# Le langage des catégories

Bernard Le Stum[*]
Université de Rennes 1

Version du 3 septembre 2004

## 1 Définition et exemples

On parlera ci dessous de collections qui ne forment pas nécessairement des ensembles mais on utilisera tout de même les notations habituelles de la théorie des ensembles.

### 1.1 Définition

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ consiste en

a) Une collection d'*objets* $X$.

b) Pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$, d'un ensemble de *morphismes* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, on dit que $X$ est la *source* de $f$, que $Y$ est son *but*et on écrit $f : X \to Y$).

c) Pour tout $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, une loi de *composition*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

$$(f, g) \mapsto g \circ f.$$

On exige de plus que les propriétés suivantes soient satisfaites :

i)

$$\forall X \in \mathcal{C}, \exists\, \mathrm{Id}_X : X \to X,$$

$$\forall f : X \to Y, f \circ \mathrm{Id}_X = f$$

et

$$\forall f : Y \to X, \mathrm{Id}_X \circ f = f$$

(celui-ci est alors unique et s'appelle l'*identité*).

ii)

$$\forall f : X \to Y, g : Y \to Z, h : Z \to T,$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

[*]bernard.le-stum@univ-rennes1.fr

## 1.2 Exemples

i) On a tout d'abord la catégorie **Ens** dont les objets sont les ensembles, les morphismes sont les applications et la composition se fait de la manière habituelle.

   On dispose de même de la catégorie a catégorie **Mon** des monoïdes et de la catégorie **Gr** des groupes.

ii) Si $G$ est un monoïde, on peut considérer les catégories $G$-**Ens** et **Ens**-$G$ des ensembles munis d'une action à gauche ou a droite.

   Si $A$ est un anneau, on peut considérer les catégories $A$-**Mod** des $A$-modules à gauche et **Mod**-$A$ des $A$-modules à droite.

   En particulier, on a la catégorie **Ab** des groupes abéliens et, si $K$ est un corps la catégorie $K$-**ev** des $K$-espaces vectoriels. Ou la catégorie $K$–**evf** des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps $K$.

   On peut aussi regarder, si $A$ est un anneau, la catégorie $\mathbf{Mat}_A$ dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes $m \to n$ les matrices à $n$ lignes et $m$ colonnes à coefficients dans $A$. La composition est alors donnée par la multiplication des matrices.

iii) Si $A$ est un anneau commutatif, on peut considérer la catégories $A$-**Alg** des $A$-algèbres (centrales), et en particulier, la catégorie **Ann** des anneaux. On pourra aussi considérer la catégorie **Com** des anneaux commutatifs.

iv) On peut aussi considérer la catégorie **Top** dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes sont les applications continues.

   Bien sûr, il y a aussi les catégories **Met** et **Comp** des espaces métriques et des espaces complets, les morphismes étant les applications uniformément continues.

v) On dispose de la catégorie **GrT** des groupes topologiques (avec homomorphismes continus), de la catégorie $\mathbf{R}$-**evt** des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels topologiques (avec applications linéaires continues).

   De même, on peut regarder les catégories $\mathbf{R}$-**evn** (resp. **Ban**) des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels normés (resp. des Banach) avec les applications linéaires contractantes.

vi) Si $G$ est un monoïde, on peut considérer la catégorie $\mathbf{G}$ qui a pour seul objet $G$, dont les morphismes sont les éléments de $G$ et où la composition est la multiplication.

vii) On peut considérer un ensemble ordonné $(I, \leq)$ comme une catégorie. En effet, les objets sont les éléments de $I$ et pour tout $i, j \in I$, il y a un unique morphisme $i \to j$ si $i \leq j$ et aucun sinon.

   Comme cas particulier, on peut prendre un espace topologique $X$ et la catégorie $\mathbf{Ouv}(X)$ des ouverts de $X$.

## 1.3 Définition

Une catégorie est *petite* si ses objets forment un ensemble.
Elle est *finie* s'il y a un nombre fini de morphismes (et donc d'objets).

## 1.4 Exemple

Un ensemble ordonné $(I, \leq)$, et donc en particulier la catégorie $\mathbf{Ouv}(X)$ si $X$ est un espace topologique, est une petite catégorie. De même, si $G$ est un monoïde, la catégorie $\mathbf{G}$ est petite. Aussi, si $A$ est un anneau, $\mathbf{Mat}_A$ est petite.

## 1.5 Définition

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux catégories, la *catégorie produit* $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ est la catégorie dont les objets sont les couples $(X, X')$ avec $X \in \mathcal{C}$ et $X' \in \mathcal{C}'$ et les morphismes sont les couples de morphismes. La composition est définie de manière évidente.

## 1.6 Définition

La *catégorie opposée*ou *duale* à $\mathcal{C}$ est la catégorie $\mathcal{C}^{op}$ qui a les mêmes objets que $\mathcal{C}$ avec pour tout $X, Y$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

La composition est définie de manière évidente.

## 1.7 Exemple

La catégorie duale de $(I, \leq)$ est $(I, \geq)$.

## 1.8 Définition

Une *sous-catégorie* $\mathcal{C}'$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie dont les objets forment une sous-collection de celle des objets de $\mathcal{C}$, pour $X, Y \in \mathcal{C}'$, les morphismes $X \to Y$ forment une partie de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, la composition est induite par celle de $\mathcal{C}$ et les identités sont celles de $\mathcal{C}$. On écrit parfois $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$.
On dit que la sous-catégorie est *pleine* si

$$\forall X, Y \in \mathcal{C}', \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

## 1.9 Exemples

La catégorie $\mathbf{Ab}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Gr}$ qui est elle même une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mon}$. De même, la catégorie $\mathbf{Com}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ann}$.
Si $H \subset G$ est un sous-monoïde, alors $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$.
Si $K$ est un corps, $K$–$\mathbf{evf}$ est une sous-catégorie pleine de $K$–$\mathbf{ev}$.
Enfin, $\mathbf{Comp}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Met}$.

# 2 Structure interne

## 2.1 Définitions

On dit que
$$f \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$$
est un *endomorphisme* de $X$.
Soit $f : X \to Y$ un morphisme.
Une *rétraction* ou un *inverse à gauche*pour $f$ est un morphisme $g : Y \to X$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.
Une *section*ou un *inverse à droite*pour $f$ est un morphisme $g : Y \to X$ tel que $g$ soit une rétraction pour $f$ dans $\mathcal{C}^{op}$.

## 2.2 Proposition

Si $f : X \to Y$ possède à la fois une rétraction $g$ et une section $h$, alors celles-ci sont uniques et on a $h = g$.

## 2.3 Définitions

On dit alors que $f$ est un *isomorphisme*. On écrit $f : X \tilde{\to} Y$ et on pose $f^{-1} := g$, c'est l'*inverse*de $f$.
On dit que $f : Y \to X$ est un *monomorphisme*si
$$\forall g \neq h : Z \to Y, f \circ g \neq f \circ h.$$
On dit que c'est un *épimorphisme* si c'est un monomorphisme dans $\mathcal{C}^{op}$.

## 2.4 Exemples

i) Dans **Ens**, un isomorphisme est une bijection. De plus, un mono- (resp. épi-) morphisme est une application injective (resp. surjective) et elle possède toujours un inverse à gauche (resp. droite).

ii) Dans $A$-**Mod**, les mono- (resp. épi-, resp. iso-) morphismes sont les morphismes injectifs (resp. surjectifs, resp. bijectifs). Mais un mono- (resp. épi-) morphisme n'a pas nécessairement d'inverse à gauche (resp. droite).

iii) Dans **Top**, les mono- (resp. épi-) morphismes sont les morphismes injectifs (resp. surjectifs) mais ils n'ont pas nécessairement de rétraction (resp. section). En fait, une application continue bijective n'est pas nécessairement un homéomorphisme (c'est à dire un isomorphisme).

iv) Dans **Ann**, les mono- (resp. iso-) morphismes sont les morphismes injectifs (resp. bijectifs). Un morphisme surjectif est un épimorphisme, mais il existe des monomorphismes qui sont aussi des épimorphismes mais ne sont pas bijectifs ($\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ par exemple).

## 2.5 Proposition

i) Un morphisme qui possède une rétraction est toujours un monomorphisme (et dual).

ii) Le composé de deux monomorphismes est un monomorphisme (et dual).

iii) Si $g \circ f$ est un monomorphisme, $f$ aussi (et dual).

# 3 Propriétés universelles

## 3.1 Définition

Un objet $X \in \mathcal{C}$ est *final* si

$$\forall Y \in \mathcal{C}, \exists! f : Y \to X.$$

Un objet de $\mathcal{C}$ est dit *initial* si c'est un objet final de $\mathcal{C}^{op}$.

## 3.2 Exemples

Dans **Ens** ou **Top**, un objet est final si et seulement si l'ensemble sous-jacent possède un unique élément. Et $\emptyset$ est l'unique objet initial.
Dans $A$-**Mod**, un objet est initial si et seulement s'il est final si et seulement s'il est réduit à zéro.
Dans **Ann**, un objet est final si et seulement s'il est réduit à zéro, et **Z** est un objet initial.
Dans $(I, \leq)$ un objet initial (resp. final) n'est autre qu'un plus petit (resp. grand) élément.

## 3.3 Proposition

Un objet final est unique à unique isomorphisme près (et dual).

## 3.4 Définition

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. Un *produit* des $X_i$ est un objet $X$, muni de *projections* $p_i : X \twoheadrightarrow X_i$, tel que

$$\forall (f_i : Y \to X_i)_{i \in I}, \exists! f : Y \to X,$$

$$\forall i \in I, p_i \circ f = f_i.$$

La notion duale est celle de *somme*.

## 3.5 Exemples

Dans **Ens**, le produit est le produit cartésien et la somme est l'union disjointe.
Dans **Top**, on trouve les mêmes objets avec la topologie appropriée.
Dans $A$-**Mod**, le produit et la somme sont le produit cartésien et la somme directe.
Dans $A$-**Alg**, le produit est le produit cartésien et la somme est le produit tensoriel.
Enfin, dans $(I, \leq)$ le produit d'une famille est la borne inférieure si elle existe.

## 3.6 Proposition

i) Si on se donne une famille de morphismes

$$(f_i : X_i \to Y_i)_{i \in I}$$

et si $X$ (resp. $Y$) est le produit des $X_i$ (resp. $Y_i$) avec projections $p_i$ (resp. $q_i$),

$$\exists! f : X \to Y, \forall i \in I, q_i \circ f = f \circ p_i$$

(et dual).

ii) Si $X$ (resp. $X'$) est un produit des $X_i$ avec projections $p_i$ (resp. $p'_i$), il existe un unique isomorphisme

$$f : X \tilde{\to} X'$$

tel que

$$\forall i \in I, p'_i \circ f = p_i$$

(et dual).

## 3.7 Remarque

Soit $Y$ un produit de $X$ par lui même avec projections $p_1, p_2$. Alors,

$$\exists! \delta_X : X \to Y, p_1 \circ \delta = p_2 \circ \delta = Id_X.$$

C'est un monomorphisme appelé *plongement diagonal*.

## 3.8 Définition

Un *noyau* de

$$f_1, f_2 : X \to Y$$

est un objet $Z$ muni d'un morphisme $i : Z \to X$ tel que

$$f_1 \circ i = f_2 \circ i$$

et

$$\forall g : T \to X, f_1 \circ g = f_2 \circ g \Rightarrow$$
$$\exists! h : T \to Z, g = i \circ h.$$

On dit alors que la suite

$$Z \to X \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} Y$$

est *exacte à gauche*.
On définit dualement les notions de *conoyau*et de *suite exacte à droite*.

## 3.9 Exemples

Dans **Ens**, le noyau de $f, g : E \to F$ est

$$\{x \in E, f(x) = g(x)\}$$

et le conoyau est le quotient de $F$ par la plus petite relation d'équivalence telle que $f(x) \sim g(x)$ si $x \in E$.
Dans **Top**, on trouve les mêmes ensembles avec la topologie appropriée.
Dans $A$-**Mod**, le noyau de $f, g : M \to N$ est $\ker(g - f)$ et le conoyau est

$$\operatorname{coker}(g - f) := N/\operatorname{Im}(g - f).$$

## 3.10 Proposition

i) Si $i : Z \to X$ (resp. $i' : Z' \to X'$) fait de $Z$ (resp. $Z'$) un noyau de

$$f, g : X \to Y$$

(resp.

$$f', g' : X' \to Y')$$

et si

$$\varphi : X \to X', \psi : Y \to Y'$$

sont deux morphismes tels que

$$\psi \circ f = f' \circ \varphi \text{ et } \psi \circ g = g' \circ \varphi,$$

il existe un unique $\lambda : Z \to Z'$ tel que

$$i' \circ \lambda = \varphi \circ i$$

(et dual).

ii) Si $i : Z \to X$ et $i' : Z' \to X'$ font de $Z$ et $Z'$ des noyaux de

$$f, g : X \to Y,$$

il existe un unique isomorphisme $\lambda : Z \tilde{\to} Z'$ tel que $i' \circ \lambda = i$ (et dual).

iii) Si $i : Z \to X$ fait de $Z$ un noyau de

$$f, g : X \to Y,$$

c'est un monomorphisme (et dual).

iv) Soient
$$f, g : X \to Y$$
deux morphismes et $j : Y \to Y'$ un monomorphisme, alors $Z$ est un noyau de $f, g$ si et seulement si c'est un noyau de
$$j \circ f, j \circ g : X \to Y'$$
(et dual).

## 3.11 Définition

Un *produit fibré* de
$$f_1 : X_1 \to Y, f_2 : X_2 \to Y$$
est un objet $X$ muni de deux *projections*
$$p_1 : X \twoheadrightarrow X_1, p_2 : X \twoheadrightarrow X_2$$
tel que
$$f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$$
et
$$\forall g_1 : Z \to X_1, g_2 : Z \to X_2,$$
$$(f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2 \Rightarrow$$
$$\exists! g : Z \to X, g_1 = p_1 \circ g \text{ et } g_2 = p_2 \circ g).$$
On dit alors que le carré
$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_2 & \longrightarrow & Y \end{array}$$
est *cartésien*. On définit dualement les notions de *somme amalgamée*et de *carré co-cartésien*.

## 3.12 Exemples

Le produit fibré de
$$f_1 : X_1 \to Y, f_2 : X_2 \to Y$$
dans **Ens**, **Top** ou $A$-**Mod** est
$$\{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2, f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$$
avec la structure induite dans les deux derniers cas.
La somme amalgamée de deux morphismes d'anneaux commutatifs $f : A \to B$ et $g : A \to C$ est $B \otimes_A C$.
Dans **Ens**, **Top** ou $A$-**Mod**, si $Z \subset X$, le diagramme
$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Z) & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \hookrightarrow & Y \end{array}$$
est cartésien.

## 3.13 Proposition

i) Si
$$p_1 : X \to X_1, p_2 : X \to X_2$$
font de $X$ un produit fibré de
$$f_1 : X_1 \to Y, f_2 : X_2 \to Y,$$
si
$$p'_1 : X' \to X'_1, p'_2 : X' \to X'_2$$
font de $X'$ un produit fibré de
$$f'_1 : X'_1 \to Y', f'_2 : X'_2 \to Y'$$
et si
$$\psi : Y \to Y', \varphi_1 : X_1 \to X'_1, \varphi_2 : X_2 \to X'_1$$
sont tels que
$$\psi \circ f'_1 = f_1 \circ \varphi_1 \text{ et } \psi \circ f'_2 = f_2 \circ \varphi_2,$$
alors, il existe un unique $\varphi : X \to X'$ tel que
$$p'_1 \circ \varphi = \varphi_1 \circ p_1 \text{ et } p'_2 \circ \varphi = \varphi_2 \circ p_2$$
(et dual).

ii) Si $X$ et $X'$ sont des produits fibrés de
$$f_1 : X_1 \to Y, f_2 : X_2 \to Y$$
avec projections $p_1, p_2$ dans le premier cas et $p'_1, p'_2$ dans le second, il existe un unique isomorphisme $\varphi : X \tilde{\to} X'$ tel que
$$p'_1 \circ \varphi = p_1 \text{ et } p'_2 \circ \varphi = p_2$$
(et dual).

iii) Dans un diagramme cartésien
$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array},$$
si $f$ est un monomorphisme, $f'$ aussi (et dual).

iv) Un morphisme $f : X \to Y$ est un monomorphisme si et seulement si le diagramme
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\mathrm{Id}_X} & X \\ \downarrow \mathrm{Id}_X & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array},$$
est cartésien (et dual).

### 3.14 Remarque

Si $f : X \to Y$ est un morphisme et si le produit $X \times Y$ existe, il existe un unique

$$\Gamma : X \to X \times Y,$$

tel que

$$p_X \circ \Gamma = \mathrm{Id}_X \text{ et } p_Y \circ \Gamma = f.$$

C'est le *graphe* de $f$ et si $Y \times Y$ existe, on a un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \stackrel{\Gamma}{\hookrightarrow} & X \times Y \\ \downarrow f & & \downarrow f \times \mathrm{Id}_Y \\ Y & \stackrel{\delta}{\hookrightarrow} & Y \times Y \end{array}.$$

### 3.15 Proposition

i) Si $\mathcal{C}$ possède un objet final 0, alors un produit de $X$ et $Y$ n'est autre qu'un produit fibré au dessus de 0 (et dual). De plus 0 est le produit vide (et dual).

ii) Si $X$ est un produit de $X_1$ et $X_2$ avec projections $p_1, p_2$, alors un noyau de

$$f_1 \circ p_1, f_2 \circ p_2 : X \to Y$$

est un produit fibré de

$$f_1 : X_1 \to Y, f_2 \to Y$$

(et dual).

iii) Si $Z$ est un produit de $Y$ par lui même avec projections $p_1, p_2$, et si

$$f_1, f_2 : X \to Y,$$

il existe un unique $f : X \to Z$ tel que

$$p_1 \circ f = f_1 \text{ et } p_2 \circ f = f_2$$

et alors, un produit fibré de $f$ et de $\delta_Y$ est un noyau de $f_1, f_2$ (et dual).

# 4 Foncteurs

### 4.1 Définition

Un *foncteur (covariant)* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est une opération qui associe à tout $X \in \mathcal{C}$ un objet

$$F(X) \in \mathcal{C}$$

et a tout $f : X \to Y$ un morphisme

$$F(f) : F(X) \to F(Y).$$

On demande que soient satisfaites les propriétés suivantes :

i)
$$\forall X \in \mathcal{C}, F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}.$$

ii)
$$\forall f : X \to Y, g : Y \to Z, F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Un *foncteur contravariant* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un foncteur (covariant) $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}'$.

## 4.2 Exemples

i) On dispose des foncteurs "oubli" évidents

$$A\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ens}, \mathbf{Ann} \to \mathbf{Ab}, \mathbf{Ann} \to \mathbf{Mon}, ...$$

Ou si $A \to B$ est un morphisme d'anneaux, $B$-**Mod** $\to$ $A$-**Mod**, de restriction des scalaires. De même, on a les foncteurs "oubli"

$$\mathbf{Top} \to \mathbf{Ens}, \mathbf{R\text{-}evn} \to \mathbf{R\text{-}ev}, ...$$

ii) On a le foncteur d'abélianisation

$$\mathbf{Gr} \to \mathbf{Ab}, G \mapsto G^{ab} := G/[G, G].$$

On peut aussi considérer les foncteurs de complétion

$$X \mapsto \hat{X}, \mathbf{Met} \to \mathbf{Comp}, \mathbf{R\text{-}evn} \to \mathbf{Ban}.$$

Où encore les foncteurs

$$X \mapsto X^{disc}, X \mapsto X^{gross}, \mathbf{Ens} \to \mathbf{Top}$$

qui munissent un ensemble de la topologie discrète ou grossière.

iii) On dispose du foncteur "module libre"

$$E \mapsto A^{(E)}, \mathbf{Ens} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$$

et du foncteur "monoïde abélien libre"

$$E \mapsto \mathbf{N}^{(E)}, \mathbf{Ens} \to \mathbf{Mon}.$$

On a aussi le foncteur "algèbre du monoïde"

$$G \mapsto A^{(G)}, \mathbf{Mon} \to A\text{-}\mathbf{Alg}$$

si $A$ est un anneau commutatif ou encore "algèbre de polynômes"

$$E \mapsto A[E], \mathbf{Ens} \to A\text{-}\mathbf{Alg}.$$

iv) On a le foncteur évident $\mathbf{Mat}_A \to A$-$\mathbf{Mod}$. On a aussi les foncteurs $GL_n$ : $\mathbf{Ann} \to \mathbf{Gr}$ et en particulier, le foncteur $A \mapsto A^*$. Enfin, on peut regarder le foncteur de dualité
$$M \mapsto \check{M} := \mathrm{Hom}_A(M, A)$$
de $A$-$\mathbf{Mod}$ dans lui même si $A$ est un anneau commutatif.

v) Si $A$ est un anneau, on peut définir des foncteurs
$$\mathrm{Hom} : A\text{-}\mathbf{Mod}^{op} \times \mathbf{Ab} \to \mathbf{Mod}\text{-}A$$
et
$$\otimes : \mathbf{Mod}\text{-}A \times A\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}.$$
Bien sûr, si $A$ est commutatif, on obtient des foncteurs
$$A\text{-}\mathbf{Mod}^{op} \times A\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$$
et
$$\otimes : A\text{-}\mathbf{Mod} \times A\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}.$$
Si $A \to B$ est un morphisme d'anneaux, on a le foncteur d'extension des scalaires
$$A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}, M \to B \otimes_A M.$$

vi) Un foncteur covariant $(I, \leq) \to (J, \leq)$ est une application croissante. Toute application continue $f : X \to Y$ fournit un foncteur
$$f^{-1} : Ouv(Y) \to Ouv(X).$$
On peut considérer la catégorie $\mathbf{Cat}$ des petites catégories et des foncteurs. On a alors un foncteur
$$\mathbf{Top}^{op} \to \mathbf{Cat}, X \mapsto Ouv(X), f \mapsto f^{-1}.$$

## 4.3 Définition

Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ sont deux foncteurs, on défini leur *composé*
$$G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$$
par
$$(G \circ F)(X) = G(F(X)) \text{ et } (G \circ F)(f) = G(F(f)).$$
Aussi, si $\mathcal{C}$ est une catégorie, le foncteur *identité*
$$\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$
est défini par
$$\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(X) = X \text{ et } \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(f) = f.$$

## 4.4 Remarques

i) Si $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, on a un foncteur d'inclusion $\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$.

ii) Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux catégories, on dispose du foncteur évident de "projection"
$$\mathcal{C} \times \mathcal{C}' \to \mathcal{C}.$$
De même, si on fixe $X \in \mathcal{C}$, on peut considérer le foncteur
$$\mathcal{C}' \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}', Y \mapsto (X, Y), f \mapsto (\mathrm{Id}_X, f)$$
(et symétriquement).

iii) Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, on peut considérer le foncteur
$$\mathrm{Hom} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$$
qui envoie $(X, Y)$ sur $\mathrm{Hom}(X, Y)$, et un couple
$$(f : X' \to X, g : Y \to Y')$$
de morphismes de $\mathcal{C}$, sur l'application
$$\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X', Y'), h \mapsto g \circ h \circ f.$$
Par composition, on obtient des foncteurs
$$h^X : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}, Y \mapsto \mathrm{Hom}(X, Y)$$
et
$$h_Y : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Ens}, X \mapsto \mathrm{Hom}(X, Y).$$

iv) Il revient au même de se donner un foncteur (covariant) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ou un foncteur (covariant) $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}'^{op}$. Cela permet de définir le composé de deux foncteurs contravariants ou de deux foncteurs de différentes variances.
Remarquons pour finir que l'on a toujours
$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F.$$

## 4.5 Remarque

Un foncteur préserve les sections, les rétractions par dualité et donc aussi les isomorphismes. Mais il ne préserve pas toujours les monomorphismes, ni les épimorphismes.

## 4.6 Définition

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est *fidèle*(resp. *pleinement fidèle*)si pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$, l'application
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$$
est injective (resp. bijective).
Il est *essentiellement surjectif* si tout objet de $\mathcal{C}'$ est isomorphe à un objet de la forme $F(X)$.
Une catégorie $\mathcal{C}$ est *concrète* s'il existe un foncteur fidèle $\mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ appelé foncteur oubli.

## 4.7 Exemples

Les catégories $A$-**Mod**, **Ann**, **Mon**, **Top**, **R-evn**, etc. sont concrètes. Le foncteur $\mathbf{Mat}_A \to A$-**mod** est pleinement fidèle. Le foncteur $\mathbf{Mat}_K \to K$-**evf** est essentiellement surjectif.

## 4.8 Proposition

i) Le composé de deux foncteurs (pleinement) fidèles est (pleinement) fidèle.

ii) Un foncteur d'inclusion $\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$ est toujours fidèle. Il est pleinement fidèle s'il fait de $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$.

iii) Si $F$ est pleinement fidèle et $F(X)$ isomorphe à $F(Y)$, alors $X$ est isomorphe à $Y$.

iv) Si $F$ est fidèle et $F(f)$ est un monomorphisme, alors $f$ aussi (et dual).

## 4.9 Exemple

Dans une catégorie concrète, tout morphisme injectif (resp. surjectif) est un mono- (resp. épi-) morphisme.

# 5 Transformations naturelles

## 5.1 Définition

Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ deux foncteurs. Une *transformation naturelle*

$$\alpha : F \to G$$

est une collection de morphismes

$$\alpha_X : F(X) \to G(X)$$

pour $X \in \mathcal{C}$ telle que

$$\forall f : X \to Y, G(f) \circ \alpha_X = \alpha_Y \circ F(f).$$

## 5.2 Exemples

i) Le déterminant

$$\det_A : GL_n(A) \to A^*$$

défini une transformation naturelle entre le foncteur $GL_n$ et le foncteur $A \mapsto A^*$ de $\mathbf{Ann} \to \mathbf{Gr}$.

ii) De même, la projection $G \twoheadrightarrow G^{ab}$ est naturelle (entre le foncteur $\mathrm{Id}_{\mathbf{Gr}}$ et le foncteur composé du foncteur d'abélianisation $\mathbf{Gr} \to \mathbf{Ab}$ et du foncteur d'inclusion $\mathbf{Ab} \hookrightarrow \mathbf{Gr}$).

iii) Si $A$ est un anneau commutatif, le morphisme de $M$ dans son bidual

$$M \to \check{\check{M}}, m \mapsto (u \mapsto u(m))$$

est naturel (entre le foncteur Id sur $A$-**Mod** et le foncteur bidual, second itéré du foncteur dual).

## 5.3 Définitions

La transformation

$$\mathrm{Id}_F : F \to F$$

définie par

$$\mathrm{Id}_{FX} = \mathrm{Id}_{F(X)}$$

est l'*identité naturelle*
La *composée*de

$$\alpha : F \to G \text{ et } \beta : G \to H$$

est donnée par

$$(\beta \circ \alpha)_X = \beta_X \circ \alpha_X.$$

On dit que $\alpha : F \to G$ est un *isomorphisme naturel*s'il existe $\beta : G \to F$ tel que

$$\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_F \text{ et } \alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_G .$$

On dit qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est une *équivalence de catégories* s'il existe $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ tel que

$$G \circ F \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \text{ et } F \circ G \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}'} .$$

## 5.4 Exemples

i) Si $A$ est un anneau commutatif et $M$ un $A$-module libre de rang fini, l'isomorphisme de bidualité $M \tilde{\to} \check{\check{M}}$ est naturel.
Par contre, bien que, si $K$ est un corps, le foncteur dual $M \mapsto \check{M}$ est une équivalence de catégories de $K$-**evf** dans lui même, il n'y a pas d'isomorphisme naturel $M \tilde{\to} \check{M}$ dans $K$-**evf**.

ii) Le foncteur

$$\mathbf{Mat}_K \to K\text{-}\mathbf{evf}, n \to K^n$$

est une équivalence de catégories.

iii) Soit $A$-**Op** la catégorie des $A$-modules à opérateurs : les objets sont les couples $(M, u)$ avec

$$M \in A\text{-}\mathbf{Mod} \text{ et } u \in \mathrm{End}_A(M).$$

Un morphisme $(M, u) \to (N, v)$ est un homomorphisme $f : M \to N$ tel que $f \circ u = v \circ f$.
Alors $A$-**Op** est équivalente à $A[X]$-**Mod**.

### 5.5 Remarques

Pour des transformations naturelles, on a toujours

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

Une transformation naturelle $\alpha$ est un isomorphisme si et seulement si pour tout $X$, $\alpha_X$ en est un.
Enfin, si $f : X \to Y$ est un morphisme dans une catégorie $\mathcal{C}$, on a une transformation naturelle $h^f : h^Y \to h^X$ donnée par

$$\mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z), g \to g \circ f.$$

et de même, $h_f : h_X \to h_Y$ donnée par

$$\mathrm{Hom}(Z, X) \to \mathrm{Hom}(Z, Y), g \to f \circ g.$$

### 5.6 Théorème

Un foncteur est une équivalence de catégories si et seulement s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

## 6 Foncteurs représentables

### 6.1 Définition

On dit qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ est *représentable* par $X \in \mathcal{C}$ s'il est naturellement isomorphe au foncteur $h^X$.

### 6.2 Exemples

i) Le foncteur "oubli" sur $\mathbf{Gr}$ est représentable par $\mathbf{Z}$.
   Le foncteur "oubli" sur $A$-$\mathbf{Mod}$ est représentable par $A$.
   Le foncteur "oubli" sur $\mathbf{Top}$ est représentable par $0$.
   Le foncteur "oubli" sur $A$-$\mathbf{Alg}$ est représentable par $A[T]$.
   Le foncteur "oubli" sur la catégorie $\mathbf{Grf}$ des groupes finis n'est pas représentable.

ii) Si $A$ est un anneau commutatif et $S \subset A$, le foncteur

$$B \to \{\phi : A \to B, \phi(S) \subset B^*\}$$

   est représentable par $A[S^{-1}]$.

iii) Le foncteur

$$P \to \mathrm{Bil}((M, N), P)$$

   est représentable par $M \otimes_A N$.

## 6.3 Théorème (Lemme de Yoneda)

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur et $X \in \mathcal{C}$. Alors, les transformations naturelles $h^X \to F$ forment un ensemble noté $\mathrm{Hom}(h^X, F)$.
De plus, on a une bijection

$$F(X) \simeq \mathrm{Hom}(h^X, F)$$

donnée comme suit :
A $s \in F(X)$, on associe la transformation naturelle $\alpha : h^X \to F$ définie par

$$\alpha_Y : h^X(Y) \to F(Y), f \mapsto F(f)(s)$$

pour $Y \in \mathcal{C}$. La réciproque est donnée par

$$\alpha \mapsto \alpha_X(\mathrm{Id}_X).$$

## 6.4 Proposition

i) Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ est représentable par $X \in \mathcal{C}$ si et seulement si

$$\exists s \in F(X), \forall Y \in \mathcal{C}, \forall t \in F(Y),$$

$$\exists! f : X \to Y, F(f)(s) = t.$$

ii) Si $X$ et $X'$ représentent le même foncteur à l'aide de $s$ et $s'$, il existe un unique isomorphisme $f : X \tilde{\to} X'$ tel que $F(f)(s) = s'$.

## 6.5 Définition

Avec les notations du (i) ci dessus, on dit que $X$, muni de $s$, est *universel*pour les $t \in F(Y)$ dans $\mathcal{C}$.

## 6.6 Exemples

On voit que $M \otimes_A N$ est universel pour les applications bilinéaires $M \times N \to P$.
Ou encore, que $A[T]$ est universel pour les éléments de $A$-algèbres.
Un autre exemple est donné par le corps de rupture d'un polynôme irréductible qui est universel pout les racines de ce polynômes dans une extension du corps.

## 6.7 Proposition

i) Un objet est final si et seulement s'il représente le foncteur contravariant

$$Y \mapsto 0$$

(et dual).

ii) Un objet est un produit des $X_i$ si et seulement s'il représente le foncteur

$$Y \mapsto \prod \mathrm{Hom}(Y, X_i)$$

(et dual).

iii) Un objet est un noyau de

$$f, g : X \to Y$$

si et seulement s'il représente le foncteur

$$Z \mapsto \ker(h_f^Z, h_g^Z : \mathrm{Hom}(Z, X) \to \mathrm{Hom}(Z, Y))$$

(et dual).

iv) Un objet est un produit fibré de

$$f_1 : X_1 \to Y, f_2 : X_2 \to Y$$

si et seulement s'il représente le foncteur

$$Z \mapsto \mathrm{Hom}(Z, X_1) \times_{\mathrm{Hom}(Z,Y)} \mathrm{Hom}(Z, X_2)$$

(et dual).

# 7 Diagrammes et limites

## 7.1 Définition

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque et $I$ une petite catégorie.
Un *diagramme commutatif* de base $I$ dans $\mathcal{C}$ est un foncteur $D : I \to \mathcal{C}$ ou $I$ est une petite catégorie.
Un *morphisme* entre deux diagrammes commutatifs est une transformation naturelle.

## 7.2 Remarque

Se donner un diagramme commutatif de base $I$ dans $\mathcal{C}$ revient à se donner une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objet de $\mathcal{C}$ et pour tout $u : i \to j$ un morphisme

$$f_u : X_i \to X_j$$

tel que

$$\forall v : j \to k, f_{v \circ u} = f_v \circ f_u.$$

On voit alors qu'un morphisme de diagrammes $(X_i, f_u) \to (Y_i, g_u)$ est la donnée de morphismes $h_i : X_i \to Y_i$ satisfaisant pour tout $u : i \to j$, $g_u \circ h_i = h_j \circ f_u$.

## 7.3 Remarque

Les diagrammes commutatifs de base $I$ dans $\mathcal{C}$ forment une catégorie $\mathcal{C}^I$ avec les transformations naturelles pour morphismes. On identifie $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}^0$, ou 0 désigne la catégorie triviale.

## 7.4 Proposition

i) Si $I$ est une petite catégorie et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur, il existe un unique foncteur
$$F^I : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}'^I$$
tel que
$$F^I(D) = F \circ D$$
si $D \in C^I$ et
$$F^I(T)_i = F(T_i)$$
si $T$ est un morphisme de $\mathcal{C}^I$ et $i \in I$.
On a toujours $(G \circ F)^I = G^I \circ F^I$.

ii) Si $\lambda : I \to J$ est un morphisme entre petites catégories et $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque, il existe un unique foncteur
$$\lambda^* : \mathcal{C}^J \to \mathcal{C}^I$$
tel que
$$\lambda^*(D) = D \circ \lambda$$
si $D \in \mathcal{C}^J$ et
$$\lambda^*(T)_i = T_{\lambda(i)}$$
si $T$ est un morphisme de $\mathcal{C}^J$ et $i \in I$.
On a toujours $(\mu \circ \lambda)^* = \lambda^* \circ \mu^*$.

iii) Si $I$ et $J$ sont deux petites catégories et $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque, le foncteur
$$\left(C^I\right)^J \to C^{I \times J}$$
qui envoie $D \in \left(C^I\right)^J$ sur le foncteur
$$(i, j) \mapsto D(j)(i)$$
et
$$(u : i \to i', v : j \to j') \mapsto D(j')(u) \circ D(v)_i$$
est une équivalence de catégories.

## 7.5 Définitions

Le foncteur associé au "foncteur final"
$$0_I : I \to 0,$$
est le *foncteur diagonal*
$$0_I^* : C = C^0 \to C^I$$
qui envoie $X$ sur le *diagramme constant*
$$\underline{X} := 0_I^*(X).$$

## 7.6 Définitions

Si $D$ est un diagramme commutatif de base $I$ dans $\mathcal{C}$ et si le foncteur

$$h^D \circ 0_I^* : Y \to \mathrm{Hom}(D, \underline{Y})$$

est représentable par $X$, on dit que $X$ est la *limite inductive* de $D$ et on écrit $X = \varinjlim D$.
Si $X$ est la limite inductive d'un diagramme $D$ dans $\mathcal{C}^{op}$, on dit que $X$ est la *limite projective* de $D$ et on écrit $X = \varprojlim D$.
On dit qu'une limite est *finie* si $I$ est une catégorie finie.

## 7.7 Remarques

Par définition, dire que $X = \varprojlim D$ signifie qu'il existe un morphisme $S : \underline{X} \to D$ tel que si $Y \in \mathcal{C}$ et $T : \underline{Y} \to D$ est un morphisme, alors il existe un unique $g : Y \to X$ tel que $T = g \circ S$.
On dispose bien sûr de la notion de limite sur un ensemble ordonné $(I, \leq)$. Si celui-ci est filtrant (resp. cofiltrant), on parle de *limite inductive filtrante*(resp.*projective cofiltrante*).

## 7.8 Remarque

En reprenant les notations ci-dessus, on voit que

$$X = \varprojlim (X_i, f_u)$$

s'il existe une famille

$$(p_i : X \to X_i)_{i \in I}$$

de morphismes de $\mathcal{C}$ tels que

$$\forall u : i \to j, f_u \circ p_i = p_j,$$

et telle que pour toute famille

$$(g_i : Y \to X_i)_{i \in I}$$

de morphismes de $\mathcal{C}$ satisfaisant

$$\forall u : i \to j, f_u \circ g_i = g_j,$$

il existe un unique morphisme $g : Y \to X$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $g_i = p_i \circ g$.
En particulier, on voit que l'objet final, les produits, les noyaux et les produits fibrés sont des limites projectives. Dualement, l'objet initial, les sommes, les conoyaux et les sommes amalgamées sont des limites inductives.

## 7.9 Exemples

Toutes les limites projectives et inductives existent dans **Ens**, **Top**, **Gr**, $A$-**Mod** ou **Ann**.

## 7.10 Proposition

Si toutes les limite projectives de base $I$ existent dans $\mathcal{C}$, il existe un unique foncteur

$$\varprojlim_I : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$$

qui envoie le diagramme $D$ sur $\varprojlim D$ et le morphisme $T : D \to E$ sur l'unique morphisme

$$f : X := \varprojlim D \to Y := \varprojlim E$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} & \xrightarrow{f} & \underline{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D & \xrightarrow{T} & E \end{array}$$

(et dual).

## 7.11 Lemme

Soit $(X_i, f_u)$ un diagramme de $\mathcal{C}$. Si

$$X' := \prod_i X_i \text{ et } X'' := \prod_{u:i\to j} X_j,$$

on note

$$p : X' \to X$$

l'unique morphisme qui, composé avec la projection $X'' \twoheadrightarrow X_j$ donne la projection $X' \twoheadrightarrow X_j$, et

$$f : X' \to X'',$$

l'unique morphisme qui, composé avec la projection $X'' \twoheadrightarrow X_j$ donne la composée de la projection $X' \twoheadrightarrow X_i$ et de $f_u : X_i \to X_j$. Si $X = \ker(p, f)$, c'est la limite projective de $(X_i, f_u)$.

## 7.12 Proposition

i) Si tous les noyaux et tous les produits (resp. finis) existent dans $\mathcal{C}$, toutes les limites projectives (resp. finies) existent dans $\mathcal{C}$ (et dual).

ii) Si $\mathcal{C}$ possède un objet final et si tous les produits fibrés existent dans $\mathcal{C}$, toutes les limites projectives finies existent dans $\mathcal{C}$ (et dual).

# 8 Foncteurs Exacts

## 8.1 Définition

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est *continu à gauche* (resp. *exact à gauche*)s'il préserve les limites projectives (resp. finies).
On définit dualement la notion de foncteur *continu à droite*(resp. *exact à droite*).
Si les deux conditions sont satisfaites, on dit foncteur *continu*(resp. *exact*).
Attention : la notion de foncteur continu à un autre sens en théorie des Topos.

## 8.2 Exemples

i) Le foncteur "oubli" $\mathbf{Top} \to \mathbf{Ens}$, le foncteur $X \mapsto X^{disc}$ et le foncteur de restriction des scalaires $B$-$\mathbf{Mod} \to A$-$\mathbf{Mod}$ associé à un homomorphisme d'anneaux $A \to B$ sont continus.

ii) Le foncteur $X \mapsto X^{gross}$, les foncteurs "oubli" en général, les foncteurs d'inclusion et le foncteur

$$N \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, N) : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Mod}\text{-}A,$$

si $M \in A$-$\mathbf{Mod}$, sont continus à gauche.

iii) Le foncteur d'extension des scalaires

$$A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod},$$

le foncteur $A \mapsto A^{(E)}$, le foncteur $G \to A^{(G)}$, les foncteurs

$$X \mapsto \hat{X}, G \mapsto G^{ab}, N \to M \otimes_A N$$

sont continus à droite.

iv) Si $S$ est une partie multiplicative d'un anneau commutatif $A$, le foncteur

$$M \to S^{-1}M, A\text{-}\mathbf{Mod} \to S^{-1}A\text{-}\mathbf{Mod}$$

est exact.

## 8.3 Proposition

i) Si tous les noyaux et les produits (resp. finis) existent dans $\mathcal{C}$ et sont préservés par $F$, alors alors $F$ est continu (resp. exact) à gauche (et dual).

ii) Si $\mathcal{C}$ possède un objet final préservé par $F$ et si tous les produits fibrés existent dans $\mathcal{C}$ et sont préservés par $F$, alors alors $F$ est exact à gauche (et dual).

## 8.4 Proposition

i) Le composé de deux foncteurs continus (resp. exacts) à gauche est continu (resp. exact) à gauche (et dual).

ii) Un foncteur exact à gauche préserve les monomorphismes (et dual).

iii) Le foncteur

$$h_X : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}, Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, X)$$

est exact à gauche.

## 8.5 Exemple

Soit $G$ un groupe et $\mathcal{F}$ un ensemble de sous-groupes de $G$ ordonné par inclusion. On dispose d'un diagramme commutatif évident

$$D : \mathcal{F} \to \mathbf{Ens}, H \to G/H.$$

Et on peut considérer sa limite projective

$$\hat{G}^{/\mathcal{F}} = \varprojlim G/H$$

et l' application canonique

$$\iota : G \to \hat{G}^{/\mathcal{F}}.$$

Comme le foncteur *disc* préserve les limites projectives, si on munit $G/H$ de la topologie discrète pour $H \in \mathcal{F}$, on voit que $\hat{G}^{/\mathcal{F}}$ est muni d'une structure d'espace topologique et que $\iota$ est continu.
Pour la même raison, si les sous-groupes sont distingués, $\hat{G}^{/\mathcal{F}}$ est muni d'une structure de groupe et $\iota$ est un homomorphisme de groupes.
Enfin, si les deux conditions sont satisfaites, on obtient un groupe topologique et un homomorphisme de groupes topologiques.
Par exemple, on peut considérer l'ensemble $\mathcal{N}$ de tous les sous-groupes distingués d'indice fini $N$ de $G$. On dit alors que

$$\hat{G} := \hat{G}^{/\mathcal{F}}$$

est le *complété profini*de $G$. On dit que $G$ est un *groupe profini*si $G \tilde{\to} \hat{G}$. Par exemple, le groupe de Galois d'une extension galoisienne (infinie) est un groupe profini.
Si $A$ est un anneau, $M$ un $A$-module, et $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de $A$, on peut prendre pour $\mathcal{F}$ la famille des $\mathfrak{a}^n M$ et on écrit

$$\hat{M}^{\mathfrak{a}} := \varprojlim M/\mathfrak{a}^n M.$$

On dit que c'est le *complété*de $M$ le long de $\mathfrak{a}$. Toujours parce que les foncteurs en question sont continus à gauche, on voit que $\hat{A}^{\mathfrak{a}}$ est un anneau topologique et que $\hat{M}^{\mathfrak{a}}$ est un $\hat{A}^{\mathfrak{a}}$-module topologique.
Un exemple classique est fourni par l'anneau des entiers $p$-adiques

$$\mathbf{Z}_p := \varprojlim \mathbf{Z}/p^n$$

pour $p$ premier. Un autre est donné par

$$A[[X_1, \ldots, X_n]]$$

qui est le complété de $A[X_1, \ldots, X_n]$ le long de l'idéal $(X_1, \ldots, X_n)$.

# 9 Foncteurs adjoints

## 9.1 Définition

On dit qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est *adjoint à gauche* à un foncteur $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ si on a un isomorphisme naturel de foncteurs

$$\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}' \to \mathbf{Ens}$$

$$\mathrm{Hom}(F(X), X') \tilde{\to} \mathrm{Hom}(X, G(X')).$$

On dit aussi que $G$ est *adjoint à droite*à $F$.

## 9.2 Exemples

i) Le foncteur oubli **Top** $\to$ **Ens** a pour adjoint à gauche (resp. droite) le foncteur $E \mapsto E^{disc}$ (resp. $E \mapsto E^{gross}$).
   Le foncteur oubli $A$-**Mod** $\to$ **Ens** a pour adjoint à gauche le foncteur $E \mapsto A^{(E)}$.
   Le foncteur oubli $A$-**Alg** $\to$ **Mon** a pour adjoint à gauche le foncteur $G \mapsto A^{(G)}$.

ii) Le foncteur $G \mapsto G^{ab}$ est adjoint à gauche au foncteur d'inclusion **Ab** $\hookrightarrow$ **Gr**.
   Le foncteur $X \mapsto \hat{X}$ est adjoint à gauche au foncteur d'inclusion

$$\mathbf{Comp} \hookrightarrow \mathbf{Met} \text{ ou } R\text{-}\mathbf{evn} \hookrightarrow \mathbf{Ban}.$$

iii) Si $M$ est un $A$-module à gauche, le foncteur

$$N \to M \otimes_A N$$

   est adjoint au foncteur

$$N \to \mathrm{Hom}(M, N).$$

   Le foncteur extension des scalaires est adjoint à gauche au foncteur de restriction des scalaires.

## 9.3 Définition

Si $F$ est adjoint à gauche à $G$, on note $\alpha^X$ l'image de $Id_{F(X)}$ sous l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(F(X), F(X)) \tilde{\to} \mathrm{Hom}(X, G(F(X)))$$

et $\beta^X$ l'antécédent de $Id_{G(X')}$ sous l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(F(G(X'), X') \tilde{\to} \mathrm{Hom}(G(X'), G(X')).$$

On dit que les transformations naturelles

$$\alpha : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$$

et

$$\beta : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}'}$$

sont les *morphismes d'adjonction*.

## 9.4 Exemples

Les morphismes d'adjonction associés au foncteur oubli **Top** $\to$ **Ens** sont l'identité et les applications continues évidentes

$$X^{disc} \to X \text{ et } X \to X^{disc}.$$

Les morphismes d'adjonction associés au foncteur oubli $A$-**Mod** $\to$ **Ens** sont le morphisme d'inclusion $E \hookrightarrow A^{(E)}$ et le morphisme évident $A^{(M)} \to M$.
Les morphismes d'adjonction associés au foncteur d'inclusion **Ab** $\hookrightarrow$ **Gr** sont l'identité et le morphisme naturel $G \to G^{ab}$.
Les morphismes d'adjonction associés à la complétion sont l'identité et l'inclusion.
Les morphismes d'adjonction associés aux foncteurs de restriction et d'extension des scalaires sont l'identité et le morphisme évident

$$B \otimes_A M \to M, b \otimes m \to bm.$$

## 9.5 Proposition

Le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est adjoint à gauche au foncteur $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ si et seulement s'il existe

$$\alpha : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F \text{ et } \beta : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}'}$$

tels que les composés

$$F \xrightarrow{\alpha} F \circ G \circ F \xrightarrow{\beta} F$$

et

$$G \xrightarrow{\beta} G \circ F \circ G \xrightarrow{\alpha} G$$

soient les identités de $F$ et de $G$. Les morphismes $\alpha$ et $\beta$ sont alors les morphismes d'adjonction.

## 9.6 Proposition

i) Deux adjoins à gauche d'un même foncteur sont isomorphes (et dual).
ii) Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et $F' : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ sont adjoints à gauche à $G$ et $G'$ respectivement, alors $F' \circ F$ est adjoint à gauche à $G \circ G'$.
iii) Un foncteur $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ possède un adjoint $F$ à gauche si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{C}$, le foncteur $h^X \circ G$ est représentable. Il est alors représenté par $F(X)$ (et dual).
iv) Toutes les limites projectives de base $I$ existent dans $\mathcal{C}$ si et seulement si le foncteur $X \to \underline{X}$ possède un adjoint à droite $G$ et alors $G = \varprojlim_I$ (et dual).

## 9.7 Lemme (d'extension de Kan)

Soit $\lambda : I \to J$ un morphisme de petites catégories.
Pour tout $j \in J$, on note $I/j$ la catégorie dont les objets sont les couples

$$(i, v : \lambda(i) \to j)$$

et les flèches

$$(i, v) \to (i', v')$$

sont les $u : i \to i'$ tels que $v' \circ \lambda(u) = v$. On note encore $j : I/j \to I$ le morphisme $(i, v) \mapsto i$.
Alors, $\lambda^* : \mathcal{C}^J \to \mathcal{C}^I$ possède un adjoint $\lambda_!$ à gauche si et seulement si pour tout $D \in \mathcal{C}^I$ et tout $j \in J$, $\varinjlim_{I/j} j^* D$ existe.
On a alors $\lambda_! D = \varinjlim_{I/j} j^* D$.

## 9.8 Proposition

i) Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est adjoint à gauche à $G$ et si $I$ est une petite catégorie, alors $F$ et $G$ induisent une adjonction entre $\mathcal{C}^I$ et $\mathcal{C}'^I$.

ii) Un foncteur ayant un adjoint à gauche est continu à gauche (et dual).

iii) Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur ayant un adjoint $G$ à droite. Alors, $G$ est fidèle (resp. pleinement fidèle) si et seulement si le morphisme d'adjonction

$$\beta : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}'}$$

est un monomorphisme (resp. isomorphisme) (et dual).

iv) Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur ayant un adjoint pleinement fidèle $G$ à droite et $D$ un diagramme de $\mathcal{C}'$. Si

$$X = \varinjlim(G \circ D),$$

alors $F(X) = \varinjlim D$ et si

$$Y = \varprojlim(G \circ D),$$

alors $F(Y) = \varprojlim D$ (et dual).

## 9.9 Exemple

On sait que le foncteur d'inclusion **Ab** $\hookrightarrow$ **Gr** est pleinement fidèle a pour adjoint à droite le foncteur $G \to G^{ab}$.
Si $D$ est un diagramme de groupes abéliens et $G$ sa limite projective (resp. inductive) dans **Gr**, alors sa limite projective (resp. inductive) dans **Ab** est $G^{ab}$.
Par exemple, si $G$ est le produit libre de deux groupes abéliens $G_1$ et $G_2$, alors $G^{ab}$ est la somme directe de $G_1$ et $G_2$.

# 10 Catégories additives

## 10.1 Définitions

Une *structure pré-additive* sur une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée pour tout $M, M' \in \mathcal{C}$, d'une structure de groupe abélien sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M')$ de telle sorte que pour tout $M, M', M'' \in \mathcal{C}$, l'application de composition

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M') \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M', M'') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M'')$$

soit bilinéaire.
On dit qu'un objet $M$ est *nul* si $\mathrm{Id}_M = 0$.
On dit qu'un objet $M$ est *somme directe* de $M_1$ et $M_2$ s'il existe

$$p_k : M \to M_k, i_k : M_k \to M, k = 1, 2$$

tels que

$$p_k \circ i_k = \mathrm{Id}_{M_k}, k = 1, 2 \text{ et } i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = \mathrm{Id}_M .$$

## 10.2 Remarque

Il revient au même de munir $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}^{op}$ d'une structure pré-additive et les notions d'objets nuls et de sommes directes sont autoduales.

## 10.3 Proposition

Supposons que $\mathcal{C}$ est munie d'une structure pré-additive. Alors,
Un objet est nul si et seulement s'il est final (dual).
Un objet $M$ est somme directe de $M_1$ et $M_2$ si et seulement si c'est un produit de $M_1$ et $M_2$ avec projections $p_1, p_2$ (dual).

## 10.4 Définition

On dit que $\mathcal{C}$ est une *catégorie additive* s'il existe une structure pré-additive pour laquelle il y a un objet nul 0 et toutes les sommes directes existent.

## 10.5 Remarques

Les catégories $A$-**Mod**, $K$-**evf**, $\mathbf{Mat}_A$, **R-evt**, **R-evn** et **Ban** sont additives.
Si $\mathcal{C}$ est une catégorie additive, elle possède une unique structure pré-additive.
Si $\mathcal{C}$ est une catégorie additive, $\mathcal{C}^{op}$ aussi.

## 10.6 Proposition

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive. Alors,

i) Un morphisme $f : M \to N$ est un monomorphisme si et seulement si chaque fois que $f \circ u = 0$, on a $u = 0$ (et dual).

ii) Dans un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{f'} & N' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array},$$

$f$ est un monomorphisme si et seulement si $f'$ en est un (et dual).

## 10.7 Remarque

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie additive, on a un foncteur

$$\mathrm{Hom} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}.$$

## 10.8 Définition

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ entre deux catégories additives est *additif* si pour tout $M, N \in \mathcal{C}$ l'application

$$\mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(F(M), F(N))$$

est un homomorphisme de groupes.

## 10.9 Exemples

Les foncteurs $\mathrm{Hom}_A$ et $\otimes_A$ sont additifs. Les foncteurs de restriction et d'extension des scalaires sont aussi additifs.

## 10.10 Proposition

i) Si $\mathcal{C}$ est une catégorie additive, les foncteurs $h^M$ et $h_N$ sont additifs.

ii) Un foncteur est additif si et seulement s'il préserve les sommes directes (et l'objet nul).

iii) Le composé de deux foncteurs additifs est additif.

## 10.11 Remarque

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive et $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ un foncteur pleinement fidèle ayant un adjoint $F$ à gauche. Alors $\mathcal{C}'$ est additive.

## 10.12 Définition

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive. On défini le *noyau* $\ker f$ de $f : M \to N$ comme étant le noyau de $f$ et 0 (s'il existe). On définit le *conoyau* $\operatorname{coker} f$ dualement. Ceux-ci sont bien sûr définis à (unique) isomorphisme près.
On dit que $\mathcal{C}$ est *exacte* si tout morphisme possède un noyau et un conoyau. On note alors $M/N$ le conoyau d'un monomorphisme $N \hookrightarrow M$.

## 10.13 Remarques

Les catégories $A$-**Mod**, $K$-**evf**, **R-evt**, **R-evn** et **Ban** sont exactes mais pas $\mathbf{Mat_Z}$.
Si $\mathcal{C}$ est exacte, $\mathcal{C}^{op}$ aussi.
Dans une catégorie exacte, toutes les limites finies existent.

## 10.14 Proposition

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie exacte. Alors,

i) On a $\ker \mathrm{Id}_M = 0$ et
$$\ker(0 : M \to N) = M$$
(et dual).

ii) Si $g$ est un monomorphisme, alors
$$\ker(g \circ f) = \ker f$$
(et dual).

iii) Un morphisme est un monomorphisme si et seulement si son noyau est nul (et dual).

iv) Si $f : M \to N$ est un morphisme, la projection
$$M \twoheadrightarrow M/\ker f$$
a pour noyau $\ker f$ (dual).

# 11 Catégories abéliennes

## 11.1 Définition

On dit qu'une catégorie exacte $\mathcal{C}$ est *abélienne* si tout monomorphisme (resp. épimorphisme) est un noyau (resp. conoyau).

## 11.2 Remarque

Les catégories $A$-**Mod** et $K$-**evf** et **Ban** sont abéliennes mais pas **R-evt** ni **R-evn**.
Si $\mathcal{C}$ est abélienne, $\mathcal{C}^{op}$ aussi.

## 11.3 Proposition

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Alors,

i) Si $f : N \hookrightarrow M$ est un monomorphisme, $N$ est le noyau de $M \to M/N$ (dual).

ii) Tout morphisme $f : M \to N$ se factorise de manière unique à isomorphisme près en un épimorphisme $M \to \mathrm{Im}\, f$ suivi d'un monomorphisme $\mathrm{Im}\, f \to N$. On a
$$\mathrm{Im}\, f = \ker(N \to \operatorname{coker} f)$$
(et dual).

iii) Tout homomorphisme qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme est un isomorphisme.

iv) Dans un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{f} & N' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f'} & N \end{array},$$

si $f$ est un épimorphisme, alors $f'$ aussi et le diagramme est cocartésien (et dual).

## 11.4 Définition

On dit que la suite

$$0 \to M' \to M \xrightarrow{f} M''$$

est *exacte (à gauche)* si la suite

$$M' \to M \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} M''$$

est exacte à gauche. On définit dualement la notion de *suite exacte à droite*.
On dit qu'une suite

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est *exacte* si elle est exacte à droite et à gauche.
Une suite

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$$

est *scindée*s'il existe un isomorphisme

$$f : M' \bigoplus M'' \tilde{\to} M$$

tel que

$$p \circ f : M' \bigoplus M'' \to M''$$

et

$$f^{-1} \circ i : M' \to M' \bigoplus M''$$

soient les morphismes canoniques.

## 11.5 Exemple

Un anneau commutatif intègre est un corps si et seulement si toutes les suites exactes de $A$-modules sont scindées.

## 11.6 Proposition

Une suite

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$$

est scindée si et seulement si elle est exacte et $p$ possède une section (et dual).

## 11.7 Proposition

i) Un foncteur entre catégorie abéliennes est exact à gauche si et seulement si il est additif et préserve les suites exactes à gauche (et dual).

ii) Si un foncteur additif $G$ possède un adjoint $F$ à gauche, celui ci est aussi additif et on a un isomorphisme de bifoncteurs à valeur dans **Ab** (et dual).

iii) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ un foncteur pleinement fidèle ayant un adjoint $F$ à gauche. Alors $\mathcal{C}'$ est abélienne.