 3.35 *Pour $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $P = (0, 0)$, le graphe est un bol posé sur le plan tangent qui n'est autre que le plan xOy.*

Définition 3.36 *Une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ si les dérivées partielles (existent et) sont de classe $\mathcal{C}^1$. En général, on note*

$$f'_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}), \qquad f'_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$$

$$f'_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) \quad \text{et} \quad f'_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}).$$

Exemple 3.37

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$. *On voit donc que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{y^5}{(y^2)^2} = y$$

et il suit donc que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1.$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2) - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

et bien sûr $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. *On voit donc que*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,x) = 0$$

et il suit donc que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Théorème 3.38 (de Schwartz) *Si* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *est* $\mathcal{C}^2$, *alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

[Démonstration]

Exemple 3.39 *La fonction*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$.

Définition 3.40 (Généralisation) *i) Une fonction* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *si toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre* k *existent et sont continues. Grâce au théorème de Schwartz, il suffit de considérer les*

$$\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}, \quad i+j \leq k.$$

ii) *Une fonction $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ si toutes les dérivées partielles*

$$\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}, \quad i_1 + \cdots i_n \leq k.$$

existent et sont continues.

iii) *Une fonction vectorielle $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ si toutes ses composantes le sont.*

Théorème 3.41 (Généralisation) *Être de classe $\mathcal{C}^k$ est stable par somme, produit, quotient et composition.*

[Démonstration]

4 Fonctions implicites

Définition 4.1 *i)* *Un voisinage d'un réel a est une partie V de $\mathbf{R}$ qui contient un intervale (ouvert) I contenant x.*

ii) *Un voisinage V de $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ est une partie $V \subset \mathbf{R}^2$ qui contient un disque (ouvert) contenant P.*

iii) *Un voisinage V d'un point P de $\mathbf{R}^n$ est une partie qui contient une boule (ouverte) contenant P.*

[DESSIN]

Exemple 4.2 *i)* $]-1, 1[$ *est un voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{R}$*. Mais pas* $[0, 1]$*.*

[DESSIN]

ii) $V := \{(x, y), 0 \leq x, y \leq 1\}$ *est un voisinage de* $(1/2, 1/2)$ *dans* $\mathbf{R}^2$*.*

[DESSIN]

iii) $\mathbf{R} \setminus \{(x, 0), x > 0\}$ *n'est pas un voisinage de* $(0, 0)$ *dans* $\mathbf{R}^2$*.*

[DESSIN]

Définition 4.3 *Soit $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ et $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $F(a, b) = 0$. On dit que l'équation $F(x, y) = 0$ définit y comme* fonction implicite *de x au voisinage de (a, b) s'il existe $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\varphi(a) = b$ et*

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0$$

au voisinage de (a, b). On verra alors y comme fonction de x au voisinage de a avec $y(a) = b$ (c'est à dire qu'on écrira y au lieu de φ).

Exemple 4.4 *i) L'équation $x = y^2$ définit y comme fonction implicite de x au voisinage de $(1,1)$: prendre $y = \sqrt{x}$. Mais ça définit aussi y comme fonction implicite de x au voisinage de $(1,-1)$: prendre $y = -\sqrt{x}$.*

[DESSIN]

ii) $xy = 0$ ne définit pas y comme fonction implicite de x au voisinage de $(0,0)$.

Théorème 4.5 *Si $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est $\mathcal{C}^1$ au voisinage de (a,b) et $(\partial F/\partial y)(a,b) \neq 0$, alors $F(x,y) = 0$ définit y comme fonction implicite de x au voisinage de (a,b) et on a*

$$y'(a) = -\frac{(\partial F/\partial x)(a,b)}{(\partial F/\partial y)(a,b)}.$$

[Démonstration]

Exemple 4.6 *Si $F(x,y) = x - y^2$, on a $(\partial F/\partial x) = 1$ et $(\partial F/\partial y) = -2y$ si bien que $(\partial F/\partial y)(1,1) = -2 \neq 0$. On voit donc que y est fonction implicite de x avec $y(1) = 1$. De plus, comme $(\partial F/\partial x)(1,1) = 1$ et on aura $y'(1) = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$. Ici, comme on sait que $y = \sqrt{x}$, on peut le vérifier en remarquant que $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.*

Définition 4.7 (Généralisation) *Soit $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ et $P_0 = (a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $F(P_0) = 0$. On dit que l'équation $F(x,y,z) = 0$ définit z comme* fonction implicite *de x et de y au voisinage de P_0 s'il existe $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ telle que $\varphi(a,b) = c$ et*

$$z = \varphi(x,y) \Leftrightarrow F(x,y,z) = 0$$

au voisinage de P_0. On verra alors z comme fonction de (x,y) au voisinage de (a,b) avec $z(a,b) = c$.

Exemple 4.8 *L'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ définit z comme fonction implicite de x,y au voisinage de $(0,0,1)$: on a en fait $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.*

Théorème 4.9 (Généralisation) *Si $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ est $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $P_0 := (a,b,c)$ et $(\partial F/\partial z)(P_0) \neq 0$, alors $F(x,y,z) = 0$ définit z comme fonction implicite de x et y au voisinage de P_0 et on a*

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a,b) = -\frac{(\partial F/\partial x)(P_0)}{(\partial F/\partial z)(P_0)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(a,b) = -\frac{(\partial F/\partial y)(P_0)}{(\partial F/\partial z)(P_0)}.$$

Exemple 4.10 *L'équation*

$$z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} = \cos(x - y + z)$$

définit z comme fonction implicite de x,y à l'origine. On pose

$$F(x,y,z) = z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} - \cos(x - y + z)$$

et on vérifie que $F(0,0,0)=0$. *Puis on calcule*

$$\partial F/\partial x = -e^{z-x-y^2} + \sin(x-y+z), \quad , \quad \partial F/\partial y = -2ye^{z-x-y^2} - \sin(x-y+z)$$

$$\text{et} \quad \partial F/\partial z = z^2 + 2 + e^{z-x-y^2} + \sin(x-y+z).$$

On en déduit que

$$(\partial F/\partial x)(0,0,0) = -1, (\partial F/\partial y)(0,0,0) = 0 \quad \text{et} \quad (\partial F/\partial z)(0,0,0) = 3$$

et on voit en particulier que $(\partial F/\partial z)(0,0,0) \neq 0$ *et on aura*

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0.$$

La même chose en pratique, on vérifie d'abord que l'origine satisfait bien l'équation : $0+0+1=\cos 0$. *Puis on fait* $x=y=0$ *et on dérive les deux membres par rapport à* z *pour trouver* $3z^2+2+e^z$ *et* $-\sin(z)$ *puis on fait* $z=0$, *ce qui donne* $3 \neq 0$. *Pour calculer la valeur de la dérivée partielle de* z *par rapport à* x, *on fait* $y=0$ *et on dérive par rapport à* x, *ce qui donne en* $(x,0)$,

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial x} + (\frac{\partial z}{\partial x} - 1)e^{z-x} = -(1+\frac{\partial z}{\partial x})\sin(x+z)$$

puis on fait $x=z=0$, *ce qui donne* $2\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)+(\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)-1)=0$ *et donc* $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\frac{1}{3}$. *On fait ensuite la même chose pour la dérivée partielle de* z *par rapport à* Y. *On fait* $x=0$ *et on dérive par rapport à* y, *ce qui donne en* $(0,y)$,

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2\frac{\partial z}{\partial y} + (\frac{\partial z}{\partial y} - 2y)e^{z-y^2} = -(1-\frac{\partial z}{\partial y})\sin(x+z)$$

puis on fait $y=z=0$, *ce qui donne* $2\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)+\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=0$ *et donc* $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=0$.

5 Développements limités

Remarque 5.1 *Si* $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *est continue sur* $[0,1]$ *et dérivable sur* $]0,1[$, *il existe* $\theta \in]0,1[$ *telle que* $g(1)=g(0)+g'(\theta)$.

[DESSIN]

Théorème 5.2 (des accroissements finis) *Si* $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ *est différentiable sur le segment* $[P_0,P]$, *et* $\Delta P := \overrightarrow{P_0P}$ *comme d'habitude, il existe* $P_1 \in]P_0,P[$ *tel que*

$$f(P) = f(P_0) + \nabla f(P_1)\cdot\Delta P.$$

En d'autres termes, si $P_0=(a,b)$ *et* $P=(x,y)$, *on a*

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))\cdot(y-b)$$

avec $\theta \in]0,1[$.

[Démonstration]

Définition 5.3 *Si $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, le* Hessien *de f en $P = (a, b)$ est la matrice*

$$H_f(P) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix}.$$

On le verra comme une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ en associant à un vecteur $v = (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, le réel

$$v \cdot H_f(P) \cdot v := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\alpha^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)\alpha\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P)\beta^2.$$

Exemple 5.4 *Si $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x-y}$, on peut calculer ∇f et H_f partout. On a*

$$\nabla f = \Big((2x + x^2 + y^2)e^{x-y}, (2y - x^2 - y^2)e^{x-y}\Big)$$

si bien que

$$H_f := \begin{bmatrix} (2 + 4x + x^2 + y^2)e^{x-y} & (2y - 2x - x^2 - y^2)e^{x-y} \\ \\ (2y - 2x - x^2 - y^2)e^{x-y} & (2 - 4y + x^2 + y^2)e^{x-y} \end{bmatrix}.$$

En particulier

$$\nabla f(0,0) = (0,0) \quad \text{et} \quad H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

correspond à la forme quadratique correspondante est $(x, y) \mapsto 2x^2 + 2y^2$.

Proposition 5.5 (de Taylor-Lagrange) *Si $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ il existe $P_1 \in]P_0, P[$ tel que*

$$f(P) = f(P_0) + \nabla f(P) \cdot \Delta P + \frac{1}{2}(\Delta P \cdot H_f(P_1) \cdot \Delta P).$$

En d'autres termes, si $P_0 = (a, b)$ et $P = (x, y)$, on a

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(x-b))$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_1)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_1)(x-b)^2$$

avec $P_1 = (a + \theta(x - a), b + \theta(x - b))$ et $\theta \in]0, 1[$.

[Démonstration]

Remarque 5.6 *On retrouve en particulier la définition de la différentiabilité en P :*

$$f(P) = f(P_0) + \nabla f(P) \cdot \Delta P + \|\Delta P\|\epsilon(P).$$

avec $\epsilon(P) \to 0$ quand $P \to P_0$. En effet, si on pose $M = \|H_f(P_1)\|$ en prenant le sup des normes des entrées de la matrice, on a

$$\|\frac{\frac{1}{2}(\Delta P \cdot H_f(P_1) \cdot \Delta P)}{\|\Delta P\|}\| \leq M\|\Delta P\| \to 0.$$

Théorème 5.7 (Généralisation) *Si $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 3$, alors*

$$f(P) = f(P_0) + \nabla f(P) \cdot \Delta P + \frac{1}{2}(\Delta P \cdot H_f(P) \cdot \Delta P) + \cdots$$

Corollaire 5.8 *Si $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^3$ avec $k \geq 3$, alors*

$$f(P) = f(P_0) + \nabla f(P) \cdot \Delta P + \frac{1}{2}(\Delta P \cdot H_f(P) \cdot \Delta P) + \|\Delta P\|^2\epsilon(P)$$

avec $\epsilon(P) \to 0$ quand $P \to P_0$.

Exemple 5.9 *Avec Si $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x-y}$, on trouve donc*

$$f(x,y) = 0 + 0x + 0y + \frac{1}{2}(2x^2+y^2) + (x^2+y^2)\epsilon(x,y)$$