Groupes de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_C$

Bernard Le Stum

Version du 26 mai 2015

Table des matières

1 Groupes de Barsotti-Tate **2**

2 Le cas où p est nilpotent **3**

3 La caractéristique p **6**

4 Passage à la limite **8**

5 Groupes de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_C$ **10**

6 Le lien avec la courbe **12**

7 Espaces adiques **15**

8 Fibre générique d'un groupe de Barsotti-tate **16**

9 Groupes de Barsotti-Tate analytiques **18**

10 Espaces de Rapoport-Zink **19**

Bibliographie **21**

Introduction

Ce travail s'inscrit dans une série d'exposés consacrés à l'article [7] de Peter Scholze et Jared Weinstein. Nous allons présenter ici les outils utiles à la compréhension du théorème 5.2.1 (aussi présenté dans [6]). Je remercie vivement Alberto Vezzani pour toutes les conversations que nous avons eues ces dernières semaines et qui m'ont étés bien utiles pour éclaircir certains points. Grand merci aussi à Matthieu Romagny pour l'organisation de ce groupe de travail. Je tiens enfin à préciser (s'il en était besoin) que, contrairement aux erreurs qui risquent d'apparaître, aucun des résultats qui suit n'est dû à l'auteur.

1 Groupes de Barsotti-Tate

On fixe un nombre premier p (différent de 2 pour éviter les p^2 dans les démonstrations).

Un *groupe de Barsotti-Tate* sur un anneau R est un faisceau en groupes abéliens fppf G sur $\mathrm{Spec}(R)$ qui est

1. p-divisible (c'est à dire que $p : G \to G$ est surjective fppf)
2. de p-torsion (c'est à dire que $G = \varinjlim (\ker p^n : G \to G)$)
3. et tel que $\ker p : G \to G$ soit un schéma fini localement libre.

Par exemple, on pourra considérer le groupe constant $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ ainsi que son dual $\mu_{p^\infty} = \varinjlim \mu_{p^n}$ avec $\mu_{p^n}(R) := \{a \in R, a^{p^n} = 1\}$.

On écrira ${}_nG := \ker p^n : G \to G = \mathcal{H}om(\mathbb{Z}/p^n, G)$. On voit alors aisément que pour tout n, ${}_nG$ est fini localement libre. Bien sûr, cette dernière condition signifie que ${}_nG = \mathrm{Spec}(A_n)$ ou A_n est un R-module localement libre de rang fini.

Pour des groupes de Barsotti-Tate, on a toujours $\mathcal{H}om(G, H) = \varprojlim \mathcal{H}om({}_nG, {}_nH)$. Comme conséquence, on peut voir la catégorie des groupes de Barsotti-Tate sur R comme sous catégorie pleine de celles des diagrammes (indexés par $(\mathbb{N}, \leq)$) de groupes finis localement libres sur R. Notons aussi qu'un groupe de Barsotti-Tate est automatiquement un $\mathbb{Z}_p$-module et que $\mathcal{H}om(G, H)$ est un $\mathbb{Z}_p$-module sans torsion.

La structure d'algèbre sur le R-module A_n est définie par la multiplication $\mu : A \otimes_R A \to A$ et l'unité $\epsilon : R \to A$. De même, la structure de groupe sur ${}_nG$ fournit un morphisme de comultiplication $\Delta : A \to A \otimes_R A$ et un morphisme de co-unité $\eta : A \mapsto \mathcal{R}$ qui en font une co-algèbre (notion duale). Et les structures d'algèbre et de co-algèbre sont compatibles en un sens qui fait de A_n une bi-algèbre (notion symétrique).

On définit le *dual* de G par $\check{G} := \varinjlim \mathcal{H}om({}_nG, \mathbb{G}_m)$. C'est aussi un groupe de Barsotti-Tate. En fait, A_n et son R-module dual $\check{A}_n := \mathrm{Hom}_R(A_n, R)$ sont des bi-algèbres duales et on a

$$ {}_n\check{G} = \mathcal{H}om({}_nG, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Spec}(\check{A}_n). $$

Passons maintenant à la notion de *module de Tate*. Pour tout n, le groupe abélien ${}_nG$ est un $\mathbb{Z}/p^n$-module plat de rang h indépendant de n et appelé *hauteur* de G. On peut considérer

$$ T_p(G) = \varprojlim_p {}_nG = \mathcal{H}om(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G) \quad \left(\text{resp.} \quad V_p(G) = \varprojlim_p G = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(G)\right) $$

qui est un $\mathbb{Z}_p$-module sans torsion de rang h (resp. un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension h). Par exemple, on a

$$T_p(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \mathcal{E}nd(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p \quad (\text{resp.} \quad V_p(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Q}_p)\,,$$

et on posera

$$T_p(\mu_{p^\infty}) =: \mathbb{Z}_p(1) \quad (\text{resp.} \quad V_p(\mu_{p^\infty}) =: \mathbb{Q}_p(1))\,.$$

Enfin, en passant à la limite sur les

$$0 \to {}_nG \to G \xrightarrow{p} G \to 0.$$

on obtient une suite exacte courte

$$0 \to T_p(G) \to V_p(G) \to G \to 0.$$

Remarquons que Scholze et Weinstein notent $\tilde{G}$ ce que nous notons $V_p(G)$.

Rappelons que si G est n'importe quel groupe sur R (ou même un faisceau pointé), on pose

$$\mathrm{Lie}(G) := \ker[G(R[\epsilon]) \to G(R)]$$

avec $R[\epsilon] := R[T]/T^2$ et on définit ensuite un faisceau en posant $\mathcal{L}ie(G)(S) := \mathrm{Lie}(G_S)$ si S est une R-algèbre. Notons que si G est représentable, alors $\mathcal{L}ie(G)$ est un fibré vectoriel représentable par $\mathrm{Spec}(\mathrm{S}^\bullet \omega_G)$ avec $\omega_G := 0^*\Omega^1_G$. Alternativement, on peut aussi considérer $\mathcal{T}_G := \mathcal{H}om_R(\mathrm{Spec}(R[\epsilon]), G)$, qui lui est représentable par $\mathrm{Spec}(\mathrm{S}^\bullet \Omega^1_G)$ lorsque G est représentable, et poser $\mathcal{L}ie_G := 0^{-1}\mathcal{T}_G$.

Si U est une co-algèbre, il est pratique de considérer son *cospectre*

$$\mathrm{Cos}(U) := \mathrm{Hom}_{co}(R, U) \simeq \{\varphi \in U, \quad \Delta(\varphi) = \varphi \otimes \varphi, \eta(\phi) = \phi\}$$

si bien que, lorsque G est notre groupe de Barsotti-Tate, on a $G(R) = \mathrm{Cos}(U)$ avec $U := \varinjlim \check{A}_n$. On en déduit immédiatement que

$$\mathrm{Lie}(G) \simeq \mathrm{Prim}(U) := \{\varphi \in U, \quad \Delta(\varphi) = \varphi \otimes 1 + 1 \otimes \varphi\}$$

(on peut rajouter la condition $\eta(\phi) = 1$ mais elle est automatique). Bien sûr, on a une description analogue dans le cas des ${}_nG$ et on peut aussi vérifier que $\mathcal{L}ie({}_nG) \simeq \mathcal{H}om({}_n\check{G}, \mathbb{G}_a)$.

Pour conclure cette section, on remarquera que μ_{p^∞}, par exemple, n'est *pas* formellement lisse sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. Pour avoir une géométrie raisonnable, il est nécessaire de travailler modulo une puissance de p (ou p-adiquement).

2 Le cas où p est nilpotent

La plupart des résultats exposés dans cette section demandent un travail conséquent pour être établis.

On suppose ici que p est *nilpotent* sur R. On note $R_0 = R/p$ et $G_0 := G \otimes_R R_0$. Pour le résultat suivant, on dispose d'une démonstration rédigée par Yves André :

Theorem 1 (Drinfeld) *Le foncteur $G \mapsto G_0$ est une équivalence à isogénie près sur les groupes de Barsotti-tate :*

$$\mathrm{BT}(R)[1/p] \simeq \mathrm{BT}(R_0)[1/p].$$

Cela signifie que le foncteur est essentiellement surjectif et que l'on a toujours

$$\mathrm{Hom}(G, H)[1/p] \simeq \mathrm{Hom}(G_0, H_0)[1/p].$$

On en déduit immédiatement que

$$(V_p G)(R) = (V_p G)(R_0) = (V_p G_0)(R_0),$$

ce qui nous fournit un premier invariant qui ne dépend que de la réduction de G modulo p.

Le résultat suivant est le théorème 3.3.13 de [4]) :

Theorem 2 *G est formellement lisse.*

Il suit que le le complété G^{inf} de G le long de la section unité est représentable par un schéma formel très sympathique (localement isomorphe au complété d'un espace affine le long de l'origine). On dit que G^{inf} est un *groupe de Lie formel*. Notons qu'il en résulte que $T_p G$ est aussi représentable. Le faisceau conormal à la section unité ω_G est localement libre de rang fini, de même que $\mathcal{L}ie(G)$, et ces deux faisceaux sont duaux l'un de l'autre. Notons que les voisinages infinitésimaux (d'ordre fixé k) de G et de ${}_nG$ sont identiques pour $n >> 0$. Il suit que $\omega_{{}_nG} = \omega_G$ et que $\mathcal{L}ie({}_nG) = \mathcal{L}ie(G)$ pour $n >> 0$. On définit la *dimension* de G comme le rang de $\mathcal{L}ie(G)$ et on a

$$\mathrm{haut}(G) = \mathrm{haut}(\check{G}) = \dim(G) + \dim(\check{G}).$$

Considérons maintenant les identifications suivantes dans $U := \varinjlim \check{A}_n$:

$$\ker[G(R) \to G(R_0)] = \{\varphi = 1 + p\psi, \quad \Delta(\varphi) = \varphi \otimes \varphi, \eta(\varphi) = \varphi\}.$$

et

$$p\mathrm{Lie}(G) = (p) \cap \mathrm{Lie}(G) = \{p\varphi, \quad \Delta(\varphi) = \varphi \otimes 1 + 1 \otimes \varphi\}$$

En posant

$$\log(1 + p\psi) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}(n-1)! p^{[n]} \psi^n \quad \text{et} \quad \exp(p\varphi) = \sum_{n \geq 0} p^{[n]} \varphi^n$$

(on rappelle que p est nilpotent sur R et que $p^{[n]} := p^n/n! \in \mathbb{Z}_p$), on obtient un isomorphisme de groupes

$$\ker[G(R) \to G(R_0)] \simeq p\mathrm{Lie}(G).$$

Notons que l'on dispose des résultats analogues pour les ${}_nG$ ou pour n'importe quelle extension de G par un cohérent (et qu'on peut aussi faire le quotient par rapport à n'importe quel idéal à puissances divisées nilpotentes).

J'aime à travailler dans le gros site cristallin (nilpotent) fppf $CRIS(R/\mathbb{Z}_p)$ comme dans [2] (voir aussi [1]). On définit alors le *cristal de Dieudonné* (covariant) de G par

$$\mathbb{M}(G) := \mathcal{E}xt^1(\underline{\check{G}}, \mathcal{O}_{R/\mathbb{Z}_p})$$

(ou $\underline{\check{G}}$ désigne l'image directe de $\check{G}$ par le morphisme d'inclusion de sites). C'est un cristal localement libre de rang haut(G). En fait, la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{I}_{R/\mathbb{Z}_p} \to \mathcal{O}_{R/\mathbb{Z}_p} \to \underline{\mathbb{G}}_a \to 0$$

fournit une suite exacte courte (de Hodge)

$$0 \to \mathcal{L}ie(\check{G})\check{} \to \mathbb{M}(G)_R \to \mathcal{L}ie(G) \to 0. \tag{1}$$

De la même manière, on peut aussi poser

$$\mathbb{E}(G) := \varinjlim \mathcal{H}om({}_n\underline{\check{G}}, \mathcal{O}^{\times}_{R/\mathbb{Z}_p}).$$

La suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{I}_{R/\mathbb{Z}_p} \stackrel{\exp}{\to} \mathcal{O}^{\times}_{R/\mathbb{Z}_p} \to \underline{\mathbb{G}}_m \to 0$$

fournit une suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{L}ie(\check{G})\check{} \to \mathbb{E}(G)_R \to G \to 0 \tag{2}$$

qui est l'extension universelle de G par un faisceau cohérent. On retrouve la suite (1) en appliquant le foncteur $\mathcal{L}ie$ à la suite (2) et on a donc en particulier

$$\mathbb{M}(G)_R = \mathcal{L}ie(\mathbb{E}(G)_R).$$

Notons enfin qu'on déduit de la suite (2) un isomorphisme $\varprojlim_p \mathbb{E}(G)_R \simeq V_p(G)$ et on pourra donc considérer le morphisme

$$s : V_p(G) \simeq \varprojlim_p \mathbb{E}(G)_R \to \mathbb{E}(G)_R, \quad (\varphi_n) \to \lim [p^n]\tilde{\varphi}_n \tag{3}$$

ou $\tilde{\varphi}_n$ désigne donc un relèvement quelconque de φ_n.

On pose maintenant

$$A_{\text{cris}} := H^0_{\text{cris}}(R/\mathbb{Z}_p, \mathcal{O}_{R/\mathbb{Z}_p}) \quad \text{et} \quad B^+_{\text{cris}} := A_{\text{cris}}[1/p]$$

si bien que

$$\mathrm{M}(G) := H^0_{\text{cris}}(R/\mathbb{Z}_p, \mathbb{M}(G))$$

(resp. $\mathrm{M}(G)[1/p]$) est un A_{cris}- (resp. B^+_{cris}-) module projectif de type fini.

On obtient ainsi des foncteurs

$$\mathrm{BT}(R) \to \mathrm{Mod}(A_{\text{cris}}) \quad \text{et} \quad \mathrm{BT}(R)[1/p] \to \mathrm{Mod}(B^+_{\text{cris}}).$$

Par exemple, on a $\mathbb{M}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \mathcal{O}_{R/\mathbb{Z}_p}$, et donc $\mathrm{M}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = A_{\mathrm{cris}}$, et par fonctorialité, on aura donc un morphisme

$$T_p(G)(R) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G) \to \mathrm{Hom}_{A_{\mathrm{cris}}}(\mathrm{M}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathrm{M}(G)) = \mathrm{M}(G)$$

qui relie le module de tate au module de Dieudonné, et de même, un morphisme

$$V_p(G)(R) \to \mathrm{M}(G)[1/p].$$

Si I est un idéal à puissances divisées nilpotente de R, on a une équivalence de catégorie entre cristaux sur R et sur R/I et nous identifierons allègrement ces deux catégories. Cela s'applique en particulier au passage de R à R_0 et on aura donc $M(G) = M(G_0)$.

3 La caractéristique p

On supposera ici que R est un anneau de caractéristique p et on va considérer un groupe de Barsotti-tate G sur R.

Si B est un anneau muni d'un endomorphisme φ, on notera $\varphi\mathrm{-Mod}(B)$ la catégorie φ-modules (étales) sur B, c'est à dire les modules projectifs de type fini M munis d'un *Frobenius*, c'est à dire un endomorphisme semi-linéaire φ_M qui devient bijectif modulo torsion après linéarisation. On dira alors que $\lambda = h/r$ est une *pente* de M s'il existe $m \in M$ tel que $\varphi^r(m) = p^h m$ et $\{\varphi^k(m), k \in \mathbb{N}\}$ est facteur direct de rang r dans M. On notera aussi $\mathrm{M}(-1)$ le même B-module, mais muni de $p\varphi$.

Comme on est en caractéristique p, on dispose par fonctorialité d'un Frobenius φ et d'un Verschiebung sur $\mathbb{M}(G)$ dont le composé dans les 2 sens donne la multiplication par p et on a donc en fait des foncteurs

$$\mathrm{BT}(R) \to \varphi\mathrm{-Mod}(A_{\mathrm{cris}}) \quad \text{et} \quad \mathrm{BT}(R)[1/p] \to \varphi\mathrm{-Mod}(B^+_{\mathrm{cris}}).$$

Par exemple, on a $\mathbb{M}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \mathcal{O}_{R/\mathbb{Z}_p}(-1)$, et on en déduit des morphismes

$$T_p(G)(R) \to \mathrm{M}(G)^{\varphi=p} \quad \text{et} \quad V_p(G)(R) \to (\mathrm{M}(G)[1/p](1))^{\varphi=1}.$$

Rappelons que si $R = k$ est un corps parfait, alors le foncteur de Dieudonné induit une équivalence entre les groupes de Barsotti-Tate sur k et les *modules de Dieudonné* sur $W(k)$ (cas classique). Rappelons aussi que, par définition, un F-isocristal sur k est espace vectoriel de dimension finie sur $K := \mathrm{Frac}(W(k))$ muni d'un Frobenius. Autrement dit,

$$F\mathrm{-Iso}(k) = \varphi\mathrm{-Mod}(K).$$

On a donc en fait une équivalence entre les groupes de Barsotti-Tate à isogénie près et les F-isocristaux à pentes dans $[0, 1]$:

$$\mathrm{BT}(k)[1/p] \simeq F\mathrm{-Iso}(k)^{[0,1]}.$$

(la seconde catégorie est équivalente à la catégorie des modules de Dieudonné à isogénie près).

La pleine fidélité du foncteur de Dieudonné se généralise (théorème 4.1.4 de [7]) comme suit :

Theorem 3 (Scholze-Weinstein) *Si R est un anneau finiment semi-parfait, le foncteur de Dieudonné est pleinement fidèle à isogénie près :*

$$\mathrm{BT}(R)[1/p] \hookrightarrow \varphi\mathrm{-Mod}(B_{\mathrm{cris}}^{+}).$$

Rappelons au passage que lorsque R est semi-parfait, on a la description suivante de A_{cris} : si $R^\flat$ le perfectisé de R alors A_{cris} est l'enveloppe à puissance divisées complétée de $W(R^\flat)$ le long de $W(R^\flat) \to R$.

Nous nous intéressons maintenant plus particulièrement au cas $R = \mathcal{O}_C/p$ avec C un corps p-adique algébriquement clos. Les résultats précédents s'interprètent alors joliment sur la courbe de Fargues-Fontaine

$$X = \mathrm{Proj} \oplus_d B_{\mathrm{cris}}^{+,\varphi=p^d}.$$

Tout d'abord, si M est un φ-module sur B_{cris}^{+}, on peut considérer le fibré $\mathcal{E}(M)$ associé à $\oplus M^{\varphi=p^d}$. Ce foncteur $M \mapsto \mathcal{E}(M)$ est en fait une équivalence de catégories

$$\varphi\mathrm{-Mod}(B_{\mathrm{cris}}^{+}) \simeq \mathrm{Fib}(X)$$

(ou la seconde désigne bien évidemment celle des fibrés sur X).

Comme rappelé ci-dessus, un F-isocristal sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est (par définition) un espace vectoriel de dimension finie H sur $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$ muni d'un Frobenius. Comme $W(\overline{\mathbb{F}}_p) \subset A_{\mathrm{cris}}$, on peut considérer $M := B_{\mathrm{cris}}^{+} \otimes_{\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{nr}}} H$ ainsi que le fibré associé qu'on notera plus simplement $\mathcal{E}(H)$. Le *théorème de pureté* de Fargues et Fontaine dit que ce foncteur $H \mapsto \mathcal{E}(H)$ est essentiellement surjectif :

$$F\mathrm{-Iso}(\overline{\mathbb{F}}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{Fib}(X).$$

De même, si G est un groupe de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_C/p$, on notera plus simplement $\mathcal{E}(G)$ le fibré associé à $\mathrm{M}(G)[1/p](1)$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{BT}(\overline{\mathbb{F}}_p)[1/p] \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & F\mathrm{-Iso}(\overline{\mathbb{F}}_p)^{[0,1]} \arrow[d] \\ \mathrm{BT}(\mathcal{O}_C/p))[1/p] \arrow[r, hook] & \mathrm{Fib}(X)^{[0,1]} \end{tikzcd} \tag{4}$$

dont on déduit immédiatement que la flèche du bas est une équivalence et celle de gauche est essentiellement surjective.

4 Passage à la limite

On suppose ici que R est un anneau p-adiquement complet et sans p-torsion.

Si G est un groupe de Barsotti-Tate sur R (c'est à dire sur $\mathrm{Spec}(R)$), on peut considérer son complété p-adique $\mathcal{G}$ qui est un « groupe de Barsotti-tate sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{V})$ ». Plus précisément, si on pose $R_N := R/p^{N+1}$ et $G_N := G \otimes_R R_N$, on aura $\mathcal{G} = \varinjlim G_N$. C'est un schéma formel (mais *pas* nécessairement adique) : on a

$$\mathcal{G} = \varinjlim {}_n\mathcal{G} = \mathrm{Spf}(\varprojlim A_n),$$

avec ${}_n\mathcal{G} := \mathrm{Spf}(A_n)$ si ${}_nG := \mathrm{Spec}(A_n)$. Il faudra cependant bien faire la distinction entre G et $\mathcal{G}$. Par exemple, on aura en général

$$G(R) \neq \mathcal{G}(R) := \varprojlim G(R_N).$$

Pour s'en convaincre, il suffit de regarder le cas $G = \mu_{p^\infty}$ et $R = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, on trouve $\mu_{p^\infty}(\mathbb{C}_p)$ et $1 + \mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$ respectivement (calcul fait plus bas). Dans leur article, Scholze et Weinstein notent G ce que nous appelons $\mathcal{G}$ (ils travaillent directement sur la catégorie des schémas formels).

Par contre, on aura toujours

$${}_nG(R) = {}_n\mathcal{G}(R) := \varprojlim {}_nG(R_N).$$

En d'autre termes, on dispose d'un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} G(R) \arrow[r, "p"] \arrow[d] & G(R) \arrow[d] \\ \mathcal{G}(R) \arrow[r, "p"] & \mathcal{G}(R). \end{tikzcd}$$

Et il suit que tout se passe bien aussi pour les modules de Tate :

$$(T_pG)(R) = (T_p\mathcal{G})(R) := \varprojlim (T_pG)(R_N).$$

Notons maintenant que l'on peut faire les identifications suivantes

$$(V_p\mathcal{G})(R) := \varprojlim (V_pG)(R_N) = (V_pG)(R_0) = (V_pG_0)(R_0).$$

On en déduit un nouveau diagramme cartésien qui nous servira plus bas

$$\begin{tikzcd} (V_pG)(R) \arrow[r] \arrow[d] & G(R) \arrow[d] \\ (V_pG)(R_0) \arrow[r] & \mathcal{G}(R). \end{tikzcd}$$

Notons aussi qu'en passant à la limite, on aura toujours une suite exacte courte

$$0 \to T_p(\mathcal{G}) \to V_p(\mathcal{G}) \to \mathcal{G} \to 0.$$

Par contre, il faut bien faire attention au fait que $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p\mathcal{G} \neq V_p\mathcal{G}$ en général, contrairement à ce qui se passait dans le cadre des schémas.

Nous allons maintenant prolonger le logarithme. Afin d'éviter les confusions, écrivons $[p^n]$ pour la multiplication par p^n sur G et notons (maladroitement)

$$\mathcal{G}_n(R) := \ker[\mathcal{G}(R) \stackrel{[p^n]}{\to} \mathcal{G}(R) \to G(R_0)] = \{\varphi \in \mathcal{G}(R), \quad [p^n]\varphi = 1 + p\psi\}.$$

Comme G_0 est un groupe de torsion, on aura $\mathcal{G}(R) = \cup_n \mathcal{G}_n(R)$ et, par définition, on voit aussi que la multiplication par p^n sur G induit un morphisme $[p^n] : \mathcal{G}_n(R) \to \mathcal{G}_0(R)$. D'autre part, on dispose par passage à la limite du morphisme

$$\log : \mathcal{G}_0(R) \simeq p\mathrm{Lie}(\mathcal{G}).$$

Enfin, comme le logarithme est un morphisme de groupes, on aura toujours $\log \circ [p^n] = p^n \circ \log$. Puisque R est sans torsion, on peut donc prolonger le logarithme de manière unique en

$$\log : \mathcal{G}(R) \to \mathrm{Lie}(\mathcal{G})[1/p]$$

avec la condition que $\log(\varphi) = \frac{1}{p^n} \log([p^n]\varphi)$ si $n >> 0$.

On obtient en fait une suite exacte à gauche :

$$0 \to G(R) \to \mathcal{G}(R) \stackrel{\log}{\to} \mathrm{Lie}(\mathcal{G})[1/p].$$

Plus précisément, par construction, on a $(\ker \log) \cap \mathcal{G}_n = {}_nG(R)$. Et on en déduit une autre suite exacte à gauche :

$$0 \to (V_pG)(R) \to (V_pG)(R_0) \stackrel{\log}{\to} \mathrm{Lie}(\mathcal{G})[1/p].$$

Enfin, pour la théorie de Dieudonné, on écrira $\mathrm{M}(G) := \mathrm{M}(\mathcal{G}) := \mathrm{M}(G_N)$ qui ne dépend pas de N. En passant à la limite sur les suites (1), on obtient une suite exacte de Hodge

$$0 \to \mathrm{Lie}(\check{\mathcal{G}})\check{} \to \mathrm{M}(G) \otimes_{A_{\mathrm{cris}}} R \to \mathrm{Lie}(\mathcal{G}) \to 0. \tag{5}$$

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4 *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} (V_pG)(R_0) & \xrightarrow{\log} & \mathrm{Lie}(\mathcal{G})[1/p] \\ \downarrow & & \uparrow \\ M(G)[1/p] & \longrightarrow & M(G) \otimes_{A_{\mathrm{cris}}} R[1/p] \end{array}$$

est commutatif.

Exactement comme ci-dessus, on peut construire un logarithme pour l'extension universelle :

$$(\mathbb{E}\mathcal{G})(R) \xrightarrow{\log} \mathrm{Lie}(\mathbb{E}\mathcal{G})[1/p] = M(G) \otimes_{A_{\mathrm{cris}}} R[1/p].$$

D'autre part, on dispose, en passant à la limite sur les morphismes (3), d'un morphisme naturel

$$s : (V_p\mathcal{G})(R) \to (\mathbb{E}\mathcal{G})(R).$$

On peut alors considérer le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(V_p\mathcal{G})(R) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, "s"] & \mathcal{G}(R) \arrow[r, "\log"] & \mathrm{Lie}(\mathcal{G})[1/p] \\
(V_pG)(R_0) \arrow[d] & (\mathbb{E}\mathcal{G})(R) \arrow[u] \arrow[r, "\log"] & \mathrm{Lie}(\mathbb{E}\mathcal{G}_R)[1/p] \arrow[u] \arrow[d, equal] \\
M(G)[1/p] \arrow[rr] & & M(G) \otimes_{A_{\mathrm{cris}}} R[1/p]
\end{tikzcd}$$

Par fonctorialité du logarithme il suffit alors de montrer que le diagramme du bas est commutatif. En fait, comme $(V_pG)(R_0) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G_0)[1/p]$, on peut se ramener par linéarité et fonctorialité en G à traiter le cas $G = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ où tout devient trivial.

5 Groupes de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_C$

Soit C un corps p-adique algébriquement clos et G un groupe de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_C$. On notera toujours $G_N := G \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C/p^{N+1}$ et $\mathcal{G} := \varinjlim G_N$.

Considérons à titre d'exemple le cas $G = \mu_{p^\infty}$ et fixons $N \in \mathbb{N}$. Si $x \in \mathfrak{m}_C$, alors il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $v_p(x) \geq \frac{N+1}{r}$. On écrit alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^{p^n} = 1 + \sum_{k=1}^{r-1} \binom{p^n}{k} x^k + \sum_{k=r}^{p^n} \binom{p^n}{k} x^k$$

La seconde somme est nulle modulo p^N et comme $v_p(\binom{p^n}{k}) = n - v_p(k)$, on voit que la première l'est aussi si $n >> N$. En d'autres termes, on voit qu'à N fixé, $1+x$ tombe dans μ_{p^n} pour $n >> 0$. Cela montre que $\mu_{p^\infty}(\mathcal{O}_C/p^{N+1}) = 1 + \mathfrak{m}_C/p^{N+1}$ et on a donc

$$\varprojlim \mu_{p^\infty}(\mathcal{O}_C/p^{N+1}) = 1 + \mathfrak{m}_C.$$

Notons cependant que si on fixe n et qu'on passe à la limite sur N, on trouve

$$\varprojlim \mu_{p^n}(\mathcal{O}_C/p^{N+1}) = \mu_{p^n}(C).$$

En fait, on peut remarquer que $BT(C)$ est équivalent à la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-modules libres de rang fini (avec $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ comme unité). D'autre part, le critère valuatif de propreté nous dit que $X(C) = X(\mathcal{O}_C)$ pour X propre. Cela s'applique en particulier au cas ou X est fini. En passant à la limite sur les ${}_nG$, on obtient

$G(\mathcal{O}_C) = G(C) = G_C(C)$ ainsi que les résultats analogues pour $T_p(G)(\mathcal{O}_C)$ et $V_p(G)(\mathcal{O}_C)$. On a donc une description élémentaire de ces trois groupes (sommes directe finie de copies de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{Q}_p$ respectivement).

Le fait que C soit algébriquement clos nous permettra d'utiliser aussi le résultat suivant :

Lemme 5 *Si $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un épimorphisme fini au dessus de $\mathcal{O}_C$, alors $\mathcal{F}(\mathcal{O}_C/p^{N+1}) \to \mathcal{G}(\mathcal{O}_C/p^{N+1})$ est surjectif.*

Comme nos épimorphismes sont universels, on peut supposer que $\mathcal{G} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_C)$ et que $\mathcal{F} = \mathrm{Spec}(A)$ ou A est une $\mathcal{O}_C$-algèbre finie. Comme C est algébriquement clos, la C-algèbre de type fini non nulle (on utilise à nouveau le fait qu'un épimorphisme est universel) $C \otimes_{\mathcal{O}_C} A$ possède une rétraction et on dispose donc d'un morphisme de $\mathcal{O}_C$-algèbres $s : A \to C$. Comme A est finie sur $\mathcal{O}_C$, il en va de même de $\mathrm{im}(s)$. Comme $\mathcal{O}_C$ est intégralement clos dans C, on doit avoir $\mathrm{im}(s) = \mathcal{O}_C$. Et il suffit de réduire s modulo p^{N+1} pour obtenir un point de $\mathcal{F}(\mathcal{O}_C/p^{N+1})$.

Comme conséquence, on voit que

$$[p] : {}_{n+1}G(\mathcal{O}_C/p^{N+1}) \to {}_nG(\mathcal{O}_C/p^{N+1})$$

est surjective. On en déduit immédiatement que $[p]$ est surjective sur $\mathcal{G}(\mathcal{O}_C)$ et donc que le morphisme

$$(V_pG)(\mathcal{O}_C/p) = (V_p\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) \to \mathcal{G}(\mathcal{O}_C)$$

est surjectif. On en déduit aussi aisément que

$$\log : \mathcal{G}(\mathcal{O}_C) \to \mathrm{Lie}(\mathcal{G})[1/p] =: \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_C)$$

est surjectif. On dispose donc d'une suite exacte courte

$$0 \to (V_pG)(C) \to (V_pG)(\mathcal{O}_C/p) \to \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_C) \to 0 \tag{6}$$

que nous retrouverons plus tard.

La construction apparemment anodine que nous présentons maintenant jouera en fait un rôle très important. Si on pose $T := T_p(G)(\mathcal{O}_C)$, le morphisme $\mathbb{Z}_p$-linéaire $T \to T_p(G) \simeq \mathcal{H}om(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G)$ fournit par adjonction un morphisme de groupes de Barsotti-Tate

$$T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to G.$$

Comme on a $(T_p\check{G})(C) = \check{T}(1)$, on en déduit par dualité un morphisme de groupes de Barsotti-tate

$$G \to G' := T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mu_{p^\infty}$$

et on voit que ce dernier induit un isomorphisme $T = T_p(G)(C) \simeq T_p(G')(C)$. En particulier, en utilisant la description ci-dessous, on aura un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (V_pG)(\mathcal{O}_C) \arrow[r] \arrow[d, equal] & (V_pG)(\mathcal{O}_C/p) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \arrow[r] & T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} (1+\mathfrak{m}_C)^\flat \arrow[r] & T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{7}$$

Rappelons que comme l'idéal $p\mathcal{O}_C/p^{N+1}$ est bien évidemment muni de puissances divisées nilpotentes, on dispose d'un homomorphisme naturel $\theta_N : A_{\mathrm{cris}} \to \mathcal{O}_C/p^{N+1}$ qui passe à la limite et se prolonge en $\theta : B^+_{\mathrm{cris}} \to C$ (notons que $\ker\theta$ est principal et engendré par $[p^\flat] - p$). On peut donc voir A_{cris} comme l'enveloppe à puissances divisées de $W(\mathcal{O}_C^\flat)$ le long de θ où on a posé

$$\mathcal{O}_C^\flat = \lim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_C \simeq (\mathcal{O}_C/p)^\flat.$$

Dans le cas $G = \mu_{p^\infty}$, la suite (6) s'écrit

$$0 \to \mathbb{Q}_p(1)(C) \to (1+\mathfrak{m}_C)^\flat \to C \to 0.$$

Et le morphisme $T(G)(C) \to M(G)$ se décrit comme suit : on dispose d'inclusions $\mu_{p^n}(C) \subset \mathcal{O}_C$, on passe à la limite pour obtenir $\mathbb{Z}_p(1)(C) \subset \mathcal{O}_C^\flat$, on compose avec le caractère de Teichmüller $\mathcal{O}_C^\flat \hookrightarrow W(\mathcal{O}_C^\flat)$ et on passe ensuite à l'enveloppe à puissances divisées pour obtenir un plongement multiplicatif

$$\mathbb{Z}_p(1)(C) \hookrightarrow A_{\mathrm{cris}}, \quad \zeta \mapsto [\zeta].$$

Par construction, on aura toujours $\theta([\zeta]) = 1$ et on peut donc composer avec le logarithme pour obtenir

$$\mathbb{Z}_p(1)(C) \to A_{\mathrm{cris}}^{\varphi=p}, \quad \zeta \mapsto \log([\zeta]).$$

En pratique, on *choisira* un générateur ω de $\mathbb{Z}_p(1)(C)$ et on posera $t := \log([\omega])$: nous obtenons ainsi un générateur de $\ker\theta$ tel que $\varphi(t) = pt$.

6 Le lien avec la courbe

On conserve les hypothèses et notations de la précédente section.

Considérons de nouveau la courbe X de Fargues et Fontaine. Nous avons déjà mentionné que la catégorie des fibrés sur X est équivalente à celle des φ-modules sur B^+_{cris}. Nous désignerons par $\mathcal{E}(G)$ et $\mathcal{E}(T)$ les fibrés associés respectivement aux φ-modules $M := \mathrm{M}(G)[1/p](1)$ et $B^+_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$. La théorie de Dieudonné nous donne un morphisme $T \to M^{\varphi=1}$ qui induit un morphisme $\mathcal{E}(T) \to \mathcal{E}(G)$.

Le morphisme $\theta : B^+_{\mathrm{cris}} \to C$ fournit un point (fermé) x_C de X et on notera $\iota_C : \mathrm{Spec}(C) \hookrightarrow X$ l'inclusion. Pour être plus précis, c'est l'application

$$\bigoplus B^{+,\varphi=p^d}_{\mathrm{cris}} \to C[S], \quad \sum x_d \to \sum \theta(x_d) S^d$$

qui induit

$$\iota_C : \mathrm{Spec}(C) = \mathrm{Proj}(C[S]) \hookrightarrow \mathrm{Proj}(\oplus B_{\mathrm{cris}}^{+,\varphi=p^d}) = X.$$

Comme nous l'avons vu plus haut (voir (5)), on dispose de la suite exacte de Hodge

$$0 \to \mathrm{Lie}(\check{\mathcal{G}}_C)^\vee \to M \otimes_{B_{\mathrm{cris}}^+} C \to \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_C) \to 0 \tag{8}$$

qui fournit en particulier par adjonction une flèche $\mathcal{E}(G) \to \iota_{C*}\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_C)$.

Theorem 6 (Scholze-Weinstein) *La suite*

$$0 \to \mathcal{E}(T) \to \mathcal{E}(G) \to \iota_{C*}\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_C) \to 0. \tag{9}$$

est exacte.

Montrons pour commencer que la première flèche est injective. Par fonctorialité (voir diagramme (12) ci-dessous), on peut supposer grâce à la discussion ci-dessus que $G = T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mu_{p^\infty}$ puis par additivité que $G = \mu_{p^\infty}$. Dans ce cas, on obtient le morphisme $\zeta \mapsto \log([\zeta])$ qui est bien injectif. Maintenant, le théorème 3 nous fournit un isomorphisme $(V_pG)(\mathcal{O}_C/p) \simeq M^{\varphi=1}$ et on peut donc réécrire la suite exacte (6) sous la forme

$$0 \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T \to M^{\varphi=1} \to \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_C) \to 0. \tag{10}$$

Le lemme 4 implique que la seconde flèche de cette suite (10) est compatible avec le morphisme (8). La surjectivité de $\mathcal{E}(G) \to \iota_{C*}\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_C)$ en résulte immédiatement. Et la composée des deux flèches est nécessairement nulle. Cela implique aussi que le noyau de $\mathcal{E}(G) \to \iota_{C*}\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_C)$ est un sous-fibré de même rang et de même degré nul que $\mathcal{E}(T)$ et qui contient $\mathcal{E}(T)$. C'est donc exactement $\mathcal{E}(T)$. L'exactitude à gauche en résulte. Le théorème est démontré.

Par exemple, dans le cas $G = \mu_{p^\infty}$, une fois choisi un générateur ϵ de $\mathbb{Z}_p(1)$, on obtient la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{t} \mathcal{O}_X(1) \to \iota_{C*}C \to 0, \tag{11}$$

avec $t = \log([\epsilon])$.

Remarquons que si on prend les sections globales sur la suite (9), on obtient la suite (10). En tirant par ι_C^*, on obtient une suite exacte à droite

$$T \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \to M \otimes_{B_{\mathrm{cris}}^+} C \to \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_C) \to 0.$$

En comparant avec la suite (8), on en déduit un morphisme surjectif

$$\alpha : T \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \twoheadrightarrow \mathrm{Lie}(\check{\mathcal{G}}_C)^\vee$$

et par dualité, un morphisme injectif

$$\check{\alpha} : \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_C) \hookrightarrow T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} C.$$

Remarquons que par fonctorialité, le morphisme canonique $G \to G' := T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mu_{p^\infty}$ nous fournit un morphisme *injectif* de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{E}(T) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}(G) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \iota_{C*}\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_C) \arrow[r] \arrow[d, hook, "\iota_{C*}\check{\alpha}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{E}(T) \arrow[r, "t"] & \mathcal{E}(T(-1))(1) \arrow[r] & \iota_{C*}(T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} C) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{12}$$

En fait, si T est n'importe quel $\mathbb{Z}_p$-module de rang fini et W un C-vectoriel de dimension finie, la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte du bas dans (12) fournit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_C(W, T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} C) \simeq \mathrm{Ext}(\iota_{C*}W, \mathcal{E}(T))$$

et que les applications injectives correspondent aux fibrés (théorie des modifications de fibrés). Dans notre cas, $\check{\alpha}$ correspond à $\mathcal{E}(G)$.

Finalement, notons qu'on peut aussi expliciter α comme suit : si $u \in T = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathcal{G})$, on aura $\alpha(u) = \mathrm{Lie}(\check{u})_C \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Lie}(\check{\mathcal{G}}_C), C) = \mathrm{Lie}(\check{\mathcal{G}}_C)\check{}$.

Proposition 7 *On obtient ainsi une suite exacte (de Hodge-Tate)*

$$0 \to \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_C)(1) \to T \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \to \mathrm{Lie}(\check{\mathcal{G}}_C)\check{} \to 0$$

Comme on sait déjà que la première flèche est injective, que la dernière est surjective et que le rang de T est la somme des dimensions de G et $\check{G}$, il suffit de montrer que la composée est nulle. Cela résulte alors par exemple (voir le diagramme commutatif ci-dessus) du fait que la composée

$$\mathcal{E}(G) \simeq \mathcal{E}(\check{G})\check{}(1) \to \mathcal{E}(\check{T})\check{}(1) \simeq \mathcal{E}(T)(1) \to \mathcal{E}(G)(1)$$

est la multiplication par t.

Le résultat central de la théorie est le suivant :

Theorem 8 (Fargues-Scholze-Weinstein) *On obtient une équivalence de catégories en associant à un groupe de Barsotti-Tate G sur $\mathcal{O}_C$ le $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini $T := (T_pG)(C)$ et le sous espace vectoriel $W = \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_C)$ de $T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} C$.*

La pleine fidélité ainsi que le résultat analogue pour les groupes analytiques rigides sont dûs à Laurent Fargues ([3]). Dans le cas ou C est assez gros, un argument de Scholze et Weinstein permet de conclure à l'équivalence. Tout ceci se fait par des calculs directs. Mais le cas général ne s'obtiendra finalement que par descente en utilisant les espaces de Rapoport-Zink.

7 Espaces adiques

Nous allons rappeler la définition d'un espace adique au sens de Scholze.

Un *anneau de Huber* (complete f-adic ring) est un anneau topologique *complet* $A^{\pm}$ admettant un sous-anneau ouvert adique possédant un idéal de définition de type fini. Une *paire de Huber* (complete affinoid ring) est alors un couple $A = (A^{\pm}, A^{+})$ ou A^{+} est un sous-anneau ouvert de $A^{\pm}$ qui est intégralement clos et borné en puissances.

Si $(f_1, \ldots, f_n)$ est un idéal ouvert de $A^{\pm}$ et $f_0 \in A^{\pm}$, on considère $A_0^{\pm} = A^{\pm}[\frac{1}{f_0}]$ et on désigne par A_0^{+} la clôture intégrale de $A^{+}[\frac{f_1}{f_0}, \cdots, \frac{f_n}{f_0}]$. En complétant, on obtient ainsi une nouvelle paire de Huber que l'on désigne par $A\{\frac{f_1}{f_0}, \cdots, \frac{f_n}{f_0}\}$. On dira que le morphisme $A \to A\{\frac{f_1}{f_0}, \cdots, \frac{f_n}{f_0}\}$ est *rationnel.* Supposons maintenant que l'on ait $(f_1, \ldots, f_n) = A^{\pm}$ et posons pour tout $i = 1, \ldots, n$, $A_i := A\{\frac{f_1}{f_i}, \cdots, \frac{f_n}{f_i}\}$. On dira alors que le morphisme $A \to B := \oplus A_i$ est un *plongement rationnel.*

Les paires de Huber forment une catégorie Hub. Si A est une paire de Huber, on désigne par A^{op} l'objet correspondant de la catégorie opposée $\mathrm{Hub}^{\mathrm{op}}$. On munit $\mathrm{Hub}^{\mathrm{op}}$ de la topologie engendrée par les (opposés des) plongements rationnels. Si A est une paire de Huber, on désigne par $X := \mathrm{Spa}(A)$ le faisceau associé au préfaisceau $B^{\mathrm{op}} \mapsto \mathrm{Hom}(A, B)$ et on dit que X et un *espace adique affinoïde.* On obtient ainsi un foncteur essentiellement surjectif mais qui n'est *pas* pleinement fidèle. On dira qu'un morphisme $\mathrm{Spa}(B) \to \mathrm{Spa}(A)$ est un *ouvert rationnel* (resp. *recouvrement rationnel*) si le morphisme $A \to B$ est un morphisme rationnel (resp. un plongement rationnel). Enfin, un faisceau sur $\mathrm{Hub}^{\mathrm{op}}$ est un *espace adique* s'il est localement représentable par des ouverts rationnels (à préciser : il faut peut-être saturer la topologie).

Rappelons que l'on munit l'ensemble des valuations sur un anneau quelconque d'une topologie pour laquelle les parties $\{|f(x)| \leq |g(x)| \neq 0\}$ forment une base d'ouverts. Nous allons considérer seulement les valuations continues sur $A^{\pm}$ et bornées sur A^{+}. Le foncteur $\mathrm{Hub}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Top}$ ainsi obtenu est cocontinu et se prolonge donc en un morphisme de topos dont on notera $X \mapsto |X|$ l'image directe. En d'autres termes, $|\mathrm{Spa}(A)|$ est l'espace des valuations continues sur $A^{\pm}$ qui sont bornées sur A^{+} (qui ne dépend donc *que* de $\mathrm{Spa}(A)$ et pas de A). De plus, si X est un espace adique, alors son image $|X|$ est représentable (c'est un espace topologique).

Considérons maintenant le faisceau d'anneaux topologiques $\mathcal{O}$ sur $\mathrm{Hub}^{\mathrm{op}}$ associé au préfaisceau évident $A^{\mathrm{op}} \mapsto A$. Il se prolonge de manière unique en un faisceau sur le topos associé et on peut le restreindre aux espaces adiques. En le poussant puis le tirant, on en déduit un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ sur $|X|$ lorsque X est un espace adique. Attention cependant que $\Gamma(|X|, \mathcal{O}_X) \neq A$ en général lorsque $X = \mathrm{Spa}(A)$. On dit X est *honnête* si pour tout ouvert affinoïde, cette propriété est satisfaite (il s'agit des espaces adiques au sens de Huber).

Tout ce qui vient d'être dit peut bien sûr être refait en remplaçant la catégorie Hub par celle des anneaux (en utilisant les recouvrements finis par des ouverts standards) afin d'obtenir la catégories des schémas. Mais tout est alors plus simple car les objets ainsi obtenus sont systématiquement honnêtes. Et on obtient de même les schémas formels en utilisant les anneaux admissibles. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la catégorie des schémas formels finiment adiques (construite sur la catégorie fAd des anneaux adiques ayant un idéal de définition de type fini). Le foncteur $R \mapsto (R, R)$ est alors continu et induit un foncteur pleinement fidèle $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{\mathrm{ad}}$ des schémas formels finiment adiques vers les espaces adiques. Plus généralement, si $\mathcal{X}$ est un préfaisceau sur $\mathrm{fAd}^{\mathrm{op}}$, on peut lui associer un préfaisceau $\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}$ sur $\mathrm{Hub}^{\mathrm{op}}$, puis un faisceau $\widetilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{ad}}$.

Si K est un corps non archimédien d'anneau de valuation $\mathcal{V}$ et $\mathcal{X}$ un préfaisceau sur la catégorie (opposée) des $\mathcal{V}$-algèbres finiment adiques, on définit la fibre générique de $\mathcal{X}$ par

$$\mathcal{X}_K^{\mathrm{ad}} := \widetilde{\mathcal{X}}^{\mathrm{ad}} \times_{\mathrm{Spa}(\mathcal{V},\mathcal{V})} \mathrm{Spa}(K, \mathcal{V}).$$

On peut voir que c'est le faisceau associé à $A \mapsto \varinjlim_{R\subset A^+} \mathcal{X}(R)$.

8 Fibre générique d'un groupe de Barsotti-tate

Soit K un corps p-adique d'anneau de valuation $\mathcal{V}$ et G un groupe de Barsotti-Tate sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{V})$. On désigne par $\mathcal{G}$ le groupe de Barsotti-Tate défini par G sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{V})$. C'est un schéma formel qui n'est *pas* adique en général. Rappelons que l'on a pour toute $\mathcal{V}$-algèbre topologique sans p-torsion R munie d'un idéal de définition de type fini, un diagramme commutatif à colonnes et lignes exactes à gauche

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & T_pG(R) \arrow[r, equal] \arrow[d] & T_p\mathcal{G}(R) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & V_pG(R) \arrow[r] \arrow[d] & V_p\mathcal{G}(R) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Lie}(G)[1/p] \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & G(R) \arrow[r] & \mathcal{G}(R) \arrow[r] & \mathrm{Lie}(G)[1/p]
\end{tikzcd}$$

En fait, ce résultat est toujours valide pour n'importe quelle topologie adique et on en déduit un diagramme analogue avec des groupes adiques sur K :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & (T_pG)_K^{\mathrm{ad}} \arrow[r, equal] \arrow[d] & (T_p\mathcal{G})_K^{\mathrm{ad}} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & (V_pG)_K^{\mathrm{ad}} \arrow[r] \arrow[d] & (V_p\mathcal{G})_K^{\mathrm{ad}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Lie}(G_K)(\arrow[r] \arrow[d, equal] & 0) \\
0 \arrow[r] & G_K^{\mathrm{ad}} \arrow[r] & \mathcal{G}_K^{\mathrm{ad}} \arrow[r] & \mathrm{Lie}(G_K)(\arrow[r] & 0)
\end{tikzcd} \tag{13}$$

Tous ces faisceaux sont en fait représentables. Bien sûr, on considère ici l'espace vectoriel $\mathrm{Lie}(G_K)$ comme un espace adique (un espace affine) mais on a aussi $\mathrm{Lie}(G_K) = \varinjlim_p (\mathrm{Lie}\mathcal{G})_K^{\mathrm{ad}}$. D'autre part, comme $T\mathcal{G}$ est représentable, on voit que $(T\mathcal{G})_K^{\mathrm{ad}}$ l'est aussi. Attention cependant que $(T\mathcal{G})_K^{\mathrm{ad}} \neq \varprojlim_n G_K^{\mathrm{ad}}$ (les limites projectives se comportent très mal dans la catégorie des espaces adiques). Comme K est un corps de caractéristique nulle, la section unité de ${}_1G_K^{\mathrm{ad}}$ est une immersion ouverte (et fermée). Il suit que la multiplication par p est une immersion ouverte (et fermée) et donc que $G_K^{\mathrm{ad}} = \varinjlim_n G_K^{\mathrm{ad}}$ et $(V_pG)_K^{\mathrm{ad}} = \varinjlim_p (T_pG)_K^{\mathrm{ad}}$ sont aussi représentables. Pour voir que $\mathcal{G}_K^{\mathrm{ad}}$ est représentable, on rappelle d'abord que le logarithme $\mathcal{G}_K^{\mathrm{ad}} \to \mathrm{Lie}(G_K)$ induit un isomorphisme entre des voisinages ouverts (il faut un argument pour le premier !) de l'origine $\mathcal{G}_{0K}^{\mathrm{ad}} \simeq p(\mathrm{Lie}\mathcal{G})_K^{\mathrm{ad}}$ et que le second espace est représentable. On utilise ensuite le fait que la multiplication par p est relativement représentable et topologiquement nilpotent. Enfin, comme $V_p\mathcal{G} \to G$ est relativement représentable, il en va de même de $V_p\mathcal{G}_K^{\mathrm{ad}} \to G_K^{\mathrm{ad}}$ et $V_p\mathcal{G}_K^{\mathrm{ad}}$ est donc aussi représentable.

Proposition 9 *Si C est un corps p-adique algébriquement clos, le foncteur $G \mapsto \mathcal{G}_C^{\mathrm{ad}}$ est pleinement fidèle sur la catégorie des groupes de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_C$.*

Rappelons qu'un groupe de Barsotti-tate G est *connexe* ou *étale* si tous les ${}_nG$ le sont. Dans le premier cas, on a

$$\mathcal{G} = G^{\mathrm{inf}} \simeq \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_C[[T_1, \ldots, T_d]]) =: \mathring{\mathbb{A}}^d$$

(en tant que schéma formel) et dans le second cas, on aura $G \simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^r$. Comme $\mathcal{O}_C$ est un anneau local hensélien, on dispose toujours d'une suite exacte

$$0 \to G^0 \to G \to G^{\mathrm{et}} \to 0$$

avec G^0 connexe et G^{et} étale. En fait, comme C est algébriquement clos, la suite est scindée, et on a donc $G \simeq G^0 \oplus G^{\mathrm{et}}$.

Nous devons montrer que si G et H sont deux groupes de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_C$, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(G, H) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(\mathcal{G}_C^{\mathrm{ad}}, \mathcal{H}_C^{\mathrm{ad}}).$$

Grâce à la discussion précédente, on peut supposer pour G comme pour H, qu'ils sont connexe ou étale. Mais ils suffit alors de montrer que si X et Y sont deux schémas formels sur $\mathcal{O}_C$ qui sont, soit de la forme $\mathring{\mathbb{A}}^d$, soit constant, on a

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}(X_C^{\mathrm{ad}}, Y_C^{\mathrm{ad}}).$$

On se ramène rapidement au cas $X = \mathring{\mathbb{A}}^d$ et $Y = \mathring{\mathbb{A}}^1$, ce qui signifie que l'inclusion

$$\mathcal{O}_C[[T_1, \ldots, T_d]] = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow \Gamma(X_C^{\mathrm{ad}}, \mathcal{O}_{X_C^{\mathrm{ad}}}) \subset C[[T_1, \ldots, T_d]])$$

induit un isomorphisme entre fonctions topologiquement nilpotentes (ce que l'on vérifie aisément).

9 Groupes de Barsotti-Tate analytiques

On fixe en corps p-adique K (qui sera très vite algébriquement clos et noté C).

Définition 10 *Un* groupe de Barsotti-Tate analytique *sur K est un groupe analytique rigide (au sens de Huber) abélien G tel que la multiplication par p soit un morphisme*

1. *surjectif*
2. *topologiquement nilpotent*
3. *fini*

Par exemple, si G est un groupe de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_K$, alors $\mathcal{G}_K^{\mathrm{ad}}$ est un groupe de Barsotti-Tate analytique mais tout groupe vectoriel est aussi un groupe de Barsotti-Tate analytique. Remarquons qu'on peut identifier la catégorie des groupes de Barsotti-Tate analytiques G qui sont de torsion avec la catégorie des groupes de Barsotti-Tate *algébriques* sur K (ou encore avec celle des représentations $\mathbb{Z}_p$-linéaires via le module de Tate). En général, G est un groupe lisse sans bord, et si on note ${}_\infty G$ le sous-groupe des points de torsion, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow {}_\infty G \longrightarrow G \xrightarrow{\log} \mathcal{L}ie(G) \longrightarrow 0. \tag{14}$$

Réciproquement, toute extension d'un vectoriel par un groupe de Barsotti-Tate algébrique est un groupe de Barsotti-tate analytique. Enfin, si l'on part d'un groupe de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_K$, la suite (14) est exactement la suite apparaissant au bas du diagramme (13).

On suppose maintenant que $K = C$ est algébriquement clos. Dans ce cas, on peut montrer que $\widehat{\mathbb{G}}_m$ est l'unique extension localement scindée de $\mathbb{G}_a$ par μ_{p^∞} dans la catégorie des groupes analytiques. Si G est un groupe de Barsotti-Tate analytique, en posant $T := \varprojlim_n G(C)$, on en déduit formellement un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_\infty G \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}ie(G) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mu_{p^\infty} \arrow[r] & T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathring{\mathbb{D}}(1,1) \arrow[r] & T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{G}_a \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd} \tag{15}$$

et on en déduit le résultat suivant :

Theorem 11 (Fargues) *On dispose d'une équivalence de catégories qui associe au groupe de Barsotti-tate analytique G sur C le $\mathbb{Z}_p$-module libre T et le morphisme $\alpha : W := \mathrm{Lie}(G) \to T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} C$. De plus, les groupes sans facteurs vectoriels sont caractérisés par l'injectivité de α.*

Proposition 12 (Scholze-Weinstein) *Si C est suffisamment gros, tout groupe de Barsotti-Tate analytique sans facteur vectoriel est la fibre générique d'un groupe de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_C$.*

Pour montrer ce résultat, on peut bien sûr supposer que G est connexe et il suffit alors de vérifier que $G \simeq \mathring{\mathbb{B}}^d$ comme espace adique. En fait, on a toujours

$$G \cap \Big(T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{D}(1,\eta)\Big) \simeq \mathbb{B}^d(0,\eta)$$

avec $\eta \overset{<}{\to} 1$ si bien que G est une union croissante de sous groupes ouverts dont l'espace sous-jacent est une boule. Mais on ne sait pas conclure que G lui même est une boule sans hypothèse supplémentaire sur C. L'argument est alors purement technique.

10 Espaces de Rapoport-Zink

On rappelle qu'une *quasi-isogénie* est un isomorphisme à isogénie près (et qu'une *isogénie* est donc en fait un vrai morphisme qui est aussi une quasi-isogénie). Nous l'indiquerons par le symbole $\simeq_{[1/p]}$ afin d'éviter les ambiguïtés.

On se donne un groupe de Barsotti-Tate G de hauteur h et de dimension d sur un corps parfait k. Si R désigne une $W(k)$-algèbre p-adique et $R_0 := R/p$, une *déformation* de G sur R est un groupe de Barsotti-Tate G' sur R muni d'une quasi-isogénie

$$\rho : G \otimes_k R_0 \simeq_{[1/p]} G'_0 \quad (= G' \otimes_R R_0).$$

On dispose alors du célèbre résultat ([5]) :

Theorem 13 (Rapoport-Zink) *Il existe un schéma formel adique localement formellement de présentation finie et partiellement propre $\mathcal{M}$ sur $W(k)$ qui classifie les déformations de G à isomorphisme près .*

En d'autres termes, pour toute $W(k)$-algèbre p-adique R, on aura

$$\mathcal{M}(R) = \{(G', \rho)\}/ \simeq .$$

La quasi-isogénie ρ va induire un isomorphisme $\mathbb{M}(G)(R)[1/p] \simeq \mathbb{M}(G')(R)[1/p]$ et la suite exacte de Hodge (5) nous fournit une suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Lie}(\check{\mathcal{G}}')^\vee[1/p] \to \mathrm{M}(G) \otimes_{W(k)} R[1/p] \to \mathrm{Lie}(\mathcal{G}')[1/p] \to 0.$$

On dira que le quotient $\mathrm{Lie}(\mathcal{G}')[1/p]$ est la *période* de la déformation G. Si on note $F \simeq \mathbb{G}rass_K(h-d,h)$ la variété sur $K = \mathrm{Frac}(W(k))$ qui classifie les quotients de dimension d de $M(G) \otimes_{W(k)} K$, on dispose en fait du *morphisme des périodes*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_K^{\mathrm{ad}} & \xrightarrow{\quad\pi\quad} & F \\ G' & \longmapsto & \mathrm{Lie}(\mathcal{G}') \otimes_{W(k)} K \end{array}$$

(ou F est vu comme espace adique sur $\mathrm{Spa}(K, W(k))$) et on peut vérifier que π est un morphisme étale.

Theorem 14 (de Jong-Messing-Scholze-Weinstein) *Il existe un espace adique U sur K qui classifie les déformations de G à quasi-isogénie près. De plus le morphisme des périodes induit un isomorphisme entre U et un ouvert de F.*

Ici on suppose que R est *sans torsion* et on aura donc

$$U(R[1/p], R) = \{(G', \rho)\}/\simeq_{[1/p]},$$

(et plus généralement, $U(A)$ sera obtenu en prenant la limite sur tous les sous-anneaux de définition R contenus dans A^+).

Pour démontrer ce théorème, on remarque tout d'abord que π se factorise par le foncteur U et qu'on obtient ainsi un épimorphisme (c'est immédiat) suivi d'un monomorphisme. en fait, la théorie de la déformation de Grothendieck-Messing nous dit exactement qu'une quasi-isogénie se relève si et seulement si elle préserve les périodes. D'autre part, comme π est un morphisme étale, on sait que son image est un ouvert de F. Pour conclure, il suffit alors de montrer que π est un épimorphisme sur son image (pour la topologie des espaces adiques). Comme π est étale et que $\mathcal{M}_K^{\mathrm{ad}}$ est sans bord, on peut se ramener à un argument de descente galoisienne pour les groupes de Barsotti-Tate sur un anneau de valuation de rang 1.

On retrouve maintenant notre corps p-adique algébriquement clos C et on se donne un groupe de Barsotti-tate G de hauteur h et de dimension d sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Si W est un quotient de $M(G) \otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_p)} C$, on peut considérer le morphisme correspondant

$$\mathcal{E}(G \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathcal{O}_C/p) \to \iota_{C*}W \tag{16}$$

sur la courbe de Fargues-Fontaine. On a alors :

Theorem 15 (Faltings-Scholze-Weinstein) *W est une période de G sur $\mathcal{O}_C$ si et seulement si le noyau du morphisme* (16) *est (globalement) libre de rang h.*

Dans le sens direct, c'est une conséquence du théorème 6. Pour la réciproque, comme π est localement de présentation finie, on peut supposer que C est assez gros afin de disposer du théorème 8 qui est alors valide grâce au théorème 11 ainsi qu'aux propositions 9 et 12. On écrit alors le noyau de (16) sous la forme $\mathcal{E}(T)$ ou T est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang h et on dispose donc d'une suite exacte

$$0 \to \mathcal{E}(T) \to \mathcal{E}(G \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathcal{O}_C/p) \to \iota_{C*}W \to 0.$$

La théorie des modifications nous fournit une injection $W \hookrightarrow T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} C$ qui correspond (puisque C est assez gros) à un groupe de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_C$, qui est bien une déformation de G comme le montre le diagramme commutatif (4), et dont la période sera bien W par construction.

Nous pouvons maintenant conclure la démonstration du théorème 8 sans hypothèse supplémentaire sur C. On se donne un $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini T et un sous-espace vectoriel W de $T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} C$. La théorie des déformations nous fournit un fibré $\mathcal{E}$ et une suite exacte

$$0 \to \mathcal{E}(T) \to \mathcal{E} \to \iota_{C*}W \to 0.$$

Il est aisé de voir que les pentes de $\mathcal{E}$ sont dans l'intervalle $[0, 1]$: si $\mathcal{O}_X(\lambda)$ est facteur direct dans $\mathcal{E}$, il existe des morphismes non nuls $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(\lambda) \to \mathcal{O}_X(1)$. Il suit que $\mathcal{E} = \mathcal{E}(G)$ ou G est un groupe de Barsotti-tate sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Et le théorème 15 nous permet de relever $G \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathcal{O}_C/p$ sur $\mathcal{O}_C$.

Références

[1] Pierre Berthelot, Lawrence Breen, and William Messing. *Théorie de Dieudonné cristalline. II*, volume 930 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[2] Pierre Berthelot and William Messing. Théorie de Dieudonné cristalline. III. Théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, volume 86 of *Progr. Math.*, pages 173–247. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[3] Laurent Fargues. Groupes analytiques rigides p-divisibles.

[4] William Messing. *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 264. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[5] M. Rapoport and Th. Zink. *Period spaces for p-divisible groups*, volume 141 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[6] Peter Scholze. Perfectoid spaces : a survey. In *Current developments in mathematics 2012*, pages 193–227. Int. Press, Somerville, MA, 2013.

[7] Peter Scholze and Jared Weinstein. Moduli of p-divisible groups. *Camb. J. Math.*, 1(2) :145–237, 2013.