

Topologie Algébrique
 Contrôle du vendredi 27 mars 2026
 9h 45 - 11 h 15

La consultation de document (y compris électronique) est autorisée. Tous les résultats doivent être justifiés et les calculs détaillés. On pourra cependant utiliser librement les propriétés vues en CM et en TD.

Bon courage.

On désigne par \mathbb{S}^n (resp. \mathbb{B}^n) la sphère (resp. boule) unité de dimension n et par \mathbb{T}^n (resp. \mathbb{D}^n) le produit de n copies of \mathbb{S}^1 (resp. \mathbb{B}^1). Quand $n = 1$, on omet l'exposant n si bien que $\mathbb{T} = \mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et $\mathbb{D} = \mathbb{B} = [-1, 1]$.

- (3 points) Déterminer une application $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{S}$ qui induit un homéomorphisme $\mathbb{B}/\mathbb{S}^0 \simeq \mathbb{S}$.

Solution: On pose $f(x) := e^{i\pi x} : c'$ est une application surjective continue entre deux compacts et on a $f(x) = f(y)$ si et seulement si $\{x, y\} = \{-1, 1\}$ ou $x = y$.

- (3 points) En déduire un homéomorphisme $\mathbb{D}^2/\mathcal{R} \simeq \mathbb{T}^2$ où \mathcal{R} est une relation que l'on explicitera.

Solution: L'application $F : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, produit de f par elle même est une application continue surjective entre deux compacts. Il suffit donc d'expliciter la relation a $F(x, y) = F(x', y')$. Celle-ci signifie que $(\{x, x'\} = \{-1, 1\}$ ou $x = x')$ et $(\{y, y'\} = \{-1, 1\}$ ou $y = y')$. En éliminant les cas triviaux, on voit que notre relation est (engendrée par) $(x, 1) \mathcal{R} (x, -1)$ et $(1, y) \mathcal{R} (-1, y)$ pour $x, y \in [0, 1]$.

On pose $X := \mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$ et $A := \partial\mathbb{D}^2 = (\mathbb{B} \times \mathbb{S}^0) \cup (\mathbb{S}^0 \times \mathbb{B})$.

- (3 points) Montrer que la projection radiale r centrée en 0 de X sur A est une rétraction par déformation forte.

Solution:
 La projection radiale $r(P) = P/\|P\|_\infty$ est bien une rétraction continue sur le bord et $h(P, t) := (1 - t)P + tr(P)$ définit une homotopie entre l'identité et P .

- (3 points) Montrer que la rétraction ainsi que l'homotopie correspondante sont compatibles avec \mathcal{R} .

Solution: Par construction, il suffit de considérer la rétraction, mais si $P \mathcal{R} P'$ (et $P \neq P'$), alors $P, P' \in A$ et donc $r(P) = P \mathcal{R} P' = r(P')$.

On pose $\bar{X} := \mathbb{T}^2 \setminus \{(1, 1)\}$ et $\bar{A} := (\mathbb{S} \times \{-1\}) \cup (\{-1\} \times \mathbb{S})$.

5. (3 points) Montrer que \bar{A} est un rétract par déformation forte de \bar{X} .

Solution: Tout d'abord, \bar{X} et \bar{A} sont les images des X/\mathcal{R} et A/\mathcal{R} respectivement sous l'homéomorphisme $\mathbb{D}^2/\mathcal{R} \simeq \mathbb{T}^2$. Puisque h est compatible avec \mathcal{R} , il induit une homotopie $\bar{h} : \bar{X} \times [0, 1] \rightarrow \bar{X}$ entre l'identité de \bar{X} et la rétraction $\bar{r} : \bar{X} \rightarrow \bar{A}$.

Soit T un tore de dimension deux et $a \in T$.

6. (3 points) Montrer que $T \setminus \{a\}$ a même type d'homotopie que le bouquet $\mathbb{S} \vee \mathbb{S}$.

Solution: Il existe un homéomorphisme $T \simeq \mathbb{T}^2$ et on peut supposer, après translation, que a est envoyé sur $\{1, 1\}$ si bien que $T \setminus \{a\}$ est homéomorphe à \bar{X} . D'autre part, il existe un homéomorphisme évident $\mathbb{S} \vee \mathbb{S} \simeq \bar{A}$ induit par $x \mapsto (-x, -1)$ et $x \mapsto (-1, -x)$. Or il résulte de la question précédente que \bar{X} a même type d'homotopie que \bar{A} .

7. (3 points) En déduire $\pi_1(T \setminus \{a\}, b)$ pour $a \neq b \in T$ (à isomorphisme près).

Solution: On a un isomorphisme $\pi_1(T \setminus \{a\}, b) \simeq \pi_1(\mathbb{S} \vee \mathbb{S}, c) \simeq \mathbb{Z}^{*2}$ pour un certain point c .

Soit D un voisinage de a homéomorphe à un disque et $b \in D \setminus \{a\}$.

8. (3 points) Montrer qu'on a une suite exacte

$$\pi_1(D \setminus \{a\}, b) \rightarrow \pi_1(T \setminus \{a\}, b) \rightarrow \pi_1(T, b) \rightarrow 1.$$

Solution: On applique le théorème de van Kampen au recouvrement de T par $T \setminus \{a\}$ et D .