Groupes abéliens solides selon Dustin Clausen et Peter Scholze

Bernard Le Stum

Université de Rennes

13 mars 2026

CONTENT

Ensembles condensés

Définition

Un ensemble condensé est un faisceau d'ensembles sur le site des espaces métriques compacts (muni des familles couvrantes surjectives finies).

Concrètement, un ensemble condensé X est la donnée d'ensembles $X(S)$ pour S métrique compact et d'applications $X(S) \to X(S')$ quand $S' \to S$ est continue. On demande que ce soit compatible avec la composition et que :

1. $X(\emptyset) = \{0\}$,
2. $X(S \sqcup S') = X(S) \times X(S')$ et
3. $X(S/R) = \ker(X(S) \rightrightarrows X(R))$ si $R \subset S \times S$ est une relation d'équivalence fermée.

Dans cette définition, on peut se limiter aux espaces profinis (c'est à dire totalement discontinus) ou même ne considérer que l'espace de Cantor $2^{\mathbb{N}}$. Par contre, en autorisant les espaces non métrisables, on obtiendrait les ensembles condensés lourds par opposition aux nôtres qui sont dits légers.

On dispose d'un foncteur **Top** $\to$ **Cond**, $X \mapsto \underline{X}$ des espaces topologiques vers les espaces condensés défini par

$$\underline{X}(S) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(S, X).$$

Celui-ci devient pleinement fidèle lorsqu'on se restreint aux espaces séquentiels.

Il existe un adjoint **Cond** $\to$ **Top**, $X \mapsto X(\star)$ où $\star$ désigne l'espace topologique réduit à un point. On a même une adjonction enrichie

$$\underline{\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(X(\star), Y)} \simeq \mathcal{H}\mathrm{om}(X, \underline{Y})$$

relativement à la topologie compacte-ouverte (Y muni de sa topologie de type compact).

Exemple

L'ensemble condensé

$$S \mapsto \mathrm{Hom}(S, \mathbb{Z})/\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(S, \mathbb{Z})$$

(pour S profini) n'est pas de la forme $\underline{X}$.

Groupes abéliens condensés

Définition

Un groupe abélien condensé est un groupe abélien dans la catégorie cartésienne des ensembles condensés ou, de manière équivalente, un faisceau de groupes abéliens sur le site des espaces métriques compacts.

C'est donc au choix, un ensemble condensé M muni d'une loi de groupe abélien $M \times M \to M$, ou bien la donnée de groupes abéliens $M(S)$ et d'homorphismes $M(S) \to M(S')$ pour $S' \to S$ satisfaisant les propriétés déjà énumérées. On a donc $\mathbf{Ab}(\mathbf{Cond}) = \mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$.

On dispose toujours d'un foncteur $M \mapsto \underline{M}$ des groupes abéliens topologiques vers les groupes abéliens condensés et on a

$$\underline{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-cont}}(M, N)} \simeq \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathbb{Z}}(\underline{M}, \underline{N})$$

quand M est séquentiel.

Attention : $M(\star)$ n'a pas nécessairement de structure de groupe abélien s'il n'est pas localement compact.

Si S est un espace topologique (resp. pointé), alors il existe un groupe abélien topologique $\mathbb{Z} \cdot S$ (resp. $\mathbb{Z} \cdot S^*$) qui est universel pour les applications continues (resp. pointées) vers les groupes abéliens topologiques.

Définition

C'est le groupe abélien libre de Markov (resp. Graev) associé à S.

Si S est complètement régulier, alors le groupe abélien sous-jacent est le groupe abélien (resp. pointé) libre habituel. On a $\mathbb{Z} \cdot S \simeq \mathbb{Z} \cdot S^* \oplus \mathbb{Z} \cdot s$ si S est pointé en s.

Si S est métrique compact (resp. pointé), alors $\underline{\mathbb{Z} \cdot S} = \mathbb{Z} \cdot \underline{S}$ (resp. $\underline{\mathbb{Z} \cdot S^*} = \mathbb{Z} \cdot \underline{S}^*$) est universel pour les morphismes de $\underline{S}$ vers les groupe abéliens condensés. C'est un espace séquentiel séparé (pas localement compact ni métrique - sauf discret).

Exemple

On désigne par $P := \mathbb{Z} \cdot \overline{\mathbb{N}}^*$ le groupe abélien libre de Graev associé à

$$\overline{\mathbb{N}} =: \mathbb{N} \cup \infty \simeq \varprojlim_n \{0, 1, \ldots, n, \infty\}$$

muni de sa topologie profinie et pointé en ∞.

Définition

Le groupe abélien condensé des suites nulles d'un groupe abélien condensé M est

$$M_\bullet := \mathcal{H}\mathrm{om}_{\underline{\mathbb{Z}}}(\underline{P}, M).$$

Théorème (Clausen-Scholze)

Le groupe abélien condensé $\underline{P}$ est intérieurement projectif de présentation finie : le foncteur $M \mapsto M_\bullet$ preserve toutes les (limites et toutes les) colimites.

Démonstration.

Si S est un espace métrique compact, alors $\underline{S}$ est intérieurement de présentation finie (préservation des colimites filtrantes) car c'est un objet qcqs d'un topos cohérent. Il en donc de même de $\underline{\mathbb{Z}} \cdot \underline{S}$ ou $\underline{\mathbb{Z}} \cdot \underline{S}^*$ en général, et de P en particulier. On montre ensuite que, dans la catégorie des espaces métriques profinis, tout objet non-vide est injectif (tout monomorphisme a une section). On prouve alors que P est intérieurement projectif (préservation des colimites finies) en considérant bêtement la définition. Voir [Wär24], théorème 5, [Cam26], théorème 2.3.3.(3) ou [Ked25], proposition 5.4.8. $\square$

Groupes abéliens solides

L'application continue pointée $t : \overline{\mathbb{N}} \to \overline{\mathbb{N}}, n \mapsto n+1$ induit d'abord un endomorphisme t de $P := \mathbb{Z} \cdot \overline{\mathbb{N}}^*$ et ensuite un endomorphisme t de $M_\bullet$ si M est un groupe abélien condensé.

Définition

Un groupe condensé M est solide si $1 - t$ est un automorphisme de $M_\bullet$.

Exemple

Si M est un groupe abélien linéairement topologisé, alors $\underline{M}$ est solide si et seulement si M est complet.

On déduit du théorème :

Corollaire

La catégorie des groupes abéliens solides est une sous-catégorie réflective de la catégorie des groupes abéliens condensés : il existe un adjoint $M \mapsto M^{\blacksquare}$ appelé solidification. □

Théorème (Clausen-Scholze)

Le groupe abélien solide $\underline{P}^{\blacksquare} \simeq \underline{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}}$ est un générateur projectif de présentation finie.

Démonstration.

Tout d'abord, il est automatique que $\underline{P}^{\blacksquare}$ est un groupe abélien solide projectif de présentation finie. On construit ensuite une suite nulle dans $\mathbb{Z} \cdot 2^{\mathbb{N}}$ afin d'obtenir un isomorphisme

$$\underline{P}^{\blacksquare} \simeq \underline{\mathbb{Z}} \cdot \underline{2}^{\mathbb{N}\blacksquare}$$

sur les solidifications. Il en résulte formellement que $\underline{P}^{\blacksquare}$ est un générateur de la catégorie des groupes abéliens solides. Enfin, la suite des vecteurs $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ est nulle dans $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ qui est complet et fournit un isomorphisme $\underline{P}^{\blacksquare} \simeq \underline{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}}$. Cela se fait en deux étapes (avec deux types d'arguments différents) :

$$\underline{P}^{\blacksquare} \simeq \underline{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N},\mathrm{bd},\blacksquare} \simeq \underline{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}}.$$

Voir théorème 3.3.1 de [Cam26] ou [Ked25] ou [CS23] pour les détails. . . □

– MERCI –

[Cam26] Juan Esteban Rodríguez CAMARGO. *Notes on Solid Geometry*. 2026. arXiv : 2603.03012 [math.AG]. URL : https://arxiv.org/abs/2603.03012.

[CS23] Dustin CLAUSEN et Peter SCHOLZE. *Analytic Stacks*. Video lecture series, IHES and Max Planck Institute for Mathematics. Course on analytic stacks and foundations for analytic geometry. 2023. URL : https://www.carmin.tv/en/collections/dustin-clausen-and-peter-scholze-analytic-stacks.

[Joh79] P. T. JOHNSTONE. “On a topological topos”. English. In : *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* 38 (1979).

[Ked25] Kiran S. KEDLAYA. *Notes on condensed mathematics*. https://www.kskedlaya.org/condensed/condensed.html. PreTeXt/Runestone online notes. 2025.

[Wär24] David WÄRN. *On internally projective sheaves of groups*. 2024. arXiv : 2409.12835 [math.CT]. URL : https://arxiv.org/abs/2409.12835.