$\mathbb{M}$-MODULES

Bernard Le Stum

Université de Rennes

23 mai 2026

Content

Introduction

On peut fonctionner par analogie avec l'algèbre de Weyl

$$\mathcal{D} = \left\{ \sum_{\text{finie}} a_{kn} x^k \partial^n, a_{kn} \in \mathbb{C} \right\}, \text{ avec } \partial x^{n+1} = (n+1)x^n \text{ et } x^k x^n = x^{n+k}.$$

(1) On a la suite d'inclusions

$$\mathbb{C} \subset \mathcal{O} = \left\{ \sum_{\text{finie}} c_n x^n, c_n \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathcal{D} = \left\{ \sum_{\text{finie}} f_n \partial^n, f_n \in \mathcal{O} \right\}$$

$$\subset \widehat{\mathcal{D}} = \left\{ \sum_{\text{infinie}} f_n \partial^n, f_n \in \mathcal{O} \right\} \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}).$$

(2) Il existe une présentation $0 \to \mathcal{D} \xrightarrow{\cdot \partial} \mathcal{D} \to \mathcal{O} \to 0$.

(3) Les $\mathcal{D}$-modules à gauche forment une catégorie abélienne (de Grothendieck) symétrique monoïdale fermée avec unité $\mathcal{O}$.

(4) La catégories des représentations du groupe fondamental d'un ouvert se plonge dans celle des $\mathcal{D}$-modules.

On peut introduire de manière analogue l'anneau des matrices

$$\mathbb{M} = \left\{ \sum_{\text{infinie en } t} a_{kn} e_k t^n, a_{kn} \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ avec } te_{n+1} = e_n \text{ et } e_k e_n = \begin{cases} e_k \text{ if } n = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(1) On peut montrer que

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_\bullet := \left\{ \sum_{\text{finie}} c_n e_n, c_n \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{M}^\vee := \left\{ \sum_{\text{finie}} a_n t^n, a_n \in \mathbb{Z}_\bullet \right\}$$

$$\subset \mathbb{M} = \left\{ \sum_{\text{infinie}} a_n t^n, a_n \in \mathbb{Z}_\bullet \right\} \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_\bullet).$$

(2) On dispose d'une résolution $0 \to \mathbb{M} \xrightarrow{\cdot t} \mathbb{M} \to \mathbb{Z}_\bullet \to 0$.

(3) Les $\mathbb{M}$-modules forment une catégorie abélienne (de Grothendieck) symétrique monoïdale fermée avec unité $\mathbb{Z}_\bullet$.

(4) La catégorie des groupes abéliens linéairement topologisés métrisables complets se plonge dans celle des $\mathbb{M}$-modules.

L'anneau $\mathbb{M}$ des Matrices

Définition

L'anneau $\mathbb{M}$ des matrices et le module $\mathbb{Z}_\bullet$ des vecteurs sont respectivement

1. l'ensemble des matrices $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ à colonnes finies à coefficients dans $\mathbb{Z}$ avec la multiplication usuelle,
2. l'ensemble des suites verticales finies d'éléments de $\mathbb{Z}$ avec l'action usuelle.

$$\mathbb{M} = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ & \vdots & \\ * & & \\ 0 & * & \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}_\bullet := \left\{ \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \right\}.$$

Si on identifie $\mathbb{Z}_\bullet$ avec la première colonne de $\mathbb{M}$, c'est un idéal principal projectif (à gauche) et $\mathbb{M} \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_\bullet) \simeq \mathbb{Z}_\bullet^{\mathbb{N}}$ (comme $\mathbb{M}$-module).

Si on pose

$$e_n := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad t := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad t' := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix},$$

on a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{M} \xrightarrow{\cdot t^n} \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{Z}_\bullet^n \longrightarrow 0$$

(scindée par $\cdot t'^n$) et un isomorphisme $\mathbb{M} \simeq \varprojlim \mathbb{M}/\mathbb{M}t^n$ montrant que $\mathbb{M}$ est complet pour la topologie t-adique. On a par exemple $1 = \sum_{n=0}^{\infty} e_n t^n$.

On désigne par $M^{\otimes 2}$ l'ensemble des matrices $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ à coefficients entiers et colonnes finies (premier indice fini). C'est un $\mathbb{M}$-module (à gauche) avec deux structures compatibles (et échangeables) de $\mathbb{M}$-modules à droite. On a

$$\mathbb{M}^{\otimes 2} \simeq \mathbb{Z}_\bullet^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \simeq \left(\mathbb{Z}_\bullet^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{M}^{\mathbb{N}}$$

de deux manières différentes.

Définition

Le produit tensoriel interne de deux $\mathbb{M}$-modules (à gauche) M et N est le $\mathbb{M}$-module à gauche

$$M \otimes_{\mathbb{Z}_\bullet} N := (\mathbb{M}^{\otimes 2} \otimes_{\mathbb{M}} M) \otimes_{\mathbb{M}} N$$

en utilisant successivement les deux structures de $\mathbb{M}$-module à droite.

Proposition

Le produit tensoriel interne munit la catégorie des $\mathbb{M}$-modules d'une structure monoïdale symétrique fermée avec unite $\mathbb{Z}_\bullet$.

En particulier, il existe un bifoncteur $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathbb{Z}_\bullet}$ et un isomorphisme naturel

$$\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathbb{Z}_\bullet}(M \otimes_{\mathbb{Z}_\bullet} N, P) \simeq \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathbb{Z}_\bullet}(M, \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathbb{Z}_\bullet}(N, P)).$$

On note $M^\vee := \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathbb{Z}_\bullet}(M, \mathbb{Z}_\bullet)$ le dual de M.

Proposition

$\mathbb{M}^\vee$ est (isomorphe à) l'idéal projectif bilatère des matrices finies et $\mathbb{M}^{\vee\vee} \simeq \mathbb{M}$.

Proposition

Les $\mathbb{M}$-modules de présentation finie sont stables par colimite finie, limite dénombrable, extension et produit tensoriel interne. Tout $\mathbb{M}$-module est colimite filtrante de $\mathbb{M}$-modules de présentation finie.

Proposition

Pour un $\mathbb{M}$-module M, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *M est de présentation finie / projectif de présentation finie,*
2. *$M \simeq \mathbb{M}/\mathbb{M}u$ / $\mathbb{M}/\mathbb{M}e$ avec $e^2 = e$,*
3. *Il existe une suite exacte $\mathbb{Z}_\bullet^I \to \mathbb{Z}_\bullet^J \to M \to 0$ avec I, J dénombrales / un isomorphisme $\mathbb{Z}_\bullet^I \simeq M$ avec I dénombrable.*

Exemple

1. $\mathbb{M}$, $\mathbb{Z}_\bullet$ et $\mathbb{M}^{\otimes 2}$ sont projectifs de présentation finie,
2. $\mathbb{M}^\vee$ est projectif mais pas de présentation finie,
3. $\mathbb{Z}_{p\bullet} := \mathbb{M}/\mathbb{M}(t-p)$ est de présentation finie mais pas projectif (p premier),
4. $\mathbb{Z}[1/n]_\bullet := \mathbb{M}^\vee/\mathbb{M}^\vee(1-nt)$ et $\mathbb{Q}_{p\bullet} := \varinjlim_{p\cdot} \mathbb{Z}_{p\bullet}$ ne sont ni l'un ni l'autre.

En copiant un argument de Clausen et Scholze, on montre :

Lemme

Si M est un $\mathbb{M}$-module de présentation finie, alors

$$M \simeq \mathbb{Z}_\bullet^E \oplus \mathcal{E}\mathrm{xt}_{\mathbb{Z}_\bullet}(\mathbb{Z}_\bullet \otimes_\mathbb{Z} T, \mathbb{Z}_\bullet)$$

avec T groupe abélien dénombrable tel que $T^\vee := \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(T, \mathbb{Z}) = 0$.

Théorème

Tout idéal de type fini de $\mathbb{M}$ est projectif.

Démonstration.

De manière équivalente : tout $\mathbb{M}$-module de présentation finie a une résolution projective de longueur 2. Avec les notations du lemme, si $0 \to \mathbb{Z} \cdot I \to \mathbb{Z} \cdot J \to T \to 0$ est exacte, il en va de même de $0 \to \mathbb{Z}_\bullet^I \to \mathbb{Z}_\bullet^J \to \mathcal{E}\mathrm{xt}_{\mathbb{Z}_\bullet}(\mathbb{Z}_\bullet \otimes_\mathbb{Z} T, \mathbb{Z}_\bullet) \to 0$. $\square$

Corollaire

L'anneau $\mathbb{M}$ est cohérent.

Groupes abéliens linéairement topologisés

Définition

Un groupe abélien topologique M est linéairement topologisé si les sous-groupes ouverts forment une base de voisinages de zéro. On dit alors que M est complet si $M \simeq \varprojlim M/M'$ quand M' parcourt les sous-groupes ouverts.

Exemple

1. Un module sur un anneau adique (sur $\mathbb{Z}[[X]]$ ou $\mathbb{Z}_p$ par exemple),
2. un module de présentation finie sur un anneau de Huber (sur $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{Q}_p\{X\}$ par exemple).

Si V est un groupe abélien topologique, on pose $V_\bullet := \{(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, s_n \to 0\}$.

Exemple

1. On retrouve $\mathbb{Z}_\bullet$ pour la topologie discrète sur $\mathbb{Z}$,
2. on a $\mathbb{M} \simeq (\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})_\bullet$ (topologie produit) et $\mathbb{M}^\vee \simeq (\mathbb{Z} \cdot \mathbb{N})_\bullet$ (topologie discrète),
3. $\mathbb{Z}_{p\bullet} \simeq \mathbb{M}/\mathbb{M}(t-p)$, $\mathbb{Z}[1/n]_\bullet \simeq \mathbb{M}^\vee/\mathbb{M}^\vee(1-nt)$ et $\mathbb{Q}_{p\bullet} \simeq \varinjlim_{p\cdot} \mathbb{Z}_{p\bullet}$.

Proposition

1. *Si V est linéairement topologisé complet, alors $\mathbb{M}$ agit sur $V_\bullet$,*
2. *le foncteur $V \mapsto V_\bullet$ possède un adjoint $M \to \widehat{M(*)}$,*
3. *le foncteur $V \mapsto V_\bullet$ est monoïdal : on dispose d'une application $\mathbb{M}$-linéaire naturelle $V_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_\bullet} W_\bullet \to (V \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}} W)_\bullet$,*
4. *restreint aux groupes métrisables, le foncteur $V \mapsto V_\bullet$ est pleinement fidèle,*
5. *restreint aux groupes discrets, le foncteur $V \mapsto V_\bullet$ est fortement monoidal :*
$$V_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_\bullet} W_\bullet \simeq (V \otimes_{\mathbb{Z}} W)_\bullet$$
et possède un coadjoint $M \mapsto M(*)$ (automatiquement monoidal) qui possède lui même un coadjoint.

On dispose aussi de la notion de $\mathbb{M}$-module linéairement $\mathbb{M}$-topologisé et le point (4) résulte alors du

Lemme

Toute application $\mathbb{M}$-linéaire $M \to N$ entre $\mathbb{M}$-modules linéairement $\mathbb{M}$-topologisés avec M métrisable et N complet est continue.

Coup de théâtre

Théorème (Gabriel-Popescu)

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne complete et cocomplete dans laquelle les colimites filtrantes sont exacte et G est un générateur projectif de présentation finie, alors $\mathcal{A}$ est équivalente à la catégorie des A-modules avec $A = \mathrm{End}(G)$.

Théorème (Clausen-Scholze)

Les groupes abéliens solides forment une catégorie abélienne complete et cocomplete dans laquelle les colimites filtrantes sont exactes et $\underline{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}}$ est un générateur projectif de présentation finie.

Corollaire

La catégorie des groupes abéliens solides est équivalente à la catégorie des $\mathbb{M}$-modules. $\square$

ENCORE ?

$\mathbb{M}$-anneaux

Définition

Un $\mathbb{M}$-anneau A (resp. un A-module M) est un $\mathbb{M}$-module muni d'un morphisme associatif unitaire $A \otimes_{\mathbb{Z}_\bullet} A \to A$ (resp. $A \otimes_{\mathbb{Z}_\bullet} M \to M$).

Formellement, A est un monoïde de la catégorie monoïdale et M est un A-object.

Proposition

1. *Si R est un anneau linéairement topologisé complet (resp. V un R-module), alors $R_\bullet$ (resp. $V_\bullet$) est canoniquement un $\mathbb{M}$-anneau (resp. $R_\bullet$-module),*
2. *restreint aux anneaux (resp. modules) métrisables, on obtient un foncteur pleinement fidèle,*
3. *si R est un anneau discret, la catégorie des $R_\bullet$-modules est équivalente à celle des $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{M}$-modules usuels.*

Exemple

$\mathbb{Z}_\bullet$ est un $\mathbb{M}$-anneau et un $\mathbb{Z}_\bullet$-module est tout simplement un $\mathbb{M}$-module usuel.

Exemple

1. Un $\mathbb{Z}[X]_\bullet$-module est un $\mathbb{M}[X]$-module usuel (un $\mathbb{M}$-module usuel muni d'un endomorphisme),
2. un $\mathbb{Z}[[X]]_\bullet$-module est un $\mathbb{M}[[X]]$-module usuel et (foncteurs *pleinement* fidèles)
$$\mathbb{Z}[[X]]\text{-}\mathrm{Mod}^\wedge \subset \mathbb{Z}[[X]]_\bullet\text{-}\mathrm{Mod} \subset \mathbb{Z}[X]_\bullet\text{-}\mathrm{Mod}$$
($\wedge$: linéairement topologisés complets métrisables),
3. un $\mathbb{Z}_{p\bullet}$-module est un $\mathbb{M}_p$-module usuel (on écrit $M_p := \varprojlim M/p^n M$) et $\mathbb{Z}_p\text{-}\mathrm{Mod}^\wedge \subset \mathbb{Z}_{p\bullet}\text{-}\mathrm{Mod} \subset \mathbb{Z}_\bullet\text{-}\mathrm{Mod}$,
4. un $\mathbb{Q}_\bullet$-module est un $\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{M}$-module usuel (ne pas confondre avec l'anneau $\mathbb{M}_\mathbb{Q}$ des matrices à – colonnes finies et à – coefficients rationnels),
5. un $\mathbb{Q}_{p\bullet}$-module est un $\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{M}_p$-module usuel et $\mathbb{Q}_p\text{-}\mathrm{Ban} \subset \mathbb{Q}_{p\bullet}\text{-}\mathrm{Mod} \subset \mathbb{Z}_\bullet\text{-}\mathrm{Mod}$ ($\mathbb{Q}_p\text{-}\mathrm{Ban} = \{$espaces de Banach p-adiques$\}$),
6. un $\mathbb{Z}_p\{X\}_\bullet$-module est un $\mathbb{M}_p\{X\}$-module usuel (on désigne ici par $A\{X\} := \varprojlim_V A[X]/V[X]$, V sous-groupe ouvert, l'anneau des fonctions convergentes sur le disque unité fermé).

Le produit tensoriel interne est remarquablement stable.

Exemple

1. $\mathbb{Z}[[X]]_\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathbb{Z}_\bullet} \mathbb{Z}[[Y]]_\bullet \simeq \mathbb{Z}[[X,Y]]_\bullet$,
2. $\mathbb{Z}_{p\bullet} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathbb{Z}_\bullet} \mathbb{Z}[[X]]_\bullet \simeq \mathbb{Z}_p[[X]]_\bullet$,
3. $\mathbb{Z}_{p\bullet} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathbb{Z}_\bullet} \mathbb{Z}_{p\bullet} \simeq \mathbb{Z}_{p\bullet}$ et $\mathbb{Z}_{p\bullet} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathbb{Z}_\bullet} \mathbb{Z}_{\ell\bullet} = 0$ quand $\ell \neq p$,
4. $\mathbb{Q}_{p\bullet} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathbb{Z}_\bullet} \mathbb{Z}[[X]]_\bullet \simeq \mathbb{Q}_p[[X]]^{\mathrm{bd}}_\bullet$ et $\mathbb{Q}_{p\bullet} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathbb{Z}_\bullet} \mathbb{Q}_{p\bullet} \simeq \mathbb{Q}_{p\bullet}$ (où $\mathbb{Q}_p[[X]]^{\mathrm{bd}} := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[[X]]$ est l'anneau des fonctions bornées sur le disque),
5. $E_\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathbb{Z}_\bullet} F_\bullet \simeq (E \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} F)_\bullet$ si E et F sont deux espaces de Banach sur $\mathbb{Q}_p$,
6. $\mathbb{Z}[[X]]_\bullet \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathbb{Z}[X]_\bullet} \mathbb{Z}[[X]]_\bullet \simeq \mathbb{Z}[[X]]_\bullet$.

Théorème (Mann)

Si R est un anneau discret de type fini (sur $\mathbb{Z}$), $I \subset R$ un idéal et M, N deux $R_\bullet$-modules (dérivés) I-complets, alors $M \otimes^{\mathrm{L}}_{R_\bullet} N$ est aussi (dérivé) I-complet.

– MERCI –

[Cam26] Juan Esteban Rodríguez Camargo. *Notes on Solid Geometry*. 2026. arXiv : 2603.03012 [math.AG]. URL : https://arxiv.org/abs/2603.03012.

[CS23] Dustin Clausen et Peter Scholze. *Analytic Stacks*. Video lecture series, IHES and Max Planck Institute for Mathematics. Course on analytic stacks and foundations for analytic geometry. 2023. URL : https://www.carmin.tv/en/collections/dustin-clausen-and-peter-scholze-analytic-stacks.

[Joh79] P. T. Johnstone. "On a topological topos". English. In : *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* 38 (1979).