Outils mathématiques 2

Bernard Le Stum

6 janvier 2026

Réalisé en LaTeX à partir du modèle Legrand Orange Book
Copyright © 2026 Bernard Le Stum

Table des matières

Introduction

Dans le premier chapitre, dédié aux développements limités, nous éviterons autant que possible les notations issues de la logique ainsi que de la théorie des ensembles afin de rendre le contenu plus accessible au risque d'être parfois imprécis.

Dans le second chapitre consacré à l'algèbre linéaire, nous ne pourrons faire ces économies. Nous utiliserons de manière plutôt informelle les symboles $\Rightarrow$ d'implication et $\Leftrightarrow$ d'équivalence. Nous utiliserons aussi parfois les quantificateurs $\forall$ (« pour tous les ») et $\exists$ (« il existe un »), voire même $\exists!$ (« il existe un unique »). Nous utiliserons la notion d'ensemble et d'élément ainsi que la relation d'appartenance $x \in E$ pour indiquer que l'élément x est dans l'ensemble E. Il ne faudra pas confondre avec la relation d'inclusion $F \subset E$ entre deux ensembles qui indique que tous les éléments de l'ensemble F sont aussi des éléments de l'ensemble E.

Un grand merci à Vincent Guirardel d'avoir bien voulu mettre toutes ses notes à ma disposition.

1. Développements limités

1.1 Définition/propriétés

Définition 1.1.1 Soit f une fonction réelle d'une variable réelle. Un *développement limité à l'ordre n de f au voisinage de* 0 est une égalité [a]

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$

ou $P(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ est un polynôme de degré au plus n appelé *partie régulière* et

$$o(x^n) = x^n \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$$

est appelé *terme d'erreur*.

a. Pour plus de rigeur, on devrait écrire "$f(x) \equiv P(x) \mod o(x^n)$" car $o(x^n)$ est une notation *générique*.

Exemple Nous montrerons que

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

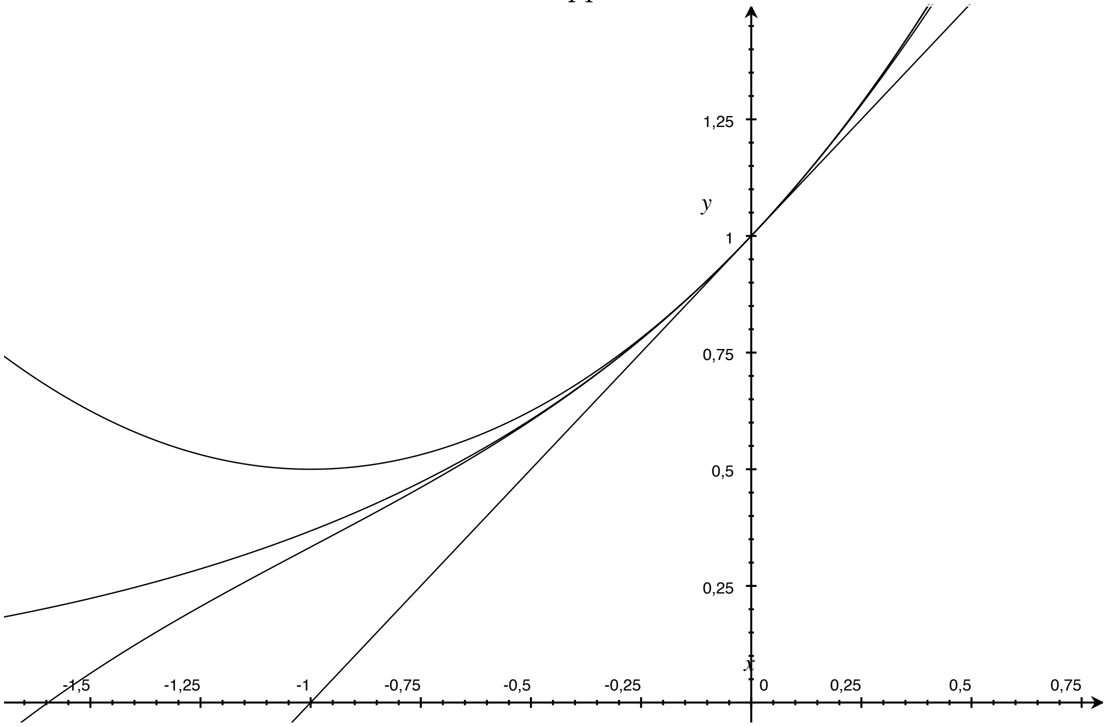
est un développement limité de e^x à l'ordre 3 au voisinage de 0.

En prenant par exemple $x = 0,1$, on aura donc

$$\begin{aligned} e^{0,1} &= 1 + 0,1 + \frac{1}{2}(0,1)^2 + \frac{1}{6}(0,1)^3 + \text{erreur} \\ &= 1 + 0,1 + 0,005 + 0,00017\ldots + \text{erreur} \\ &= 1,10517\ldots + \text{erreur}. \end{aligned}$$

La calculette nous donne bien $e^{0,1} = 1,10517\ldots$.

FIGURE 1.1 – Développement limité de e^x



Remarques Si

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + o(x^n),$$

alors

1. $\lim_{x\to 0} f(x) = a_0$.
2. La tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ en $x = 0$ a pour équation

$$y = a_1x + a_0.$$

Exemple On a $\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$ et la tangente à $y = e^x$ en 0 a pour équation (fare un dessin)

$$y = x + 1.$$

Si $P(x)$ est un polynôme, on notera $P(x)_{\leq k}$ le *tronqué* de $P(x)$ à l'ordre k : si

$$P(x) := a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

(et $k \leq n$), alors

$$P(x)_{\leq k} := a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k.$$

Par exemple, si $P(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$, alors $P(x)_{\leq 2} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

Proposition 1.1.2 Si

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$

est un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 et $k \leq n$, alors

$$f(x) = P(x)_{\leq k} + o(x^k)$$

est un développement limité à l'ordre k.

Démonstration. On a

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \ldots + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$. On a alors

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + x^k(a_{k+1} x + \ldots + a_n x^{n-k} + x^{n-k}\epsilon(x))$$

et $\lim_{x \to 0}(a_{k+1} x + \ldots + a_n x^{n-k} + x^{n-k}\epsilon(x)) = 0$. ■

Exemple Si on sait déjà que

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

alors

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Proposition 1.1.3 Un développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0 est unique (s'il existe).

Démonstration. On suppose que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$. On voit déjà que $a_0 = \lim_{x \to 0} f(x)$ est uniquement déterminé par f. De plus, si on pose

$$g(x) = \frac{f(x) - a_0}{x},$$

alors

$$g(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1} + x^{n-1}\epsilon(x).$$

Par récurrence sur n, $a_1, \ldots, a_n$ sont aussi déterminé par g et donc par f. ■

Exemple S'il existe, le développement limité est unique, mais il n'existe pas toujours :

1. La fonction $f(x) = |x|$ n'a pas de développement limité au voisinage de 0. Il faudrait que $a_1 = 1$ lorsque $x > 0$ mais il faudrait aussi que $a_1 = -1$ lorsque $x < 0$. Or a_1 est une constante !
2. La fonction $f(x) = x \sin(1/x)$ n'a pas de développement limité au voisinage de 0 (ni à droite, ni à gauche). Sinon, on aurait $a_1 = \lim_{t \to +\infty} \sin(t)$ mais cette limite n'existe pas.

Proposition 1.1.4

1. Si
$$f(x) = P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + o(x^n)$$
sont des développement limités à l'ordre n au voisinage de 0, alors
$$(f+g)(x) = (P+Q)(x) + o(x^n)$$
est un développement limité de $f+g$ à l'ordre n au voisinage de 0.
2. Si
$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$
est un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 et c est une constante, alors
$$(cf)(x) = (cP)(x) + o(x^n)$$
est un développement limité de λf à l'ordre n au voisinage de 0.

Démonstration. On écrit
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$$
et
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + x^n \eta(x)$$
avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = \lim_{x \to 0} \eta(x) = 0$. On aura donc
$$(f+g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n + x^n(\epsilon(x) + \eta(x))$$
avec $\lim_{x \to 0}(\epsilon(x) + \eta(x)) = 0$ et
$$cf(x) = ca_0 + ca_1 x + \ldots + ca_n x^n + x^n(c\epsilon(x))$$
avec $\lim_{x \to 0} \ (\epsilon(x) + \eta(x)) = \lim_{x \to 0} \ (c\epsilon(x)) = 0$. ■

Remarques

1. Si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et c est une constante, alors on aura aussi
$$f(cx) = P(cx) + o(x^n).$$
En effet, si $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$, alors $\lim_{x \to 0} c^n \epsilon(cx) = 0$.

2. Si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et k est un entier, alors

$$f(x^k) = P(x^k) + o(x^{kn}).$$

En effet, si $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$, alors $\lim_{x\to 0} \epsilon(x^k) = 0$.

Exemples 1. En prenant $f(x) = e^x$ et $c = -1$ dans la remarque, on trouve (remplacer x par $-x$)

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

2. En prenant $f(x) = e^{-x}$ et $c = -1$ dans la proposition, on trouve (multiplier tout par -1)

$$-e^{-x} = -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

3. En ajoutant à e^x, on trouve

$$e^x + e^{-x} = 2 + x^2 + o(x^3) \quad \text{et} \quad e^x - e^{-x} = 2x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

4. En divisant par 2 (c'est à dire en muliptliant par 1/2), on trouve

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

5. On a (en multipliant e^x par e)

$$e^{1+x} = ee^x = e + ex + \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^3 + o(x^3).$$

6. On a aussi (en remplaçant x par x^2)

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + -\frac{1}{6}x^6 + o(x^6).$$

Rappel 1.1.5 Une fonction est *paire* (resp. *impaire*) si $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$. Par exemple :

- x^2, $\cos(x)$ et $\mathrm{ch}(x)$ sont paires,
- x^3, $\sin(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$ sont impaires,
- e^x n'est ni paire ni impaire.

Un polynôme est *pair* (resp. *impair*) si et seulement si tous ses coefficients sont de degré pair (resp. impair). Par exemple :

- $1 - \frac{1}{2}x^2$ est pair,
- $x - \frac{1}{6}x^3$, est impair,
- $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ n'est ni pair ni impair.

Proposition 1.1.6 La partie régulière d'une fonction paire (resp. impaire) est un polynôme pair (resp. impair).

Démonstration. On sait que si $f(x) = P(x) + o(x^n)$, alors

$$f(-x) = P(-x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad -f(x) = -P(x) + o(x^n).$$

Si f est paire, alors $f(-x) = f(x)$ et donc, par unicité, $P(-x) = P(x)$ si bien que P est pair. De même, si f est impaire, alors $f(-x) = -f(x)$ et, par unicité encore, $P(-x) = -P(x)$ si bien que P set impaire. ■

1.2 Formule de Taylor-Young

Rappel 1.2.1 Si f est n fois dérivable, on désigne par f' la dérivée de f, par f'' la dérivée de f', par $f^{(3)}$ la dérivée de f'', et plus généralement par $f^{(n)}$ la n-ième dérivée de f. Par exemple,

- Avec $f(x) = e^x$, on a $f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x, \dots$
- Avec $f(x) = \cos(x)$, on a $f'(x) = -\sin(x), f''(x) = -\cos(x), f^{(3)}(x) = \sin(x), f^{(4)}(x) = \cos(x), f^{(5)}(x) = -\sin(x), \dots,$
- Avec $f(x) = (1+x)^\alpha$, on a $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \dots$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \dots$$

Rappel 1.2.2 Si n est un entier naturel, sa *factorielle* est

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots$$

Par exemple, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$. On pose aussi $1! =$ et $0! = 1$.

Théoreme 1.2.3 — Formule de Taylor-Young [a]**.** Si f est (continue et) n fois dérivable en 0, alors

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n).$$

a. Aussi appelée *formule de Maclaurin*

Démonstration. On utilise la proposition 1.2.4 plus bas et on procède par récurrence (le cas $n = 0$ étant immédiat) en intégrant

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)x + \frac{1}{2}f^{(3)}(0)x^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n).$$ ■

Exemples 1. Avec $f(x) = e^x$, on a

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1.$$

On en déduit que

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)}.$$

2. Avec $f(x) = \cos(x)$, on a
$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1, \ldots$$
ou encore $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ et $f^{(2k+1)}(0) = 0$. On en déduit que
$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2k+1})}.$$
On montre de même que
$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2k+2})}.$$

3. Avec $f(x) = (1+x)^\alpha$ on a
$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)}.$$
En posant $\alpha = -1$, on obtient
$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)}.$$
En remplaçant x par $-x$, on trouve
$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n)}.$$
En prenant $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve
$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots + \binom{1/2}{n}x^n + o(x^n)}.$$

Proposition 1.2.4 Si
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$
et si F est une primitive de f (c'est à dire que $f = F'$), alors
$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{1}{2}a_1 x^2 + \frac{1}{3}a_3 x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}a_n x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Démonstration. On rappelle d'abord que
$$\int_0^x f(\xi)\mathrm{d}\xi = F(x) - F(0) \quad \text{et} \quad \int_0^x \xi^k \mathrm{d}\xi = \frac{1}{k+1}x^{k+1}.$$

Par hypothèse, on a

$$f(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n + \xi^n\epsilon(\xi)$$

avec $\lim_{\xi\to 0}\epsilon(\xi) = 0$. On intègre pour trouver

$$F(x) - F(0) = a_0 x + \frac{1}{2}a_1 x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}a_n + x^n\eta(x).$$

avec

$$\eta(x) = \frac{1}{x^n}\int_0^x \xi^{n-1}\epsilon(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Il reste à s'assurer que $\lim_{x\to 0}\eta(x) = 0$. Cela résulte de la majoration

$$|\eta(x)| \leq \left|\frac{1}{x^n}\int_0^x \xi^{n-1}\mathrm{d}\xi\right| \times \sup_0^x |\epsilon(\xi)| = \frac{1}{n}\sup_0^x |\epsilon(\xi)|.$$ ■

Exemple Puisque la dérivée de $\ln(1+x)$ est

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n),$$

on a

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n)}.$$

1.3 Produit et composition

Proposition 1.3.1 Si

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

sont des développement limités à l'ordre n au voisinage de 0, alors

$$(fg)(x) = (PQ)(x)_{\leq n} + o(x^n)$$

est un développement limité de fg à l'ordre n au voisinage de 0.

Démonstration. On écrit

$$f(x) = P(x) + x^n\epsilon(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n\eta(x), \quad (PQ)(x) = (PQ)_{\leq n}(x) + x^n\lambda(x)$$

avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = \lim_{x\to 0}\eta(x) = \lim_{x\to 0}\lambda(x) = 0$. On aura donc

$$(fg)(x) = (PQ)(x)_{\leq n} + x^n(\lambda(x) + \epsilon(x)Q(x) + \eta(x)P(x) + x^n\epsilon(x)\eta(x))$$

et clairement

$$\lim_{x\to 0}(\lambda(x) + \epsilon(x)Q(x) + \eta(x)P(x) + x^n\epsilon(x)\eta(x)) = 0.$$ ■

Exemple Déterminer [1] le développement limité de $f(x) = \ln(1+x)\cos(x)$ en 0 à l'ordre 3.

On a

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

On calcule

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x)\cos(x) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) + o(x^3) \\ &= x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Proposition 1.3.2 Si

$$f(u) = P(u) + o(u^n) \quad \text{et} \quad u(x) = Q(x) + o(x^n)$$

sont des développement limités à l'ordre $n \geq 1$ au voisinage de 0 *et* $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$, alors

$$f(u(x)) = P(Q(x))_{\leq n} + o(x^n)$$

est un développement limité de à l'ordre n au voisinage de 0.

Démonstration. Nos hypothèses sur u impliquent l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 de la forme

$$u(x) = 0 + bx + x\lambda(x) = x(b + \lambda(x)) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \lambda(x) = 0.$$

D'autre part, notre hypothèse sur f nous dit que $f(u) = P(u) + u^n\epsilon(u)$ avec $\lim_{u\to 0} \epsilon(u) = 0$. On a donc

$$f(u(x)) = P(u(x)) + u(x)^n\epsilon(u(x)) = P(u(x)) + x^n(b + \lambda(x))^n\epsilon(u(x))$$

et

$$\lim_{x\to 0}(b + \lambda(x))^n\epsilon(u(x))) = 0.$$

On peut donc dans la suite remplacer f par P (et ajouter ensuite le terme correcteur). En utilisant la proposition 1.1.4, on peut même supposer que $f(u) = P(u) = u^k$ (puisque P et une somme de multiples de puissances) et il s'agit donc de montrer que

$$u(x)^k = Q(x)^k_{\leq n} + o(x^n).$$

1. On pourrait aussi utiliser la formule de Taylor-Young mais ce serait trop long.

Or on a

$$u(x) = Q(x) + x^n\eta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \eta(x) = 0$$

et donc

$$\begin{aligned} u(x)^k &= (Q(x) + x^n\eta(x))^k \\ &= Q(x)^k + kQ(x)^{k-1}x^n\eta(x) + \ldots + (x^n\eta(x))^k \\ &= Q(x)^k + x^n(kQ(x)^{k-1}\eta(x) + \ldots + x^{n(k-1)}\eta(x)^k) \end{aligned}$$

et $\lim_{x\to 0}(kQ(x)^{k-1}\eta(x) + \ldots + x^{n(k-1)}\eta(x)^k) = 0$. ■

Exemples 1. Déterminer le développement limité de $e^{\sin(x)}$ en 0 à l'ordre 3.
On a $e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3)$ et $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$. On calcule alors

$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} &= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

2. Déterminer le développement limité de $e^{\cos(x)}$ en 0 à l'ordre 2.
On remarque que

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 \neq 0.$$

On procède alors comme suit. On a

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2) \quad \text{et} \quad \cos(x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

et donc

$$\begin{aligned} e^{\cos(x)-1} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^2 + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$e^{\cos(x)} = ee^{\cos(x)-1} = e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^2).$$

3. Déterminer le développement limité de $\frac{1}{\cos(x)}$ en 0 à l'ordre 4.
On a

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

et

$$\cos(x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

(vu comme fonction de x^2). On calcule alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1 + (\cos(x) - 1)} \\
&= 1 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right)^2 + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

4. Déterminer le développement limité en 0 de $\tan(x)$ à l'ordre 5.
   On a

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
&= \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)} \\
&= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4\right) + o(x^5) \\
&= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{12}x^5 + \frac{5}{24}x^5 + o(x^5) \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)
\end{aligned}$$

car

$$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{-1+3}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{120} - \frac{1}{12} + \frac{5}{24} = \frac{1 - 10 + 25}{120} = \frac{2}{15}.$$

1.4 Applications

Exemple Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin(x)}}{x - \sin x}$.

On sait que

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

et on a déjà calculé

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

On en déduit que

$$e^x - e^{\sin(x)} = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

D'autre part, on sait que $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ si bien que

$$x - \sin x = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

On en déduit que

$$\frac{e^x - e^{\sin(x)}}{x - \sin x} = \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{\frac{1}{6} + o(1)} \longrightarrow \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 1$$

(on rappelle que $o(1)$ désigne *une* fonction qui tend vers 0 quand x tend vers 0).

Rappel 1.4.1 *Règle de l'Hôpital* : si u et v sont dérivables et

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \lim_{x \to x_0} v(x) = 0,$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \ell.$$

Exemple Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$.

1. Avec la règle de l'Hôpital : on a (en vérifiant bien à chaque fois que le numérateur et le dénominateur tendent bien vers 0)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

2. Avec les développements limités

$$\frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1) \longrightarrow -\frac{1}{2}.$$

Remarque Si

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_n x^n + o(x^n) \quad \text{avec} \quad n \geq 2 \quad \text{et} \quad a_n \neq 0,$$

alors la tangente en $x = 0$ à la courbe d'équation $y = f(x)$ à pour equation $y = a_1 x + a_0$ et la position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le tableau ci-dessous[2] (faire un dessin) :

	n pair	n impair
$a_n > 0$	Dessus	Dessous/dessus
$a_n < 0$	Dessous	Dessus/dessous

De plus, on a un *minimum local* si $a_1 = 0$, n est pair et $a_n > 0$ (faire un dessin). On a un *maximum local* si $a_1 = 0$, n pair et $a_n < 0$ (faire un dessin).

2. Quand n est impair, on dit que 0 est un *point d'inflexion*.

Exemples 1. Déterminer l'équation de la tangente en $x = 0$ à la courbe d'équation $y = \sin(x)$ ainsi que la position de la courbe par rapport à sa tangente ?
On a $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ si bien que la tangente a pour équation $y = x$ et la courbe passe au dessus puis au dessous de la tangente (faire un dessin).

2. Déterminer l'équation de la tangente en $x = 0$ à la courbe d'équation $y = \cos(x)$ ainsi que la position de la courbe par rapport à sa tangente ?
On a $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ si bien que la tangente (horizontale) a pour équation $y = 1$ et la courbe est en dessous de la tangente. C'est un maximum local (faire un dessin).

Remarque Tous les résultats de ce chapitre ont un analogue au voisinage de $a \neq 0$: il sufit de poser $h = x - a$ (ou de manière équivalente $x = a + h$) et remplacer x par h. En effet, x est au voisinage de a si et seulement si h est au voisinage de 0.

Exemples 1. Déterminer la position de la courbe d'équation $y = e^x$ par rapport à sa tangente lorsque $x = 1$?
On pose $x = 1 + h$. On a déjà vu que

$$e^{1+h} = e + eh + \frac{e}{2}h^2 + o(h^2).$$

On en déduit que la tangente à pour équation

$$y = eh + e = e(x-1) + e = ex$$

et que la courbe est au dessus de la tangente.

2. On peut aussi écrire la *formule de Taylor-Young* au voisinage de $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) =& f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ &+ (x-a)^n\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a}\epsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

.

1.5 Exercices (6 janvier 2026)

On pourra utiliser la notion o ou la notaion ϵ au choix.

Exercice 1.1 Déterminer le développement limité au voisinage de 0 de

1. $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3$ à l'ordre 2,
2. $-24x^2 + 13x + 7$ à l'ordre 4,
3. $\sin(x)$ à l'ordre 3,
4. $\sin(x)$ à l'ordre 4,
5. $-\ln(1+x)$ à l'ordre 3,
6. $\ln(1-x)$ à l'ordre 3,
7. $2\cos(x)$ à l'ordre 3,
8. $\cos(2x)$ à l'ordre 3,
9. $\sqrt[3]{1+3x}$ à l'ordre 2,
10. $\sqrt[4]{1+x^2}$ à l'ordre 4.

Exercice 1.2 Déterminer le développement limité au voisinage de 0 de

1. $\sin(2x) - 2\cos(x)$ à l'ordre 4,
2. $(x+x^2)^2 + \cos(x)$ à l'ordre 3,
3. $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$ à l'ordre 2,
4. $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ à l'ordre 3.

Exercice 1.3 A) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

1. $\ln(1+x)\cos(x)$,
2. $(1+x^2)\cos(x)$,
3. $e^x \sin(x)$,
4. $\cos^2(x)$,
5. $e^{2x}\ln(1+x)$.

B) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

1. $\dfrac{e^x \sin(x)}{x}$,
2. $\dfrac{e^{2x}\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 1.4 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

1. $\dfrac{1}{4+3x}$,
2. $\dfrac{3}{x-2}$,
3. $\sqrt{2+x}$,
4. $\sqrt[3]{2+3x}$,
5. $\ln(5+3x)$,
6. e^{3+2x}.

Exercice 1.5 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

1. $\sin(\ln(1+x))$,
2. $\ln(1+\sin(2x))$.

Exercice 1.6 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

1. $\ln(\cos(x))$,
2. e^{e^x},
3. $\sqrt{e^x + \cos(x)}$,
4. $\ln\left(\dfrac{e^x}{2} + \sin(x)\right)$.

Exercice 1.7 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

1. $\dfrac{x+3}{x+2}$,
2. $\dfrac{e^x}{\cos(x)}$,
3. $\dfrac{1}{1-\sin(x)}$,
4. $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+2x}}$,
5. $\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin(2x)}$.

Exercice 1.8 Calculer

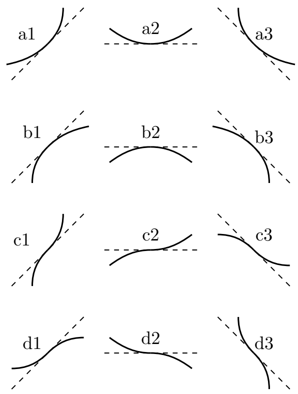
1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$,
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x+x^2}$,
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2+x^3}$,
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x}-1)x\sin(x)}{\tan(x)-x}$,
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{1-\sqrt{1-3x}}$,
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-\tan(x)}{x^2+x^3}$.

Exercice 1.9 Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente en $x=0$ à la courbe d'équation $y=f(x)$ ainsi que la position relative de la courbe par rapport à sa tangente. Dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum local.

1. $f(x)=\sin(2x)-2\cos(x)$,
2. $f(x)=\ln(1+x)+e^x$,
3. $f(x)=\sqrt{\cos(x)}$.

Exercice 1.10 Dans chacun des cas suivant, déterminer l'allure du graphe de la fonction f au voisinage de $x=0$.

1. $f(x)=-1+4x-3x^2+2x^3+o(x^3)$,
2. $f(x)=1-x^2+2x^3+o(x^3)$,
3. $f(x)=-x-x^3+o(x^3)$,
4. $f(x)=x^2-x^3+o(x^3)$,
5. $f(x)=1-2x+x^2-x^3+o(x^3)$,
6. $f(x)=2+4x+x^2+x^3+o(x^3)$,
7. $f(x)=2+4x-x^3+o(x^3)$,
8. $f(x)=2+x^3+o(x^3)$.



2. Algèbre linéaire (partie 1)

2.1 Vecteurs

Définition 2.1.1 Un *vecteur (colonne)* de longueur n est une liste de n nombres[a]

$$\vec{u} := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

appelés *composantes* de $\vec{u}$.

a. C'est la liste qui compte, les crochets sont là comme délimiteurs.

On désigne par $\mathbb{R}^n$ leur ensemble et on écrira donc $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$.

Exemples 1. Lorsque $n = 1$, un vecteur est tout simplement un nombre (réel) et on note leur ensemble $\mathbb{R}$.

2. Lorsque $n = 2$, un vecteur est un couple de nombres

$$\vec{u} := \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \text{par exemple } \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(faire un dessin).

Remarque Pour des raisons de commodité, un vecteur (colonne) s'écrit aussi sous la forme $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. On peut d'ailleurs aussi considérer la notion équivalente de vecteur ligne $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}$ de longueur n et tout ce qui suit s'applique *mutatis mutandis*.

Définition 2.1.2 La *somme* des vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur $\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ défini par

$$\vec{u} := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \vec{v} := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} := \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}.$$

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$, si $\vec{u} := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, alors $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ (faire un dessin).

Définition 2.1.3 Le *produit* d'un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ par un nombre t est le vecteur $t\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ défini par

$$\vec{u} := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad t\vec{u} := \begin{bmatrix} tu_1 \\ tu_2 \\ \vdots \\ tu_n \end{bmatrix}.$$

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$, si $\vec{u} := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, alors $4\vec{u} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix}$, $-2\vec{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ et $\frac{1}{2}\vec{u} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$(faire un dessin).

Définition 2.1.4 On dit que $t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \ldots + t_m\vec{u}_m \in \mathbb{R}^n$ est la *combinaison linéaire* de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m \in \mathbb{R}^n$ avec *coefficients* $t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$.

Exemple

1. $t\vec{u} + s\vec{v}$ est la *combinaison linéaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec coefficients t et s.
2. Plus concrètement, dans $\mathbb{R}^2$, si $\vec{u} := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, alors

$$2\vec{u} + 3\vec{v} = 2\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

est la combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec coefficients 2 et 3 (faire un dessin).

On écrira

$$\vec{0} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad -\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ \vdots \\ -u_n \end{bmatrix}.$$

Proposition 2.1.5 $\mathbb{R}^n$ est un *espace vectoriel* : on a toujours :

1. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$,
2. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$,
3. $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$,
4. $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$,
5. $1\vec{u}=\vec{u}$,
6. $t(\vec{u}+\vec{v})=t\vec{u}+t\vec{v}$,
7. $(t+s)\vec{u}=t\vec{u}+s\vec{u}$,
8. $(ts)\vec{u}=t(s\vec{u})$.

Démonstration. Laissé en exercice. ∎

Remarques 1. Un *espace vectoriel* est un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par les constantes qui satisfait les huit propriétés de la proposition (ce qui inclut l'existence de l'élément nul ainsi que de l'opposé de n'importe quel élément).

2. On écrit tout simplement $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ sans les parenthèses.
3. On écrit $\vec{u}-\vec{v}:=\vec{u}+(-\vec{v})$.
4. Simplification : on a toujours $\vec{u}+\vec{w}=\vec{v}+\vec{w}\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{v}$.
5. Simplification : on a toujours (exercice)

$$t\vec{u}=t\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{v}\text{ ou }t=0\quad\text{et}$$

$$t\vec{u}=s\vec{u}\Leftrightarrow t=s\text{ ou }\vec{u}=\vec{0}.$$

Définition 2.1.6 Un élément de $\mathbb{R}^n$ s'appelle aussi un *point* et on dit alors *coordonnées* au lieu de composantes. Si P et Q sont deux points de $\mathbb{R}^n$, le vecteur $\overrightarrow{PQ}\in\mathbb{R}^n$ est défini par

$$P:=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad Q:=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\overrightarrow{PQ}:=\begin{bmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\\vdots\\b_n-a_n\end{bmatrix}.$$

La *translation* de vecteur $\vec{u}\in\mathbb{R}^n$ associe au point $P\in\mathbb{R}^n$ le point $P+\vec{u}\in\mathbb{R}^n$ défini par

$$\vec{u}:=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad P:=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\quad\Rightarrow P+\vec{u}:=\begin{bmatrix}a_1+u_1\\a_2+u_2\\\vdots\\a_n+u_n\end{bmatrix}.$$

Remarques 1. On a donc $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}\Leftrightarrow Q=P+\vec{u}$ (faire un dessin).

2. En particulier, en considérant le *point*

$$O := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

on a $\vec{u} = \overrightarrow{OP} \Leftrightarrow P = O + \vec{u}$ (on identifie un point avec l'extrémité du vecteur placé à l'origine).

3. Contrairement aux vecteurs, on ne peut *pas* ajouter des points entre eux ou les multiplier par des constantes.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$,

1. si $P := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $Q := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, alors $\overrightarrow{PQ} := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (faire un dessin),
2. si $P := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, alors $P + \vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (faire un dessin).

2.2 Droites et plans

Définition 2.2.1 Une *équation cartésienne* plane est une équation de la forme $ax + by = c$ avec a, b, c non tous nuls. La *droite* associée est

$$\mathcal{D} := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ ax + by = c \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Exemple La droite d'équation $2x - 3y = 6$ passe par les points $P := \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ et $Q := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ (faire un dessin). Attention, l'équation $\frac{2}{3}x - y = 2$ définit la *même* droite !

Définition 2.2.2 Une *représentation linéaire paramétrique* plane est un système de la forme

$$\begin{cases} x = \alpha t + \beta \\ y = \gamma t + \delta \end{cases}$$

avec α, γ non tous nuls. La *droite* associée est

$$\mathcal{D} := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha t + \beta \\ \gamma t + \delta \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

De manière équivalente, on a

$$\mathcal{D} := \{P + t\vec{u} \ : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{avec} \quad P = \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix} \text{ et } \vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

On dit alors que $(P, \vec{u})$ est un *repère* pour $\mathcal{D}$ ou plus informellement, que $\mathcal{D}$ est la droite *passant par P et dirigée par $\vec{u}$*.

Exemple $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t - 2 \end{cases}$ qui s'écrit aussi $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (faire un dessin).
C'est donc la droite passant par $P := \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ et dirigée par $\vec{u} := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Attention, la représentation $\begin{cases} x = 3t/2 + 3 \\ y = t \end{cases}$ par exemple définit la même droite !

Remarque 1. (Paramétrer) On peut passer d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique comme suit :

$$2x - 3y = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}t + 3 \\ y = t. \end{cases}$$

2. (Éliminer) On peut passer d'une équation paramétrique a une équation cartésienne comme suit :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(y/2 + 1) \\ t = y/2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x - \frac{3}{2}y = 3.$$

3. On a une situation analogue dans l'espace (faire un dessin) :

ESPACE	Plan	Droite
Cartésien	$ax + by + cz = d$	$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$
Paramétrique	$P + t\vec{u} + s\vec{v}$	$P + t\vec{u}$

On remarquera la propriété fondamentale suivante : « nombre d'équations » + « nombre de paramètres » = « dimension de l'espace ».

Exemples 1. Déterminer[1] le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y + 3z = 1$? On a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow x + 2y + 3z = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t - 3s \\ y = t \\ z = s \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

C'est donc le plan passant par $P := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et dirigé par $\vec{u} := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et par $\vec{v} := \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. Comprendre « Paramétrer ».

2. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $P := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et dirigé par $\vec{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} := \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$?

On a

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 2 - t + 2s \\ z = 3 + t - 3s \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} t = x + s - 1 \\ y = 2 - (x + s - 1) + 2s \\ z = 3 + (x + s - 1) - 3s \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x + s \\ z = 2 + x - 2s \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} s = x + y - 3 \\ z = 2 + x - 2(x + y - 3) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow z = 8 - x - 2y \\
&\Leftrightarrow x + 2y + z = 8.
\end{aligned}$$

2.3 Systèmes linéaires

Définition 2.3.1 Un *système linéaire* [a] est une liste de n équations linéaires à m inconnues :

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n. \end{cases}$$

Le *système homogène associé* est

$$S_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = 0. \end{cases}$$

Si $S = S_0$, on dit que le système est *homogène*.

a. On devrait dire « système d'équations linéaires ».

On dispose de la notation *vectorielle*

$$S : x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

ou encore la notation *en ligne*

$$S : x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_m\vec{u}_m = \vec{b}$$

avec

$$\vec{u}_1 := \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 := \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \quad \vec{u}_m := \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

On préférera en pratique la notation *matricielle* :

Définition 2.3.2 Une *matrice* à n lignes et m colonnes (on dira aussi $n \times m$) est un tableau [a] de nombres

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

appelés *coefficients*. Lorsque $m = n$, on dit que A est une matrice *carrée de taille* n.

a. Ici encore, ce sont les nombres qui comptent, les crochets étant là comme délimiteurs.

Remarque On peut voir un vecteur (colonne) comme une matrice à une seule colonne et un vecteur ligne comme une matrice à une seule ligne. De même on peut voir - et on verra - une matrice comme une suite horizontale de vecteurs (colonnes)

$$A = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_m \end{bmatrix}$$

ou comme une suite verticale de vecteurs lignes.

On écrira alors notre système sous forme stylisée [2]

$$S : \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

2. Cette notation sera justifiée plus tard.

ou encore en notation *compacte*

$$S : A\vec{x} = \vec{b}$$

avec $\vec{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ et $\vec{b} := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$. On dit que A est la *matrice* du système et que

$$\begin{bmatrix} A & \vec{b} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_m & \vec{b} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$

est la *matrice augmentée.*

Exemple On considère le système

$$S : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 1 \end{cases} .$$

C'est un système linéaire à deux équations et trois inconnues et le système homogène associé est

$$S_0 : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} .$$

En notation vectorielle, on a

$$S : x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et en notation matricielle

$$S : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice augmentée est

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On désignera par $\mathcal{S}ol(S) \subset \mathbb{R}^m$ l'ensemble des *solutions* du système linéaire S. Par définition, on a donc

$$S : \vec{x} \in \mathcal{S}ol(S) \quad \text{et} \quad S_0 : \vec{x} \in \mathcal{S}ol(S_0).$$

Proposition 2.3.3 1. $\mathcal{S}ol(S_0) \neq \emptyset$ et si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{S}ol(S_0)$, alors $t\vec{x} + s\vec{y} \in \mathcal{S}ol(S_0)$.

2. Si $P \in \mathcal{S}ol(S)$, alors $P + \vec{x} \in \mathcal{S}ol(S) \Leftrightarrow \vec{x} \in \mathcal{S}ol(S_0)$.

La première assertion dit que toute combinaison linéaire de solutions de S_0 est encore solution (de S_0). La seconde dit que « les solutions de S s'obtiennent en ajoutant *la* solution générale de S_0 à *une* solution particulière de S ».

Démonstration. On utilise la notation vectorielle. Pour la première assertion, on remarque d'abord que $\vec{0} \in \mathcal{S}ol(S_0)$. On suppose ensuite que

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_m\vec{u}_m = \vec{0} \quad \text{et} \quad y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + \ldots + y_m\vec{u}_m = \vec{0}.$$

On multiplie respectivement par t et s, on additionne et on factorise pour obtenir

$$(tx_1 + sy_1)\vec{u}_1 + (tx_2 + sy_2)\vec{u}_2 + \ldots + (tx_m + sy_m)\vec{u}_m = \vec{0}.$$

Pour la seconde assertion, on procède de même et on suppose donc que l'on a une solution particulière

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \ldots + c_m\vec{u}_m = \vec{b}.$$

Maintenant, dire que $\vec{x} \in S_0$ signifie que

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_m\vec{u}_m = \vec{0}.$$

En additionnant et en factorisant, c'est équivalent à

$$(c_1 + x_1)\vec{u}_1 + (c_2 + x_2)\vec{u}_2 + \ldots + (c_m + x_m)\vec{u}_m = \vec{b}.$$ ■

Exemple On considère le système

$$S : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - z = 1 \end{array} \right. .$$

On cherche d'abord une solution « évidente » :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On résout ensuite le système homogène

$$S_0 : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On en déduit que

$$\mathcal{S}ol(S) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} t+1 \\ -t \\ t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.4 Méthode du pivot

Définition 2.4.1
1. Dans une matrice, le *pivot* d'une ligne est le premier coefficient non nul.
2. Une matrice est *échelonnée*[a] si « le pivot se décale vers la droite ligne par ligne ».
3. Le *rang* d'une matrice échelonnée est le nombre de pivots.

a. Il existe aussi une notion de matrice échelonnée *réduite* que nous ne verrons pas ici.

Exemple Voici une matrice échelonnée (de rang 2) et deux matrices non-échelonnées :

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} & 6 \end{bmatrix}.$$

Définition 2.4.2 Un système linéaire

$$S : A\vec{x} = \vec{b}$$

est dit *échelonné* si la matrice augmentée $[A\ \vec{b}]$ est échelonnée. Le *rang* du système S est alors le rang de la matrice A. S'il y a un pivot sur la $j$ème colonne de A, on dit que x_j est une *variable pivot*. Sinon, on dit que x_j est une *variable libre*.

Exemples
1. Le système à 3 équations et 3 inconnues

$$S : \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ -8y - 2z = -12 \\ z = 2 \end{cases}$$

est échelonné de rang 3 (sans variable libre). La troisième équation fournit $z = 2$. On remplace dans la seconde qui s'écrit $-8y - 4 = -12$ et fournit $y = 1$. On remplace dans la première qui s'écrit $2x + 1 + 2 = 5$ qui fournit $x = 1$. Il existe donc une unique solution, c'est le point

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

2. Le système à 4 équations et 5 inconnues

$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \\ 2x_4 + x_5 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

est échelonné de rang 3 avec deux variables libres x_2 et x_5. On pose $t := x_2$ et $s := x_5$. On remplace dans la troisième équation pour trouver $2x_4 + s = 1$

et donc $x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s$. On remplace dans la seconde pour trouver $x_3 - s = 0$ et donc $x_3 = s$. Enfin, on remplace dans la première pour trouver

$$x_1 + t + s + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s + s = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = -\frac{1}{2} - t - \frac{3}{2}s.$$

En écriture vectorielle, notre système est donc équivalent à

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - t - \frac{3}{2}s \\ t \\ s \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L'ensemble $\mathcal{S}ol(S)$ est donc le *plan* dans $\mathbb{R}^5$ passant par P et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec

$$P := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u} := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} := \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lemme 2.4.3 Soit S un système linéaire échelonné à n équations et m inconnues.

1. S'il y a un pivot sur la dernière colonne de la matrice augmentée, alors le système n'a pas de solution,
2. sinon, les solutions s'écrivent de manière unique

$$P + t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \cdots + t_d\vec{v}_d$$

avec $P, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_d \in \mathbb{R}^m$ fixés (mais pas uniques) où d est le nombre de variables libres.

Démonstration. S'il y a un pivot p sur la dernière colonne, alors la dernière ligne non nulle s'écrit

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_m = p,$$

ce qui est impossible.

On suppose dorénavant que ce n'est pas le cas. Les variables *libres* x_j peuvent prendre n'importe quelle valeur $t_1, \ldots, t_d$. On procède alors en remontant comme suit. Si x_m est libre, alors $x_m = t_d$. Sinon, c'est une variable pivot et la dernière ligne non nulle s'écrit $a_{r,m}x_m = b_r$ si bien que

$$x_m = c_r := \frac{b_r}{a_{r,m}}.$$

On passe ensuite à x_{m-1}, etc. La ligne correspondant à x_j s'écrira

$$a_{i,j}x_j + a_{i,j+1}x_{j+1} + \ldots + a_{i,m}x_m = b_i$$

avec $a_{ij} \neq 0$. On aura donc

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{b_i}{a_{i,j}} - \frac{a_{i,j+1}}{a_{i,j}} x_{j+1} + \ldots - \frac{a_{i,m}}{a_{i,j}} x_m \\ &= c_j + c_{j1} t_1 + \ldots + c_{jd} t_d \end{aligned}$$

après simplification par recurrence descendante. Il suffit alors de poser

$$P = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \quad \vec{v}_d = \begin{bmatrix} c_{1d} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{md} \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Définition 2.4.4 Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice sont les suivantes :

1. ajouter (ou retrancher) à une ligne un multiple d'une *autre* ligne ($L_i \leftarrow L_i + cL_j$ avec $j \neq i$),
2. échanger deux ligne ($L_i \leftrightarrow L_j$),
3. multiplier (ou diviser) une ligne par une constante *non nulle* ($L_i \leftarrow cL_i$ avec $c \neq 0$).

Proposition 2.4.5 Les opérations élémentaires sur une matrice augmentée ne changent pas les solutions du système linéaire correspondant.

Démonstration. Montrons qu'une solution reste solution lorsqu'on effectue une opération élémentaire :

1. ($L_i \leftarrow L_i + cL_j$) Si
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m = b_i \quad \text{et } a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jm}x_m = b_j$$
alors
$$(a_{i1} + ca_{j1})x_1 + (a_{i2} + ca_{j2})x_2 + \ldots + (a_{im} + ca_{jm})x_m = b_i + cb_j.$$
2. ($L_i \leftrightarrow L_j$) Si
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m = b_i \quad \text{et } a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jm}x_m = b_j$$
alors
$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jm}x_m = b_j \quad \text{et } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m = b_i.$$
3. ($L_i \leftarrow cL_i$) Si
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m = b_i$$
alors
$$ca_{i1}x_1 + ca_{i2}x_2 + \ldots + ca_{im}x_m = cb_i.$$

Pour la réciproque, on remarque que les opérations élémentaires sont réversibles :

1. Avec $L_i \leftarrow L_i + cL_j$, il suffit de faire $L_i \leftarrow L_i - cL_j$,
2. Avec $L_i \leftrightarrow L_j$, il suffit de faire $L_i \leftrightarrow L_j$,
3. Avec $L_i \leftarrow cL_i$, il suffit de faire $L_i \leftarrow \dfrac{1}{c}L_i$. ∎

.

Exemples 1. Résoudre

$$S : \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 4x - 6y = -2 \\ -2x + 7y + 2z = 9 \end{cases} \quad ?$$

On échelonne la matrice augmentée en appliquant la *méthode du pivot* :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -\mathbf{8} & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -\mathbf{8} & -2 & -12 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix}.$$

On en déduit que

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mathbf{x} + y + z = 5 \\ -8\mathbf{y} - 2z = -12 \\ \mathbf{z} = 2 \end{cases} .$$

On sait alors que le point $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ est l'unique solution.

2. Résoudre

$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 1 \end{cases} \quad ?$$

On échelonne la matrice augmentée en groupant au maximum les opérations :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_2 - L_3$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a donc

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x_1} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ \mathbf{x_3} - x_5 = 0 \\ 2\mathbf{x_4} + x_5 = 1 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

On sait alors que $\mathcal{S}ol(S)$ est le *plan* dans $\mathbb{R}^5$ passant par P et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec

$$P := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u} := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} := \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. À quelle condition sur a, b, c le système

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = a \\ 2x + 7y + 4z + 2t = b \\ -x + 4y + 13z - t = c \end{cases}$$

admet il une solution ?
On échelonne la matrice augmentée

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & a \\ 2 & 7 & 4 & 2 & b \\ -1 & 4 & 13 & -1 & c \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & a \\ 0 & 3 & 6 & 0 & b - 2a \\ 0 & 6 & 12 & 0 & a + c \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & a \\ 0 & 3 & 6 & 0 & b - 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5a - 2b + c \end{bmatrix}.$$

La condition est donc $5a - 2b + c = 0$ (pas de pivot sur la dernière colonne).

Théoreme 2.4.6 — du pivot de Gauss. On peut toujours échelonner une matrice en effectuant des opérations élémentaires sur ses lignes.

Démonstration. Il s'agit de la *méthode du pivot*. Le premier pivot p_1 est le premier coefficient non nul de la première colonne non-nulle :

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & p_1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & * & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

On échange la ligne du pivot avec la première ligne pour obtenir une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & c_2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

avec $p_1 \neq 0$. On effectue ensuite les opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{c_i}{p} L_1$ pour obtenir une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

On conserve dorénavant L_1 et on effectue les mêmes opérations sur la matrice constituée de $L_2, \ldots, L_n$. ■

Définition 2.4.7

1. Le *rang* $\operatorname{rang}(A)$ d'une matrice A est le rang (nombre de pivots) de la matrice après échelonnement [a].
2. Le *rang* $\operatorname{rang}(S)$ d'un système linéaire S est le rang de la matrice A du système.

[a] Par la méthode du pivot.

Exemples

1. Le rang de

$$S : \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 4x - 6y = -2 \\ -2x + 7y + 2z = 9 \end{cases} \quad \text{ou de} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

est 3.

2. Le rang de

$$S:\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2+x_3+3x_4+2x_5=1 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4+x_5=1 \end{array}\right. \quad \text{ou de} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

est 3.

Remarques 1. Un système linéaire peut n'avoir aucune solution, en avoir une seule, ou alors une infinité.

2. Un système linéaire avec même nombre n d'équations que d'inconnues est de rang n si et seulement si il possède une unique solution.
3. Un système linéaire *homogène* de n équations à m inconnues avec $n < m$ a une infinité de solutions.

Définition 2.4.8 Une matrice A à n lignes et n colonnes de rang n est dite *non-singulière*. Un système linéaire S à n équations et n inconnues de rang n est appelé *système de Cramer*.

Remarque Un système linéaire S est un système de Cramer si et seulement si la matrice A du système est non-singulière. Cela signifie que la matrice échelonnée est de la forme

$$\begin{bmatrix} p_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & p_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & p_n \end{bmatrix}$$

avec $p_1, p_2, \ldots, p_n$ non nuls.

2.5 Sous-espace vectoriel

Définition 2.5.1 On dit qu'une partie E de $\mathbb{R}^n$ est un *sous-espace vectoriel* si

1. $\vec{0} \in E$,
2. $\vec{u}, \vec{v} \in E \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} \in E$,
3. $\vec{u} \in E, t \in \mathbb{R} \Rightarrow t\vec{u} \in E$.

Exemples 1. $\mathbb{R}^n$ et $\{\vec{0}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

2. $E = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ x-y=0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

   $E = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ x-y=1 \right\}$ n'est *pas* un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

   $E = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2-y=0 \right\}$ n'est *pas* un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

3. $E = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

   $E = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t-1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ n'est *pas* un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

   $E = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ n'est *pas* un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2.5.2 Une partie E de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si

1. $E \neq \emptyset$,
2. $\vec{u}, \vec{v} \in E, t, s \in \mathbb{R} \Rightarrow t\vec{u} + s\vec{v} \in E$.

Démonstration. Supposons tout d'abord que E est un sous-espace vectoriel. Puisque $\vec{0} \in E$, on a $E \neq \emptyset$. De plus, si on se donne $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $t, s \in \mathbb{R}$, alors $t\vec{u} \in E$ et $t\vec{v} \in E$ si bien que $t\vec{u} + s\vec{v} \in E$. Réciproquement, puisque $E \neq \emptyset$, il existe au moins un vecteur $\vec{u} \in E$ et alors $\vec{0} = 0\vec{u} \in E$. Si on se donne $\vec{u}, \vec{v} \in E$, alors $\vec{u} + \vec{v} = 1\vec{u} + 1\vec{v} \in E$. Enfin, si $\vec{u} \in E$ et $t \in \mathbb{R}$, alors $t\vec{u} = t\vec{u} + 0\vec{u} \in E$. ■

Remarque Pour une partie E de $\mathbb{R}^n$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. E est un sous-espace vectoriel,
2. E est stable par combinaison linéaire,
3. E est un espace vectoriel (les huit propriétés de la proposition 2.1.5) pour l'addition des vecteurs et la multiplication par des constantes.

Proposition 2.5.3
1. Si S_0 est un système linéaire *homogène* à n inconnues, alors $\mathcal{S}ol(S_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r) := \{t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \ldots + t_r\vec{u}_r : t_1, t_2, \ldots, t_r \in \mathbb{R}\}$$

   est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. La première assertion résulte de la proposition 2.3.3. Pour la seconde, on pose $E := \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r)$ et on remarque d'abord que

$$\vec{0} = 0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \ldots 0\vec{u}_r \in E.$$

Ensuite, si

$$t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \ldots + t_r\vec{u}_r \in E \quad \text{et} \quad s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2 + \ldots + s_r\vec{u}_r \in E,$$

alors

$$(t_1 + s_1)\vec{u}_1 + (t_2 + s_2)\vec{u}_2 + \ldots (t_r + s_r)\vec{u}_r \in E.$$

Enfin, si

$$t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \ldots t_r\vec{u}_r \in E$$

alors

$$tt_1\vec{u}_1 + tt_2\vec{u}_2 + \ldots tt_r\vec{u}_r \in E.$$

■

Définition 2.5.4 Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_d \in E$. On dit que $\mathcal{B} := (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_d)$ est une *base* de E si tout $\vec{b} \in E$ s'écrit de manière *unique* comme combinaison linéaire

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_d\vec{u}_d = \vec{b}.$$

On dit alors que $x_1, x_2, \ldots, x_d$ sont les *composantes* du vecteur $\vec{b}$ dans la base $\mathcal{B}$ et on pose

$$[\vec{b}]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}$$

Remarquons que, dans ce cas, on aura

$$E := \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_d)$$

mais que notre condition est plus forte car on requiert l'unicité de l'écriture.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

On voit donc que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ et que les composantes de $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ dans cette base sont x et y.

2. Plus généralement, dans $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alors, $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est la *base canonique* de $\mathbb{R}^n$ et $[\vec{b}]_{\mathcal{B}} = \vec{b}$. En effet, on a

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \ldots + b_n\vec{e}_n = \vec{b}$$

(écriture en ligne).

3. Dans $\mathbb{R}^2$, si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas multiples l'un de l'autre, alors $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ est toujours une base Concrètement, on peut prendre par exemple $\vec{u} := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Quelles sont alors les composantes de $\vec{b} := \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$?

   On cherche x, y tels que

$$x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{b} \Leftrightarrow x \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + y = 9 \\ 2x - y = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3x + (2x - 1) = 9 \\ y = 2x - 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3 \end{array} \right. .$$

   On trouve donc $[\vec{b}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

4. Déterminer une base de l'ensemble E des solutions du système homogène

$$S_0 : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{array} \right. ?$$

   On applique la méthode du pivot

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   On en déduit que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = t \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   On voit ainsi que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est une base de E.

Remarque Si on pose

$$A = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_d \end{bmatrix},$$

alors $\mathcal{B} := (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_d)$ est une base de E si et seulement si, pour tout $\vec{b} \in E$, l'équation

$$S : A\vec{x} = \vec{b}$$

a une unique solution.

Proposition 2.5.5 Soit

$$S : A\vec{x} = \vec{b}$$

un système linéaire avec *même* nombre n d'équations que d'inconnues. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes

1. S a une unique solution,
2. S est un système de Cramer,
3. A est non-singulière,
4. les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Par définition, on a (4) $\Rightarrow$ (1). D'autre part, on sait déjà que (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) et on sait que (4) $\Rightarrow$ (1). Mais comme (3) ne dépend pas de $\vec{b}$, on peut remplacer $\vec{b}$ par n'importe quel vecteur $\vec{u} \in E$ dans l'implication (3) $\Rightarrow$ (1) et on a donc aussi (3) $\Rightarrow$ (4). ∎

2.6 Dimension

Lemme 2.6.1 Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ ayant pour bases respectives $\mathcal{B} := (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_d)$ et $\mathcal{C} := (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r)$. Si $F \subset E$, alors $r \leq d$.

Démonstration. On procède par l'absurde et on suppose que $d < r$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E et que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r \in E$ (car $F \subset E$), on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_1 := a_{11}\vec{u}_1 + a_{21}\vec{u}_2 + \ldots + a_{d1}\vec{u}_d \\
&\vec{v}_2 := a_{12}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2 + \ldots + a_{d2}\vec{u}_d, \\
&\vdots \\
&\vec{v}_r := a_{1p}\vec{u}_1 + a_{2r}\vec{u}_2 + \ldots + a_{dr}\vec{u}_d.
\end{aligned}$$

Le système

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = 0 \\
\qquad\qquad\vdots \\
a_{d1}x_1 + a_{d2}x_2 + \ldots + a_{dr}x_r = 0
\end{cases}$$

a une infinité de solutions puisque $d < r$. Pour *chacune* de ces solutions, on aura (en additionnant et factorisant)

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_r\vec{v}_r = 0\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \ldots + 0\vec{u}_d = \vec{0}$$

et donc plusieurs façons d'écrire le vecteur nul comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{C}$ est une base de F. ∎

Lemme 2.6.2 Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ avec $F \subset E$. Si $\mathcal{C} := (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r)$ est une base de F, alors il existe une base de E de la forme

$$\mathcal{B} := (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \vec{u}_{r+2}, \ldots, \vec{u}_d).$$

Démonstration. Tout d'abord, puisque $F \subset \mathbb{R}^n$ et que la base canonique a n vecteurs, le lemme 2.6.1 implique que $r \leq n$. Maintenant, si $F \neq E$, alors il existe $\vec{u}_{r+1} \in \mathbb{R}^n$ avec $\vec{u}_{r+1} \in E$ mais $\vec{u}_{r+1} \notin F$. On peut alors remplacer F par le sous-espace qui a pour base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{r+1})$. On aura donc $r + 1 \leq n$. Le processus doit s'arrêter et à un certain moment et on trouve $F = E$. ■

Théoreme 2.6.3 Tout sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ possède une base. Deux bases quelconques ont même nombre d'éléments.

Démonstration. Pour la première assertion, il suffit d'appliquer le lemme 2.6.2 avec $F = \{\vec{0}\}$. Pour la seconde, il suffit d'appliquer le lemme 2.6.1 au cas $F = E$. ■

Comme conséquence immédiate, on obtient une caractérisation des sous-espaces vectoriels :

Proposition 2.6.4 Pour $E \subset \mathbb{R}^n$, les conditions suivantes sont équivalentes

1. E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$,
2. il existe un système linéaire *homogène* à n inconnues S_0 tel que $E = \mathcal{S}ol(S_0)$,
3. il existe $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r \in \mathbb{R}^n$ tels que $E = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r)$,

Démonstration. On a vu dans le lemme 2.5.3 que (3) $\Rightarrow$ (1) et (2) $\Rightarrow$ (1) et il résulte du théorème 2.6.3 que (1) $\Rightarrow$ (3). Il reste donc seulement à montrer que (1) $\Rightarrow$ (2).

On introduit la notion de *produit scalaire* $\vec{x} \cdot \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ de deux vecteurs en posant

$$\vec{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \vec{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

On vérifie ensuite que l'*orthogonal*

$$E^{\perp} := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \ / \ \forall \vec{u} \in E, \vec{v} \cdot \vec{u} = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et on choisit une base

$$\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_d := \begin{bmatrix} a_{d1} \\ a_{d2} \\ \vdots \\ a_{dn} \end{bmatrix}$$

de $E^{\perp}$. On considère alors le système

$$S_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{d1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{dn}x_n = 0. \end{cases}$$

et on vérifie que $\mathcal{S}ol(S_0) = E$. Les détails sont laissés en exercice (on utilisera pas ce résultat par la suite). ■

Définition 2.6.5 La *dimension* $\dim(E)$ d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ est le nombre d'éléments d'une base. Si $\dim(E) = 1$, on dit que E est une *droite (vectorielle)*. Si $\dim(E) = 2$, on dit que E est un *plan (vectoriel)*.

Exemples

1. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
2. Si
$$S_0 : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$
alors, $\mathcal{S}ol(S_0)$ est une droite.

Remarques

1. Si des vecteurs appartiennent à une même droite (resp. un même plan), il sont dits *colinéaires* (resp. *coplanaires*).
2. Un vecteur $\vec{u}$ d'une droite est une base si et seulement si $\vec{u} \neq \vec{0}$. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base d'un plan si et seulement si ils ne sont pas colinéaires.

Proposition 2.6.6 Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ avec $F \subset E$. Alors $\dim F \leq \dim E$ avec égalité si et seulement si $E = F$.

Démonstration. Résulte du lemme 2.6.1. ■

Exemples

1. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles $\mathcal{D}$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles $\mathcal{D}$, les plans vectoriels $\mathcal{P}$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ sont deux droites et $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$, alors $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$.
4. Si $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ sont deux plans et $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$, alors $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$.

Théoreme 2.6.7 — du rang. Si S_0 est un système linéaire *homogène* à m inconnues, alors

$$\dim(\mathcal{S}ol(S_0)) + \operatorname{rang}(S_0) = m.$$

Démonstration. On peut supposer que le système est échelonné auquel cas cela résulte du lemme 2.4.3. ■

Remarque La dimension de l'espace des solutions est égale au nombre de variables libres du système échelonné.

Définition 2.6.8 Soit A une matrice à n lignes et m colonnes.

1. Le *noyau* de A est l'ensemble $\ker(A)$ des $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ qui sont solution du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$.
2. L'*image* de A est l'ensemble $\mathrm{im}(A)$ des $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ tels que le système $A\vec{x} = \vec{b}$ a au moins une solution.

Remarques

1. On a donc
$$\vec{x} \in \ker A \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{b} \in \mathrm{im}(A) \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^m, A\vec{x} = \vec{b}.$$
2. Si on désigne par S le système $A\vec{x} = \vec{b}$, on voit donc que
$$\mathcal{S}ol(S_0) = \ker(A) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}ol(S) \neq \emptyset \Leftrightarrow \vec{b} \in \mathrm{im}(A).$$
3. Si $A = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_m \end{bmatrix}$, alors
$$\vec{b} \in \mathrm{im}(A) \Leftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_m, \quad x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_m\vec{u}_m = \vec{b}$$
et donc $\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m)$.
4. En d'autres termes,
$$\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m) = \mathrm{im}\left(\begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_m \end{bmatrix}\right).$$

Exemple

1. Determiner le noyau de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$?

   On doit donc résoudre
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
   On échelonne la matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}.$$
   On pose $z = t$ (variable libre) et on aura donc $-3y + -6t = 0$ qui donne $y = -2t$ puis $x - 4t + 3t = 0$ qui donne $x = t$ et donc finalement
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   si bien que
$$\ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

2. Déterminer l'image de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$?

   On échelonne la matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{rrrrc} 1 & 2 & -1 & 1 & a \\ 2 & 7 & 4 & 2 & b \\ -1 & 4 & 13 & -1 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -1 & 1 & a \\ 0 & 3 & 6 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5a-2b+c \end{array}\right].$$

   On voit donc que

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \operatorname{im}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 13 & -1 \end{bmatrix}\right) \Leftrightarrow 5a - 2b + c = 0.$$

   L'image est donc le plan d'équation $5x - 2y + z = 0$.

Proposition 2.6.9 Si A est une matrice à n lignes et m colonnes, alors

$$\dim(\operatorname{im}(A)) = \operatorname{rang}(A).$$

Démonstration. On vérifie d'abord que si P est une matrice inversible, alors

$$\dim(\operatorname{im}(A)) = \dim(\operatorname{im}(PA)).$$

Plus précisément $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r)$ est une base de $\operatorname{im}(A)$ si et seulement si $(P\vec{v}_1, P\vec{v}_2, \ldots, P\vec{v}_r)$ est une base de $\operatorname{im}(PA)$. Il en résulte que $\dim(\operatorname{im}(A))$ ne dépend que de la forme échelonnée de A. En effet, effectuer une opération élémentaire sur A revient à remplacer A par EA ou E est la matrice (inversible) obtenue en effectuant cette opération sur I. Enfin, si la matrice est échelonnée, il est aisé de voir que les colonnes avec pivot forment une base. Les détails sont laissés en exercice. ■

Remarques 1. La démonstration de la proposition 2.6.9 montre que si $A = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_m \end{bmatrix}$, alors les vecteurs *correspondant* aux colonnes des pivots de la matrice échelonnée forment une base de $\operatorname{im}(A)$.

2. On peut écrire le *théorème du rang* sous la forme

$$\dim(\ker(A)) + \dim(\operatorname{im}(A)) = \dim(\mathbb{R}^m).$$

3. Si A est échelonnée, alors $\dim(\ker(A))$ est le nombre de variables libres et $\dim(\operatorname{im}(A))$ est le nombre de variables pivots.

Exemple On considère la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On pose

$$\vec{u}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_4 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On échelonne

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2$$

$$A := \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les pivots sont sur la *première* et la *troisième* colonne. On en déduit que $(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$ est une base de $\operatorname{im}(A)$.

Proposition 2.6.10 Pour une matrice carrée A de taille n, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est non-singulière,
2. $\ker(A) = \{\vec{0}\}$,
3. $\operatorname{im}(A) = \mathbb{R}^n$.

Démonstration. La matrice A est non-singulière si et seulement si le système $A\vec{x} = \vec{0}$ a une unique solution. Or on sait que $A\vec{0} = \vec{0}$. Cela veut donc dire que $\ker(A) = \{\vec{0}\}$. De plus, par le théorème du rang,

$$\ker(A) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \dim(\ker(A)) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = n \Leftrightarrow \operatorname{im}(A) = \mathbb{R}^n. \quad \blacksquare$$

2.7 Opérations sur les matrices

Définition 2.7.1 La *somme* des matrices à n lignes et m colonnes

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

est la matrice à n lignes et m colonnes

$$A + B := \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Exemple $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Définition 2.7.2 Le *produit* de la matrice à n lignes et m colonnes

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

par un nombre t est la matrice à n lignes et m colonnes

$$tA := \begin{bmatrix} ta_{11} & ta_{12} & \dots & ta_{1m} \\ ta_{21} & ta_{22} & \dots & ta_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ ta_{n1} & ta_{n2} & \dots & ta_{nm} \end{bmatrix}$$

Exemple $2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

La matrice *nulle* à n lignes et m colonnes est

$$0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

et l'*opposée* d'une matrice A est $-A := (-1)A$.

Proposition 2.7.3 On a toujours

1. $A + B = B + A$,
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$,
3. $A + 0 = 0$,
4. $A + (-A) = 0$,
5. $1A = A$,
6. $t(A + B) = tA + tB$,
7. $(t + s)A = tA + sA$,

8. $(ts)A = t(sA)$.

Démonstration. On peut voir une matrice à n lignes et m colonnes comme un vecteur à nm composantes et appliquer la proposition 2.1.5. ∎

Remarques 1. Cela signifie que les matrices à n lignes et m colonnes forment un *espace vectoriel*.
2. On a "$tA = tB \Leftrightarrow A = B$ ou $t = 0$" et "$tA = sA \Leftrightarrow t = s$ ou $A = 0$".

Définition 2.7.4 Le *produit* des matrices

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\ell} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\ell} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{m\ell} \end{bmatrix}$$

à respectivement n lignes et m colonnes et m lignes et ℓ colonnes est la matrice

$$C := \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1\ell} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2\ell} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{n\ell} \end{bmatrix}$$

à n lignes ℓ colonnes avec

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}.$$

Exemples 1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \times (-1) + 2 \times 1 + 0 \times 3 = 1.$

et $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = (-1) \times (-1) + 0 \times 1 + 1 \times 3 = 4.$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

et $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$

Remarques 1. On a bien comme espéré

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m \end{bmatrix}.$$

2. Si
$$A = \left[\begin{array}{cccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_m \end{array}\right]$$
et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^m$, alors
$$\vec{u}_1 = A\vec{e}_1, \quad \vec{u}_2 = A\vec{e}_2, \quad \dots, \quad \vec{u}_m = A\vec{e}_m.$$
En effet, avec le 1 sur la $i$ème ligne, on trouve bien
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

3. Pour que $A = B$, il suffit que $A\vec{e}_1 = B\vec{e}_1$, $A\vec{e}_2 = B\vec{e}_2$, …, $A\vec{e}_m = B\vec{e}_m$.

La matrice *unité* à n lignes et n colonnes est
$$I := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposition 2.7.5
1. $(AB)C = A(BC) \quad (=: ABC)$,
2. $IA = A$ et $AI = A$,
3. $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$,
4. $(tA)B = A(tB) = t(AB)$.

Démonstration. Il est bien pratique d'utiliser la notation
$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{mj}$$
si bien que la première assertion résulte de
$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj} \right) = \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl} \right) c_{lj}.$$
Les détails sont laissés en exercice ainsi que la démosntration des autres assertions. ∎

Remarque Pour multiplier A par B, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Si on veut *aussi* multiplier B par A, il faut que A et B soient deux matrices carrées de même taille. On a $AB \neq BA$ en général. Cependant, si A est une matrice carrée, on peut généralement trouver B telle que $AB = BA = I$.

Exemples

1. $(AB \neq BA)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. $(AB = BA = I)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Définition 2.7.6 Une matrice carrée A est *inversible* s'il existe une autre matrice carrée A^{-1} alors appelée son *inverse* telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Exemples

1. La matrice $A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.
2. La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas inversible.

Lemme 2.7.7 Si A est une matrice inversible, alors son inverse est unique.

Démonstration. Supposons qu'il existe une autre matrice B telle que $AB = BA = I$. On aura alors $B = BI = BAA^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$. ∎

Proposition 2.7.8

1. Si A est inversible, alors A^{-1} aussi et son inverse est A.
2. Si A et B sont inversibles, alors AB aussi et son inverse est $B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration. La première assertion est triviale puisque la condition est symétrique entre A et A^{-1}. Pour la seconde, il suffit de calculer

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}(AB)) = B^{-1}((A^{-1}A)B) = B^{-1}(IB) = B^{-1}B = I$$

et pareil dans l'autre sens. ∎

Proposition 2.7.9 Si A est inversible, alors le système $A\vec{x} = \vec{b}$ a pour unique solution $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Démonstration. En effet,

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow (A^{-1}A)\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow I\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

et pareil dans l'autres sens. ∎

Exemple Résoudre $S : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$?

Le système S s'écrit

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et on sait que $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. On en déduit donc que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Proposition 2.7.10 La matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et alors

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Démonstration. On calcule

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -cb + da \end{bmatrix} = (ad - bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et pareil dans l'autre sens. ∎

Théoreme 2.7.11 Si A est une matrice carrée, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est non-singulière,
2. il existe B telle que $AB = I$,
3. il existe B telle que $BA = I$,
4. A est inversible.

On a alors $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

Démonstration.

- (1) $\Rightarrow$ (2) : Puisque A est non-singulière, il existe des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ tels que

  $$A\vec{v}_1 = \vec{e}_1, A\vec{v}_2 = \vec{e}_2, \ldots, A\vec{v}_n = \vec{e}_n.$$

  Il suffit alors de poser $B := \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$.
- (3) $\Rightarrow$ (1) : Si $A\vec{x} = \vec{0}$, alors $\vec{x} = I\vec{x} = BA\vec{x} = A\vec{0} = \vec{0}$.
- (2) $\Rightarrow$ (4) : En échangeant A et B dans (3) $\Rightarrow$ (1), on voit que B est non-singulière. En appliquant (1) $\Rightarrow$ (2) à B, on voit donc qu'il existe donc C tel que $BC = I$. On a alors $C = IC = ABC = AI = A$. Cela montre que B est inversible et que $B^{-1} = A = C$. En particulier, A est inversible et $A^{-1} = B$.
- (4) $\Rightarrow$ (3) : par définition. ∎

Lemme 2.7.12 Si B la matrice obtenue en faisant une opération élémentaire sur A et E la matrice obtenue en faisant la même opération élémentaire sur I, alors $B = EI$.

Démonstration. On note $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ et $E = [e_{ij}]$. On considère l'opération $L_k \leftarrow L_k + cL_\ell$. On aura donc $b_{ij} = a_{ij}$ pour $i \neq k$ et $b_{kj} = a_{kj} + ca_{lj}$. D'autre part, on aura

$$e_{ij} = \begin{cases} c \text{ si } i = k, j = \ell \\ 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On calcule alors $\sum_m e_{im}a_{mj} = a_{ij}$ si $i \neq k$ et

$$\sum_m e_{km}a_{mj} = a_{kj} + ca_{lj}.$$

On procède de même avec les deux autres opérations. Les détails sont laissé en exercice. ■

Proposition 2.7.13 Une matrice est inversible si et seulement si on peut la transformer en I en opérant sur ses lignes. On obtient alors A^{-1} en faisant ses mêmes opérations sur les lignes de I.

Démonstration. Supposons que A est inversible. On peut déjà l'échelonner. Puisqu'elle est inversible, elle est non est non-singulière, et sera donc de la forme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

On effectue alors (dans l'ordre) les opérations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \leftarrow & L_1 - \frac{a_{1n}}{a_{nn}} L_n \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - \frac{a_{2n}}{a_{nn}} L_n \\ & \vdots & \\ L_{n-1} & \leftarrow & L_{n-1} - \frac{a_{(n-1)n}}{a_{nn}} L_n \\ L_n & \leftarrow & \frac{1}{a_{nn}} L_n \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & a_{22} & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On recommence jusqu'à obtenir I (formellement, on fait une récurrence sur n).

Supposons maintenant que $I = E_r \dots E_2E_1A$ ou E_i est la matrice obtenue en faisant la $i$ème opération élémentaire sur les lignes de I. On considère alors la matrice $B = E_r \dots E_2E_1I$ obtenue en faisant les mêmes opérations dans le même ordre sur I. On a

$$BA = E_r \dots E_2E_1IA = E_r \dots E_2E_1A = I.$$

Cela montre que A est inversible et que $A^{-1} = B$. ■

Exemple En pratique on fait directement la transformation

$$\left[\begin{array}{cc} A & I \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc} I & A^{-1} \end{array}\right].$$

1. Retrouver par cette méthode que l'inverse de $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Déterminer l'inverse de $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow -L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.8 Exercices (6 janvier 2026)

Exercice 2.1 Déterminer une représentation paramétrique du plan d'équation $2x - 3y + 4z = 6$. Donner un point du plan ainsi que deux vecteurs directeurs. Même question avec le plan d'équation $2x - 3y + 4z = 0$.

Exercice 2.2 Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dirigé par $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. Donner une représentation paramétrique du plan. Est ce que $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$?
2. Déterminer une équation cartésienne du plan. Est ce que $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$?

Exercice 2.3 Déterminer l'intersection des plans d'équations

1. $x + 2y - 3z = 0$ et $2x - y + 4z = 0$,
2. $x - y + 3z = 1$, $2x + y - z = 3$ et $x - 4y + 10z = 1$,
3. $2x - 2y - z = 2$, $x + 2y + z = 1$ et $x + 8y + 4z = 1$.

Exercice 2.4 Résoudre le système $\begin{cases} x - 4y - z + w = a \\ 2x - 8y + z - 4w = b \\ -x + 4y - 2z + 5w = c \end{cases}$ lorsque $a = 3$, $b = 9$ et $c = -6$. Résoudre le système homogène associé. En général, à quelle condition sur a, b, c, le système a-t-il une solution ?

Exercice 2.5 Déterminer le nombre de solutions du système linéaire

1. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + 2y = 12 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 4y - 4z = -11 \end{cases}$.

Exercice 2.6 À quelle condition le système suivant a-t-il une solution ?

1. $\begin{cases} x + 3y = a \\ 3x - y = b \\ 2x + 2y = c \\ x - 4y = d \end{cases}$,
2. $\begin{cases} x + y - z = a \\ x + y = b \\ -x + y + 2z = c \end{cases}$.

Exercice 2.7 Déterminer un système d'équations linéaires pour le plan passant par P et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

1. $P : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{u} : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v} : \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,
2. $P : \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{u} : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} : \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Exercice 2.8 Résoudre le système

1. $\begin{cases} x+2y+2w=0 \\ 2x+4y+z+2w=2 \\ 3x+5y-z+6w=-1 \\ 2x-7z+10w=-10 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} 2x+4y+z+2w=4 \\ 3x+6y+z+w=0 \\ x+3y+z+w=1 \\ x+2y+z+2w=4 \end{cases}$,

3. $\begin{cases} x+2y+2w=6 \\ 3x+5y-z+6w=17 \\ 2x+4y+z+2w=12 \\ 2x-7z+10w=7 \end{cases}$. 4. $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+(a+4)y+(a+2)z=4 \\ -x+(a-2)y+z=a-1 \end{cases}$.

Exercice 2.9 Montrer que $\mathcal{B} := \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer les composantes de $\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Exercice 2.10 Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer les composantes de $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ dans $\mathcal{B}$:

1. $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \right)$, 2. $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$.

Exercice 2.11 Déterminer une base ainsi que la dimension de E :

1. $E := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+4z=0 \end{cases} \right\}$,
2. $E := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x-3y=0 \right\}$,
3. $E := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \begin{cases} x+y+2z+w=0 \\ x+y-z-w=0 \end{cases} \right\}$.

Exercice 2.12 Déterminer une base ainsi que la dimension de l'intersection des sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{R}^4$:

1. $E := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{cases} x+4y+z-2w=0 \\ -x-4y+z-4w=0 \end{cases} \right\}$ et

$$F := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \left\{ \begin{array}{c} z - 3w = 0 \\ x + 4y + w = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

2. $E := \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ et $F := \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$.

Exercice 2.13 Déterminer une base de l'image de A, le rang de A, la dimension du noyau de A ainsi qu'un système d'équations pour $\operatorname{im}(A)$:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,
2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Exercice 2.14 Construire si possible une matrice dont l'image contient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ et dont le noyau contient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$:

1. $\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{u}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,
2. $\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{u}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 2.15 Soient

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Déterminer si possible $2A$, $A - B$ et $A + C$.

Exercice 2.16 Calculer

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$,
2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$,
3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Exercice 2.17 Calculer lorsque c'est possible AB, AC, CA,A^2, C^2 avec

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C := \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2.18 Montrer que $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ est inversible et que $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, puis résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y-2z=2 \\ x+2y-z=4 \\ 2x+3y-2z=7 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y-2z=-1 \\ x+2y-z=2 \\ 2x+3y-2z=3 \end{cases}.$$

Exercice 2.19 Calculer la matrice inverse lorsque c'est possible

1. $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$,
2. $\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 6 & -12 \end{bmatrix}$,
3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$,
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Exercice 2.20

1. Montrer que $A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}.
2. Résoudre le système $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x+2y-z=1 \\ 2x+3y-2z=1 \end{cases}$
3. Montrer que $\mathcal{B} := \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer les composantes de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Exercice 2.21

1. Trouver deux matrices 2×2 telles que
$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$
2. Montrer que si A et B deux matrices carrées de taille n, alors
$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA.$$
3. Montrer que deux matrices carrées A et B d'ordre n sont inversibles si et seulement si AB est inversible.
4. Soit A une matrice carrée telle que $A^2 - 3A + 2I = 0$. Montrer que A est inversible.

3. Algèbre linéaire (partie 2)

Dans ce chapitre, nous utiliserons l'expression « espace vectoriel » dans le sens « sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ pour un certain n ». Cependant, toutes les définitions font sens pour des espaces vectoriels abstraits et tous les résultats restent alors valides.

3.1 Applications linéaires

Définition 3.1.1 Une *application*

$$f : E \to F, \quad \vec{u} \mapsto f(\vec{u})$$

entre deux espaces vectoriels est linéaire si

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad \text{et} \quad f(t\vec{u}) = tf(\vec{u}).$$

Exemples

1. Si A est une matrice à n lignes et m colonnes, alors l'application

   $$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \vec{u} \mapsto A\vec{u}$$

   est linéaire. Plus généralement, si E est un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ tels que $\vec{u} \in E \Rightarrow A\vec{u} \in F$, alors l'application

   $$f : E \to F, \quad \vec{u} \mapsto A\vec{u}$$

   est linéaire.
2. (a) L'*homothétie* h_λ de rapport $\lambda \neq 0$ dans un espace vectoriel E est l'application linéaire

   $$f : E \to E, \quad \vec{u} \mapsto \lambda\vec{u}.$$

(b) En particulier, l'homothétie de rapport λ dans $\mathbb{R}^n$ est l'application linéaire

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \vec{u} \mapsto A\vec{u}$$

avec

$$A = \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

(c) L'homothétie de rapport 1 dans un espace vectoriel E est l'*identité*

$$\mathrm{Id}_E : E \to E, \vec{u} \to \vec{u}.$$

Dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, ça correspond au cas $A = I$.

3. Avec $E = F = \mathbb{R}^2$, on peut considérer
   (a) La rotation r_θ d'angle θ centrée à l'origine (faire un dessin),
   (b) La réflexion s_Δ par rapport une droite Δ passant par 0 (faire un dessin),
   (c) La projection orthogonale p_Δ sur une droite Δ passant par 0 (faire un dessin).

Proposition 3.1.2 Si E et F sont deux espaces vectoriels, alors une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si on a toujours

$$f(t\vec{u} + s\vec{v}) = tf(\vec{u}) + sf(\vec{v}).$$

Démonstration. Si f est linéaire, alors

$$f(t\vec{u} + s\vec{v}) = f(t\vec{u}) + f(s\vec{v}) = tf(\vec{u}) + sf(\vec{v}).$$

Réciproquement, en prenant $t = s = 1$, on aura $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ et en prenant $s = 0$ et/ou $\vec{v} = 0$, on aura $f(t\vec{u}) = tf(\vec{u})$. ■

Remarque Alternativement, une application est linéaire si et seulement si elle préserve les combinaisons linéaires :

$$f(t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \ldots + t_r\vec{u}_r) = t_1 f(\vec{u}_1) + t_2 f(\vec{u}_2) + \ldots + t_r f(\vec{u}_r).$$

Proposition 3.1.3 Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $f(\vec{0}) = \vec{0}$ et $f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$.

Démonstration. On a

$$f(\vec{0}) = f(0 \times \vec{0}) = 0 \times f(\vec{0}) = \vec{0}$$

et

$$f(-\vec{u}) + f((-1) \times \vec{u}) = (-1) \times f(\vec{u}) = -f(\vec{u}).$$ ■

Définition 3.1.4 Le *noyau* d'une application linéaire $f : E \to F$ est

$$\ker(f) = \{\vec{u} \ / \ f(\vec{u}) = \vec{0}\} \subset E$$

et son *image* est

$$\operatorname{im}(f) = \{f(\vec{u})\} \subset F.$$

Remarque En d'autres termes, $\vec{u} \in \ker f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = 0$ et $\vec{v} \in \operatorname{im}(f) \Leftrightarrow \exists \vec{u} \in E, f(\vec{u}) = \vec{v}$.

Exemples

1. Avec
$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \vec{u} \mapsto A\vec{u},$$
on a $\ker(f) = \ker(A)$ et $\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(A)$.
2. Homothétie : $\ker(h_\lambda) = \{\vec{0}\}$ et $\operatorname{im}(h_\lambda) = E$.
3. Rotation : $\ker(r_\theta) = \{\vec{0}\}$ et $\operatorname{im}(r_\theta) = \mathbb{R}^2$.
4. Reflection : $\ker(s_\Delta) = \{\vec{0}\}$ et $\operatorname{im}(s_\Delta) = \mathbb{R}^2$.
5. Projection : $\ker(p_\Delta) = \Delta^\perp$ est la droite perpendiculaire à Δ à l'origine et $\operatorname{im}(p_\Delta) = \Delta$.

Proposition 3.1.5 Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\operatorname{im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. On sait déjà que $f(\vec{0}) = \vec{0}$, ce qui montre que $\ker(f) \neq \emptyset$ et $\operatorname{im}(f) \neq \emptyset$. Ensuite, puisque f est linéaire, si $f(\vec{u}) = \vec{0}$ et $f(\vec{v}) = \vec{0}$, alors

$$f(t\vec{u} + s\vec{v}) = tf(\vec{u}) + sf(\vec{v}) = t \times \vec{0} + s \times \vec{0} = \vec{0}.$$

Cela montre que $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel. De même, puisque f est linéaire, on a toujours

$$tf(\vec{u}) + sf(\vec{v}) = f(t\vec{u} + s\vec{v}),$$

ce qui montre que $\operatorname{im}(f)$ est aussi un sous-espace vectoriel. ■

Définition 3.1.6 Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors de rang de f est $\operatorname{rang}(f) := \dim(\operatorname{im}(f))$.

Exemples

1. Avec
$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \vec{u} \mapsto A\vec{u},$$
on a $\operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}(A)$.
2. Homothétie : $\operatorname{rang}(h_\lambda) = \dim E$.
3. Rotation : $\operatorname{rang}(r_\theta) = 2$.
4. Reflection : $\operatorname{rang}(s_\Delta) = 2$.
5. Projection : $\operatorname{rang}(p_\Delta) = 1$.

Théoreme 3.1.7 — du rang. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $\dim(\ker(f)) + \operatorname{rang}(f) = \dim(E)$.

Démonstration. On se donne une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$ de $\ker f$. On la prolonge en une base

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}, \vec{u}_{k+2}, \ldots, \vec{u}_{k+r})$$

de E. On pose $v_1 := f(u_{k+1})$, $v_2 := f(u_{k+2})$, …, $v_r := f(\vec{u}_{k+r})$. Tout $\vec{u} \in E$ s'écrit de manière unique

$$\vec{u} = t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \ldots + t_{k+r}\vec{u}_{k+r}.$$

On en déduit que $f(\vec{u})$ s'écrit de manière unique

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) &= f(t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \ldots + t_{k+r}\vec{u}_{k+r}) \\ &= t_1 f(\vec{u}_1) + t_2 f(\vec{u}_2) + \ldots + t_{k+r} f(\vec{u}_{k+r}) \\ &= t_1\vec{0} + t_2\vec{0} + \ldots t_k\vec{0} + t_{k+1}\vec{v}_1 + t_{k+2}\vec{v}_2 + \ldots + t_{k+r}\vec{v}_r \\ &= s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + \ldots + s_r\vec{v}_r \end{aligned}$$

avec $s_1 := t_{k+1}, s_2 := t_{k+2}, \ldots, s_r := t_{k+r}$. Cela montre que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r)$ est une base de $\operatorname{im}(f)$. ■

Rappel 3.1.8

1. Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont deux applications, alors leur *composée* est l'application

$$g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

2. Si $h : Z \to W$ est une autre application, alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
3. Si $f : X \to Y$ est une application, alors $f \circ \mathrm{Id}_X = f$ et $\mathrm{Id}_Y \circ f = f$.

Proposition 3.1.9 Si $f : E \to F$ et $g : E \to G$ sont deux applications linéaires, alors $g \circ f$ est aussi une application linéaire.

Démonstration. On a $(g\circ f)(t\vec{u}+s\vec{v}) = g(f(t\vec{u}+t\vec{v})) = g(tf(\vec{u})+sf(\vec{v})) = tg(f(\vec{u}))+sg(f(\vec{v})) = t(g \circ f)(\vec{u}) + s(g \circ f)(\vec{v})$. ■

Exemples

1. Avec $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \vec{u} \mapsto A\vec{u}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, \vec{v} \mapsto B\vec{v}$, on a

$$g \circ f : \mathbb{R}^m \to R^p, \quad \vec{u} \mapsto BA\vec{u}.$$

2. Homothéties : $h_\mu \circ h_\lambda = h_{\lambda\mu}$ (faire un dessin).
3. Rotations : $r_\varphi \circ r_\theta = r_{\theta+\varphi}$ (faire un dessin).
4. Réflexions : $s'_\Delta \circ s_\Delta = r_{2\theta}$ ou θ est l'angle entre Δ et Δ' et en particulier, $s_\Delta \circ s_\Delta = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ (faire un dessin).
5. Projections : $p_\Delta \circ p_\Delta = p_\Delta$ (faire un dessin).

Rappel 3.1.10
1. Une application $f : X \to Y$ est bijective si et seulement si il existe une application $f^{-1} : Y \to X$ telle que $f^{-1}(y) := x \Leftrightarrow y = f(x)$.
2. Si $f : X \to Y$ est bijective, alors f^{-1} aussi et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Proposition 3.1.11 Si f est une application linéaire bijective, alors f^{-1} est aussi linéaire.

Démonstration. Puisque f est linéaire, on a

$$f(tf^{-1}(\vec{u}) + sf^{-1}(\vec{v})) = tf(f^{-1}(\vec{u})) + sf(f^{-1}(\vec{v})) = t\vec{u} + s\vec{v}.$$

On en déduit que $f^{-1}(t\vec{u} + s\vec{v}) = tf^{-1}(\vec{u}) + sf^{-1}(\vec{v})$. ■

Exemples
1. L'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \vec{u} \mapsto A\vec{u}$ est bijective si et seulement si A est inversible et on a alors
$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \vec{u} \mapsto A^{-1}\vec{u}.$$
2. Homothéties : $(h_\lambda)^{-1} = h_{1/\lambda}$ (faire un dessin).
3. Rotations : $(r_\theta)^{-1} = r_{-\theta}$ (faire un dessin).
4. Réflexion : $(s_\Delta)^{-1} = s_\Delta$ (faire un dessin).
5. Projection : p_Δ n'est pas bijective (faire un dessin).

Proposition 3.1.12 Pour une application linéaire $f : E \to E$, les conditions suivantes sont équivalentes :
1. f est bijective,
2. $\ker(f) = \{\vec{0}\}$,
3. $\mathrm{im}(f) = E$.

Démonstration. Il résulte du théorème du rang que les deux dernières assertions sont équivalentes. Supposons celles-ci satisfaites. Il résulte alors de la troisième que si $\vec{v} \in E$, il existe $\vec{u} \in E$ tel que $f(\vec{u}) = \vec{v}$. Si on a aussi $f(\vec{u}') = \vec{v}$, alors $f(\vec{u} - \vec{u}') = f(\vec{u}) - f(\vec{u}') = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$. On aura donc $\vec{u} - \vec{u}' = \vec{0}$ et donc $\vec{u}' = \vec{u}$, ce qui donne l'unicité. ■

3.2 Matrice d'une application linéaire

Proposition 3.2.1 Si $\mathcal{B} := (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_d)$ est une base de E et $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_d \in F$, alors il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que

$$f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1, \quad f(\vec{u}_2) = \vec{v}_2, \quad \ldots \quad , \quad f(\vec{u}_d) = \vec{v}_d.$$

Démonstration. Nécessairement, si $\vec{u} = t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \ldots + t_d\vec{u}_d$, alors

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) &= f(t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \ldots + t_d\vec{u}_d) \\ &= t_1 f(\vec{u}_1) + t_2 f(\vec{u}_2) + \ldots + t_d f(\vec{u}_d) \\ &= t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \ldots + t_d\vec{v}_r. \end{aligned}$$

On vérifie alors aisément mais laborieusement qu'un tel f est bien linéaire. ■

Exemples 1. Soit $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et

$$A := \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_m \end{bmatrix}.$$

Alors, l'application $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est l'unique application linéaire telle que

$$f(\vec{e}_1) = \vec{u}_1, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{u}_2, \quad \ldots \quad , \quad f(\vec{e}_m) = \vec{u}_m.$$

2. Soit $\mathcal{B} := (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_d)$ une base de E. Alors, l'homothétie $h_\lambda : E \to E$ est l'unique application linéaire telle que

$$h_\lambda(\vec{u}_1) = \lambda\vec{u}_1, \quad h_\lambda(\vec{u}_2) = \lambda\vec{u}_2, \quad \ldots \quad , \quad h_\lambda(\vec{u}_d) = \lambda\vec{u}_d$$

3. Soit $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors, la rotation $r_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est l'unique application linéaire telle que (faire un dessin)

$$r_\theta(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad r_\theta(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

4. Soit $\vec{0} \neq \vec{u} \in \Delta$ et $\vec{0} \neq \vec{v} \in \Delta^\perp$ et $\mathcal{B} := (\vec{u}, \vec{v})$. Alors, la réflexion $s_\Delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est l'unique application linéaire telle que $s_\Delta(\vec{u}) = \vec{u}$ et $s_\Delta(\vec{v}) = -\vec{v}$.
5. Avec les mêmes notations, la projection $p_\Delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est l'unique application linéaire telle que $p_\Delta(\vec{u}) = \vec{u}$ et $p_\Delta(\vec{v}) = \vec{0}$.

Définition 3.2.2 Soit $f : E \to F$ une application linéaire, $\mathcal{B} := (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m)$ une base de E et $\mathcal{C} := (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ une base de F. Alors, la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est l'unique matrice

$$[f]_\mathcal{B}^\mathcal{C} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

telle que

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_1) &= a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{v}_n, \\ f(\vec{u}_2) &= a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{v}_n, \\ &\vdots \\ f(\vec{u}_1) &= a_{1m}\vec{v}_1 + a_{2m}\vec{v}_2 + \ldots + a_{nm}\vec{v}_n. \end{aligned}$$

Remarques 1. Sous forme compacte, on a

$$[f]_\mathcal{B}^\mathcal{C} = \begin{bmatrix} [f(\vec{u}_1)]_\mathcal{C} & [f(\vec{u}_2)]_\mathcal{C} & \ldots & [f(\vec{u}_m)]_\mathcal{C}) \end{bmatrix}.$$

2. Lorsque $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on écrira simplement $[f]_\mathcal{B}$.

Exemples 1. Avec $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ et $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ les bases *canoniques*, on a $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A$.

2. Dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel E, on a

$$[h_\lambda]_{\mathcal{B}} = \lambda I.$$

En particulier, $[\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{B}} = I$.

3. Dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, on a

$$[r_\theta]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

4. Si $\vec{0} \neq \vec{u} \in \Delta$ et $\vec{0} \neq \vec{v} \in \Delta^\perp$ et $\mathcal{B} := (\vec{u}, \vec{v})$, alors

$$[s_\Delta]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Avec les mêmes notations,

$$[p_\Delta]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposition 3.2.3 Soit $f : E \to F$ une application linéaire, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Si $\vec{x} \in E$, alors

$$[f(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[\vec{x}]_{\mathcal{B}}.$$

Démonstration. On reprends les notations de la définition on on rappelle que

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

signifie que

$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots + x_m\vec{u}_m.$$

On aura donc

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{u}_1) + x_2 f(\vec{u}_2) + \ldots + x_m f(\vec{u}_m),$$

puis

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= x_1 f(\vec{u}_1) + x_2 f(\vec{u}_2) + \ldots + x_m f(\vec{u}_m) \\ &= x_1(a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{v}_n) \\ &+ x_2(a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{v}_n) \\ &+ \ldots \\ &+ x_m(a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \ldots + a_{nm}\vec{v}_n). \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m)\vec{v}_1 \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m)\vec{v}_2 \\ &+ \ldots \\ &+ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m)\vec{v}_n. \end{aligned}$$

■

Exemples 1. Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est de la forme $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ où A est une matrice à n lignes et m colonnes.

2. Dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E, on retrouve bien sûr

$$[h_\lambda(\vec{x})]_\mathcal{B} = [h_\lambda]_\mathcal{B}[\vec{x}]_\mathcal{B} = \lambda I[\vec{x}]_\mathcal{B} = \lambda[\vec{x}]_\mathcal{B} = [\lambda\vec{x}]_\mathcal{B}.$$

3. $r_\theta\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos(\theta) - b\sin(\theta) \\ a\sin(\theta) + b\cos(\theta) \end{bmatrix}.$

4. Soit $\vec{0} \neq \vec{u} \in \Delta^\perp$, $\vec{0} \neq \vec{v} \in \Delta$ et $\mathcal{B} := (\vec{u}, \vec{v})$. Si $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, alors

$$[s_\Delta(\vec{w})]_\mathcal{B} = [s_\Delta]_\mathcal{B}[\vec{w})]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}.$$

5. De même,

$$[p_\Delta(\vec{w})]_\mathcal{B} = [p_\Delta]_\mathcal{B}[\vec{w})]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Proposition 3.2.4 Soientt $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications linéaires et $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des bases respectives de E, F et G. Alors

$$[g \circ f]^\mathcal{D}_\mathcal{B} = [g]^\mathcal{D}_\mathcal{C}[f]^\mathcal{C}_\mathcal{B}.$$

Démonstration. Si $\mathcal{B} =: (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m)$, alors, pour $i = 1, \ldots, m$,

$$[g \circ f]^\mathcal{D}_\mathcal{B}[\vec{u}_i]_\mathcal{B} = [(g \circ f)(\vec{u}_i)]_\mathcal{D} = [(g(f(\vec{u}_i))]_\mathcal{D} = [g]^\mathcal{D}_\mathcal{C}[f(\vec{u}_i)]_\mathcal{C} = [g]^\mathcal{D}_\mathcal{C}[f]^\mathcal{C}_\mathcal{B}[\vec{u}_i]_\mathcal{B}.$$

L'assertion résulte alors formellement du fait que $[\vec{u}_i]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ième place.} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$ ∎

Exemples 1. Avec $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, \vec{y} \mapsto B\vec{y}$, on trouve

$$g \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p, \vec{x} \mapsto (BA)\vec{x}.$$

2. On sait que $r_{\theta+\varphi} = r_\theta \circ r_\varphi$ et donc $[r_{\theta+\varphi}]_\mathcal{B} = [r_\theta]_\mathcal{B}[r_\varphi]_\mathcal{B}$. On a d'une part

$$[r_{\theta+\varphi}]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{bmatrix}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} [r_\theta]_\mathcal{B}[r_\varphi]_\mathcal{B} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) & -\cos(\theta)\sin(\varphi) - \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi) & -\sin(\theta)\sin(\varphi) + \cos(\theta)\cos(\varphi) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi

$$\begin{cases} \cos(\theta+\varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi), \\ \sin(\theta+\varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi). \end{cases}$$

Proposition 3.2.5 Soit $f : E \to F$ une application linéaire bijective, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. Alors, $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est bijective et

$$\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} = [f^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}.$$

Démonstration. On a

$$[f^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [f^{-1} \circ f]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{B}} = I$$

et

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[f^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = [f \circ f^{-1}]_{\mathcal{C}} = [\mathrm{Id}_F]_{\mathcal{C}} = I.$$

■

Exemple Puisque $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$, on a

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Définition 3.2.6 Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors la *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P := [\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}.$$

Remarques
1. En pratique, on dit que $\mathcal{B}$ est l'*ancienne* base et que $\mathcal{B}'$ est la *nouvelle*.
2. La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ sera alors P^{-1} (exercice).
3. Si $\mathcal{B}$ est la base *canonique* de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}' =: (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est une autre base de $\mathbb{R}^n$, alors

$$P = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_n \end{bmatrix}.$$

Exemple On considère le cas $E = \mathbb{R}^2$ et les bases

$$\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' := (\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Alors, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Proposition 3.2.7 Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et qu'on pose $X := [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ et $X' := [\vec{x}]_{\mathcal{B}'}$, alors

$$X' = P^{-1}X \quad \text{et} \quad X = PX'.$$

Démonstration. En effet, $[\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}_E(\vec{x})]_{\mathcal{B}'} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}'}$. ■

Théoreme 3.2.8 Soit $f : E \to E$ une application linéaire et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et qu'on pose $A := [f]_{\mathcal{B}}$ et $A' := [f]_{\mathcal{B}'}$, alors

$$A' = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = PA'P^{-1}.$$

Démonstration. En effet, $[\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[f]_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}'}$. ■

Remarque On dit alors que les matrices A et A' sont *semblables*.

Exemple Quelle est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de la symétrie s par rapport à la droite Δ d'équation $x - 2y = 0$ (faire un dessin) ?

On voit immédiatement que $\vec{u} := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \Delta$ et que $\vec{v} := \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \Delta^{\perp}$. On connait la matrice A' de s dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$, la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on calcule P^{-1} :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

On en déduit la matrice A de la symétrie dans la base canonique :

$$\begin{aligned} A &= PA'P^{-1} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En particulier, on voit que $s\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$ et que $s\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}$.

3.3 Déterminants

Définition 3.3.1 Le *déterminant* de la matrice carrée

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

est le nombre [a]

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

où $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des *permutations* σ de l'ensemble d'indices $\{1, 2, \dots, n\}$

et $\epsilon(\sigma)$ la *signature* de σ qui vaut 1 si le *nombre d'inversions* est pair et -1 sinon.

a. On ne peut vraiment pas se passer de somme formelle ici.

On écrira aussi[1]

$$\det(A) =: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ainsi que[2]

$$\det(A) =: \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$$

si $A = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_n \end{bmatrix}$.

Exemples

1. Pour les matrices de taille deux, on fait le *produit en croix* :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

2. Pour les matrices de taille trois, on peut appliquer la *règle de Sarrus* :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Ça ne marche *pas* en dimension supérieure !

3. Pour les matrices triangulaires, on fait le *produit diagonal* :

$$\begin{vmatrix} c_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & c_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_n \end{vmatrix} = c_1 c_2 \dots c_n.$$

4. En général, il existe une méthode récursive de *développement le long d'une colonne ou d'une ligne*. Par exemple, si on désigne par A_i la matrice obtenue en enlevant la première colonne et la i-ème ligne, alors

$$\det(A) = a_{11}\det(A_1) - a_{21}\det(A_2) + \dots + (-1)^{n-1}a_{n1}\det(A_n).$$

On aura

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{4} & 5 & 6 \\ \mathbf{7} & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= (45 - 48) - 4(18 - 24) + 7(12 - 15)$$
$$= -3 + 24 - 21$$
$$= 0.$$

1. Ne pas confondre avec une valeur absolue.
2. On rencontre plus généralement $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_d) = \det([\vec{u}_1]_{\mathcal{B}}, [\vec{u}_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [\vec{u}_d]_{\mathcal{B}})$ lorsque $\mathcal{B}$ est une base d'un espace E de dimension d.

Remarque Si on désigne par $\mathcal{P}$ le parallélépipède de base $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$, alors

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{P}) = |\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)|$$

(et le signe donne l'orientation).
On peut faire le calcul pour $n = 2$ en supposant tous les points bien placés pour éviter les valeurs absolues. Il s'agit de montrer (faire un dessin) que l'aire $\mathcal{A}$ d'un parallélogramme (O, M, P, N) est

$$\mathcal{A} = \det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right).$$

En posant $M = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, il s'agit donc de montrer que $\mathcal{A} = ad - bc$. On sait (et on peut facilement vérifier) que $\mathcal{A}$ est le produit de la base a par la hauteur h qu'il faut calculer. On considère pour cela la droite D dirigée par $\overrightarrow{OM}$ passant par N puis l'intersection $M' =: \begin{bmatrix} a \\ b' \end{bmatrix}$ de D avec la droite verticale passant par M. On aura alors $h = b' - b$. Puisque

$$M \in D = \left\{ \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\},$$

on aura

$$\begin{cases} a = c + ta \\ b' = d + tb \end{cases}$$

si bien que $h = b' - b = d - b(1 - t)$ et $a - ta = c$. On calcule enfin

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= a \times h \\ &= a \times (d - b(1 - t)) \\ &= ad - b(a - ta) \\ &= ad - bc. \end{aligned}$$

Définition 3.3.2 La *transposée* d'une matrice A à n lignes et m colonne est la matrice ${}^tA$ à m lignes et n colonnes définie par

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad {}^tA := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemples 1. ${}^t\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ et réciproquement.

2. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

3. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Proposition 3.3.3 Si A est une matrice carrée, alors $\det({}^tA) = \det(A)$.

Démonstration. Si on désigne par σ^{-1} la permutation inverse de σ (qui a même signature), on aura

$$\begin{aligned}
\det({}^tA) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \\
&= \det(A).
\end{aligned}$$

■

Exemple $\begin{vmatrix} c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * & c_n \end{vmatrix} = c_1 c_2 \dots c_n.$

Proposition 3.3.4 On a toujours :

1. $\det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, t\vec{u}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n) = t \det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n)$,

2. $\det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n) = \det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n)$
$+ \det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{v}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n)$,

3. $\det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_{j-1}, \vec{u}, \vec{u}_{j+1}, \dots, \vec{u}_n) = 0$.

Démonstration. On pose (attention, on utilise la notation transposée)

$$\vec{u}_1 =: \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, \vec{u}_2 =: \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}, \dots, \vec{u}_n =: \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}, \vec{u} =: \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \vec{v} =: \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
&\det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, t\vec{u}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n)\\
=&\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\sigma(i-1)} t a_{\sigma(i)} a_{i+1\sigma(i+1)} \dots a_{n\sigma(n)}\\
=&t\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\sigma(i-1)} a_{\sigma(i)} a_{i+1\sigma(i+1)} \dots a_{n\sigma(n)}\\
=&t\det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n).
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
&\det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n)\\
=&\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\sigma(i-1)} (a_{\sigma(i)} + b_{\sigma(i)}) a_{i+1\sigma(i+1)} \dots a_{n\sigma(n)}\\
=&\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\sigma(i-1)} a_{\sigma(i)} a_{i+1\sigma(i+1)} \dots a_{n\sigma(n)}\\
+&\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\sigma(i-1)} b_{\sigma(i)} a_{i+1\sigma(i+1)} \dots a_{n\sigma(n)}\\
=&\det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n) + \det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{v}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n).
\end{aligned}$$

Pour la dernière assertion, on désigne par $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des permutations paires et par $\mathcal{A}'_n$ l'ensemble des permutations impaires. Si σ est une permutation paire, on note σ' la permutation définie par

$$\begin{cases}
\sigma'(k) = \sigma(k) \text{ si } k \neq i, j\\
\sigma'(i) = \sigma(j)\\
\sigma'(j) = \sigma(i).
\end{cases}$$

On peut alors vérifier que $\mathcal{A}'_n = \{\sigma' : \sigma \in \mathcal{A}_n\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
&\det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_{j-1}, \vec{u}, \vec{u}_{j+1}, \dots, \vec{u}_n)\\
=&\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\sigma(i-1)} a_{\sigma(i)} a_{i+1\sigma(i+1)} \dots a_{j-1\sigma(j-1)} a_{\sigma(j)} a_{j+1\sigma(j+1)} \dots a_{n\sigma(n)}\\
=&\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\sigma(i-1)} a_{\sigma(i)} a_{i+1\sigma(i+1)} \dots a_{j-1\sigma(j-1)} a_{\sigma(j)} a_{j+1\sigma(j+1)} \dots a_{n\sigma(n)}\\
-&\sum_{\sigma'\in\mathcal{A}'_n} a_{1\sigma'(1)} \dots a_{i-1\sigma'(i-1)} a_{\sigma'(i)} a_{i+1\sigma'(i+1)} \dots a_{j-1\sigma'(j-1)} a_{\sigma'(j)} a_{j+1\sigma'(j+1)} \dots a_{n\sigma'(n)}\\
=&\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\sigma(i-1)} a_{\sigma(i)} a_{i+1\sigma(i+1)} \dots a_{j-1\sigma(j-1)} a_{\sigma(j)} a_{j+1\sigma(j+1)} \dots a_{n\sigma(n)}\\
-&\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\sigma(i-1)} a_{\sigma(j)} a_{i+1\sigma(i+1)} \dots a_{j-1\sigma(j-1)} a_{\sigma(i)} a_{j+1\sigma(j+1)} \dots a_{n\sigma(n)}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Remarque On dit que le déterminant est une *forme multilinéaire alternée*. En fait, c'est l'unique forme multilinéaire alternée telle que $\det(I) = n$.

Exemples 1. $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 = 1.$

2. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \times (-1) = -6.$

3. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 0 = 0.$

Proposition 3.3.5 Les opérations élémentaires sur une matrice ont les effets suivants :

1. $L_i \leftarrow L_i + cL_j$ avec $j \neq i$ ne change pas le déterminant,
2. $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$ change le signe du déterminant,
3. $L_i \leftarrow cL_i$ multiplie le déterminant par c.

Démonstration. En considérant la transposées, on peut montrer l'analogue sur les colonnes : on a d'abord

$$\begin{aligned} &\det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_i + c\vec{u}_j, \vec{u}_{i+1}, \ldots, \vec{u}_n) \\ =&\det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_i, \vec{u}_{i+1}, \ldots, \vec{u}_n) \\ +&c\det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_j, \vec{u}_{i+1}, \ldots, \vec{u}_n) \\ =&\det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_i, \vec{u}_{i+1}, \ldots, \vec{u}_n), \end{aligned}$$

puis ensuite

$$\begin{aligned} &\det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_i, \vec{u}_{i+1}, \ldots, \vec{u}_{j-1}, \vec{u}_j, \vec{u}_{j+1}, \ldots, \vec{u}_n) \\ +&\det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_j, \vec{u}_{i+1}, \ldots, \vec{u}_{j-1}, \vec{u}_i, \vec{u}_{j+1}, \ldots, \vec{u}_n) \\ =&\det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_i + \vec{u}_j, \vec{u}_{i+1}, \ldots, \vec{u}_{j-1}, \vec{u}_i + \vec{u}_j, \vec{u}_{j+1}, \ldots, \vec{u}_n) \\ =&0. \end{aligned}$$

et bien sûr

$$\begin{aligned} &\det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}, c\vec{u}_i, \vec{u}_{i+1}, \ldots, \vec{u}_n) \\ =&c\det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_i, \vec{u}_{i+1}, \ldots, \vec{u}_n). \end{aligned}$$

■

Exemples 1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1.$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -12.$

Proposition 3.3.6 Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Démonstration. On peut échelonner A sans changer les conditions. On sait aussi que A est inversible si et seulement si elle est non-singulière. Si A est échelonnée, alors A est non-singulière si et seulement si tous les pivots sont sur la diagonale. C'est équivalent à dire que le déterminant est non nul (faire un dessin). ■

Corollaire 3.3.7 Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$,
2. $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n) \neq 0$. ■

Théoreme 3.3.8 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration. Si A n'est pas inversible, alors AB non plus et on trouve 0 de chaque coté. Sinon, on peut opérer sur les lignes de A et de AB simultanément et finalement supposer que $A = I$ auquel cas l'assertion est triviale. ■

Corollaire 3.3.9 Si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Lemme 3.3.10 Soit $f : E \to E$ une application linéaire et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, Alors,

$$\det([f]_{\mathcal{B}}) = \det([f]_{\mathcal{B}'}).$$

Démonstration. On désigne par

- $A := [f]_{\mathcal{B}}$ la matrice de f dans $\mathcal{B}$,
- $A' := [f]_{\mathcal{B}'}$ la matrice de f dans $\mathcal{B}'$,
- P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

On sait alors que $A' = P^{-1}AP$ et on aura donc

$$\det(A') = \det(P)^{-1}\det(A)\det(P) = \det(A).$$ ■

Définition 3.3.11 Si $f : E \to E$ est une application linéaire, alors le *déterminant* de f est

$$\det(f) := \det([f]_{\mathcal{B}}).$$

où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

Exemples 1. Avec $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \vec{u} \mapsto A\vec{u}$, on a $\det(f) = \det(A)$.
2. Homothétie : $\det(h_\lambda) = \lambda^d$ a vec $d = \dim(E)$.
3. Rotation : $\det(r_\theta) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.
4. Reflection : $\det(s_\Delta) = -1$.
5. Projection : $\det(p_\Delta) = 0$.

Proposition 3.3.12 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire et $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$. Alors,

$$\det(f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \ldots, f(\vec{v}_n)) = \det(f)\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n).$$

Démonstration. En effet, si A est la matrice de f dans la base canonique, alors

$$B := \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \Rightarrow AB := \begin{bmatrix} f(\vec{v}_1) & f(\vec{v}_2) & \ldots & f(\vec{v}_n) \end{bmatrix}$$

et la formule se réduit à $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. ∎

Remarque On peut montrer que si $X \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est linéaire, alors

$$\mathrm{Vol}(f(X)) = |\det(f)|\mathrm{Vol}(X).$$

3.4 Diagonalisation

On dit qu'une matrice est *diagonale* si elle est de la forme

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Définition 3.4.1 Une application linéaire $f : E \to E$ est *diagonalisable* s'il existe une base de E telle que $[f]_{\mathcal{B}}$ est diagonale.

Remarque Si A est une matrice carrée de taille n, on appliquera directement à A le vocabulaire utilisé pour l'application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$. On dira par exemple que A est *diagonalisable* lorsque f est diagonalisable.

Exemples

1. Une homothétie est diagonalisable (et même diagonale dans n'importe quelle base).
2. Une réflexion ou une projection est diagonalisable.
3. Une rotation n'est pas diagonalisable (en général).
4. La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonale mais elle est diagonalisable (c'est la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x$).
5. La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonale mais pas non plus diagonalisable (exercice).

Proposition 3.4.2 Une matrice carrée A est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice diagonale D ainsi qu'une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

Démonstration. Conséquence immédiate du théorème 3.2.8. ■

Exemple L'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 4x - 6y \\ 2x - 3y \end{bmatrix}$$

est diagonalisable. En effet, on peut vérifier que $A = PDP^{-1}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Définition 3.4.3 Soit $f : E \to E$ une application linéaire. Si $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ avec $\vec{u} \neq 0$, on dit que λ est une *valeur propre* de f et que $\vec{u}$ est un *vecteur propre* de f.

Exemple Avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 4x - 6y \\ 2x - 3y \end{bmatrix}$, on a

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On a donc la valeur propre $\lambda = 1$ avec le vecteur propre $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et la valeur propre $\lambda = 0$ avec le vecteur propre $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Proposition 3.4.4 Une application linéaire est diagonalisable si et seulement si il existe une base formée de vecteurs propres.

Démonstration. En effet, la condition dit qu'il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ telle que

$$\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} [f(\vec{u}_1)]_{\mathcal{B}} & [f(\vec{u}_2)]_{\mathcal{B}} & \ldots & [f(\vec{u}_n)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [\lambda_1 \vec{u}_1]_{\mathcal{B}} & [\lambda_2 \vec{u}_2]_{\mathcal{B}} & \ldots & [\lambda_n \vec{u}_n]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 \vec{e}_1 & \lambda_2 \vec{e}_2 & \ldots & \lambda_n \vec{e}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

■

Remarque Avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$, si $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de vecteur propres et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes, alors $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_n \end{bmatrix}.$$

Proposition 3.4.5 Si $\dim(E) = n$ et $f : E \to E$ est une application linéaire avec n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

Démonstration. On désigne par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres et par $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs propres associés. On va montrer par récurrence que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$ est une base de $E_k := \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$ pour $k = 1, 2, \dots, n$. On aura alors $E_n \subset E$ avec $\dim(E_n) = n = \dim(E)$ et donc $E_n = E$, ce qui montre que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de E. Clairement, le vecteur non nul $\vec{u}_1$ est bien une base de la droite $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1)$. On suppose maintenant que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$ est une base de E_k et on procède par l'absurde. Si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1})$ n'est pas une base de E_{k+1}, il existe alors un vecteur qui s'écrit de deux manières différentes

$$t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \dots + t_k\vec{u}_k + t_{k+1}\vec{u}_{k+1} = s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2 + \dots + s_k\vec{u}_k + s_{k+1}\vec{u}_{k+1}$$

et donc

$$(t_1 - s_1)\vec{u}_1 + (t_2 - s_2)\vec{u}_2 + \dots + (t_k - s_k)\vec{u}_k + (t_{k+1} - s_{k+1})\vec{u}_{k+1} = \vec{0}.$$

On remarque alors que $t_{k+1} \neq s_{k+1}$ car sinon on pourrait écrire $\vec{0}$ de deux manières différentes dans E_k. On en déduit que

$$\begin{aligned} \vec{u}_{k+1} &= -\frac{t_1 - s_1}{t_{k+1} - s_{k+1}}\vec{u}_1 - \frac{t_2 - s_2}{t_{k+1} - s_{k+1}}\vec{u}_2 - \dots - \frac{t_k - s_k}{t_{k+1} - s_{k+1}}\vec{u}_k \\ &= c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k \end{aligned}$$

pour certaines constantes $c_1, c_2, \dots, c_k$. On a d'une part

$$f(\vec{u}_{k+1}) = \lambda_{k+1}u_{k+1} = \lambda_{k+1}c_1\vec{u}_1 + \lambda_{k+1}c_2\vec{u}_2 + \dots + \lambda_{k+1}c_k\vec{u}_k$$

et d'autre part

$$f(\vec{u}_{k+1}) = c_1 f(\vec{u}_1) + c_2 f(\vec{u}_2) + \dots + c_k f(\vec{u}_k) = \lambda_1 c_1\vec{u}_1 + \lambda_2 c_2\vec{u}_2 + \dots + \lambda_k c_k\vec{u}_k.$$

Puisque $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$ est une base de E_k, l'écriture est unique et donc

$$\lambda_{k+1}c_1 = \lambda_1 c_1, \lambda_{k+1}c_2 = \lambda_2 c_2, \dots, \lambda_{k+1}c_k = \lambda_1 c_k.$$

Mais comme les valeurs propres sont distinctes, cela montre que $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ et donc $\vec{u}_{k+1} = 0$. Mais c'est impossible car c'est un vecteur propre. ■

Définition 3.4.6 Le *polynôme caractéristique* d'une application linéaire $f : E \to E$ est [a]

$$\chi(\lambda) := \det(\lambda \mathrm{Id}_E - f).$$

a. On définit parfois $\chi_f(\lambda) := \det(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$, ce qui ne change rien en pratique.

Remarque Le *polynôme caractéristique* d'une matrice carrée A est

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Exemple Avec $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, on a $\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 6 \\ -2 & \lambda + 3 \end{bmatrix}$ et donc

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 6 \\ -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 3) + 12 = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1).$$

Proposition 3.4.7 Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

Démonstration. Par définition, λ est une valeur propre de f si et seulement si il existe un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ tel que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$. Cette égalité se réécrit $(\lambda \mathrm{Id}_E - f)(\vec{u}) = \vec{0}$. La condition signifie donc que $\ker(\lambda \mathrm{Id}_E - f) \neq \{\vec{0}\}$. Cela signifie que l'application $\lambda \mathrm{Id}_E - f$ est bijective et nous savons que c'est équivalent à $\det(\lambda \mathrm{Id}_E - f) = 0$, c'est à dire $\chi_f(\lambda) = 0$. Autrement dit, λ est une racine de χ_f. ■

Exemple Pour

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

on a calculé $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$ et on trouve donc les valeurs propres 1 et 0 si bien que

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour trouver les vecteurs propres, on résout $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$ avec $\lambda = 1$ d'abord et avec $\lambda = 0$ ensuite :

- $(\lambda = 1)$ $\left\{ \begin{array}{l} 4x - 6y = x \\ 2x - 3y = y \end{array} \right. \Leftrightarrow x - 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $(\lambda = 0)$ $\left\{ \begin{array}{l} 4x - 6y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow 2x - 3y = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

On trouve les vecteurs propres $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ si bien que

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.5 Exercices (6 janvier 2026)

Exercice 3.1 Dire dans chaque cas si l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire :

1. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z \\ x+2y \\ x \end{bmatrix}$,
2. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y+2z \\ 2x+3 \end{bmatrix}$,
3. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ y+z \\ xz \end{bmatrix}$.

Exercice 3.2 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Trouver un vecteur $\vec{x}$ tel que $f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Exercice 3.3 Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x-3z \\ -x+3y-6z \end{bmatrix}$ et $\vec{u} := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Calculer $f(\vec{u})$. Trouver une matrice A telle que $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Calculer $A\vec{u}$.

Exercice 3.4 Déterminer la matrice dans la base canonique de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ obtenue en faisant une rotation d'angle $\pi/4$ autour de l'origine suivie d'une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

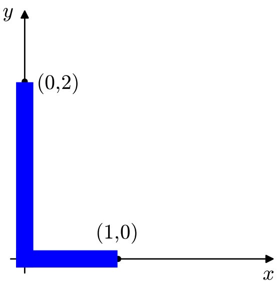
Exercice 3.5 Déterminer la matrice A dans la base canonique de la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'origine. Calculer A^3. Pouvait-on le prévoir ?

Exercice 3.6 On considère les situations suivantes :

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,
2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,
3. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,
4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,
5. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
6. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

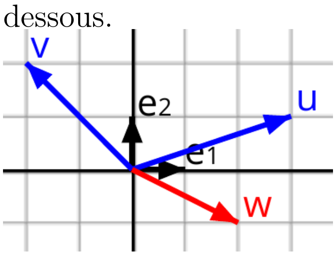
Déterminer dans chaque cas

1. l'effet de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associée à la matrice A sur la lettre L ci-contre et donner une caractérisation géométrique de f,
2. l'effet de f^{-1} sur L lorsque f est inversible ainsi qu'une caractérisation géométrique.

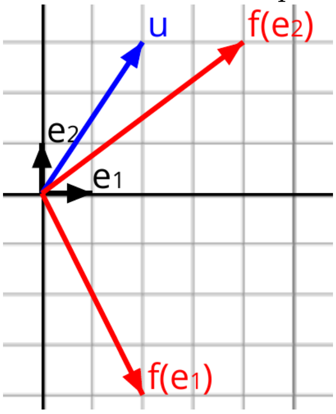


Exercice 3.7 On se donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

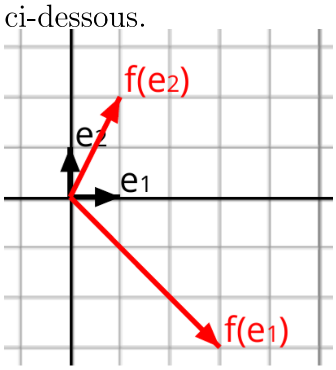
(a) Trouver les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sur la figure ci-dessous.



(b) Déterminer $f(\vec{u})$ sur la figure ci-dessous. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

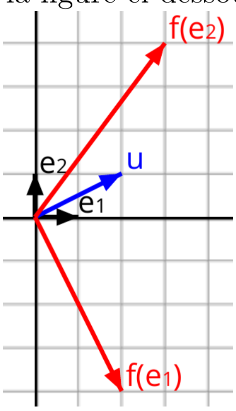


(c) Déterminer la matrice de f dans la base canonique avec la figure ci-dessous.

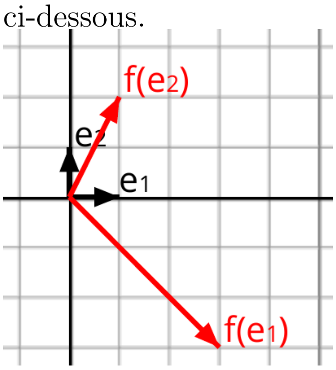


Exercice 3.8 On se donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

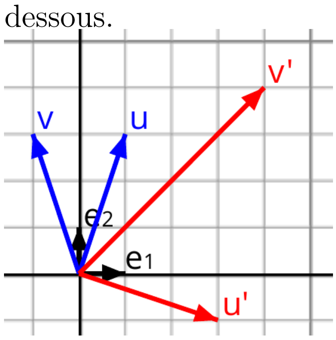
(a) Déterminer $f^{-1}(\vec{u})$ sur la figure ci-dessous.



(b) Déterminer la matrice de f^{-1} dans la base canonique sur la figure ci-dessous.

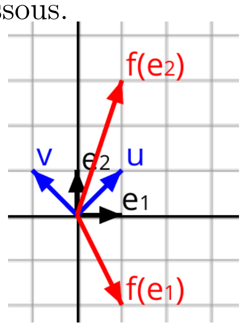


(c) Déterminer la matrice de passage de la base $(\vec{u}, \vec{v})$ à la base $(\vec{u'}, \vec{v'})$ avec la figure ci-dessous.

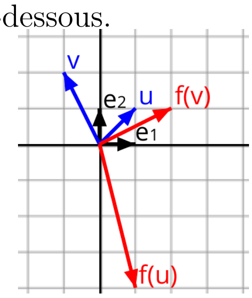


Exercice 3.9 On se donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

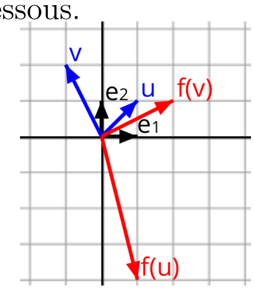
(a) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sur la figure ci-dessous.



(b) Déterminer la matrice de f dans la base canonique sur la figure ci-dessous.



(c) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sur la figure ci-dessous.



Exercice 3.10 Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x$, $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

1. Déterminer $f(\vec{u}_1)$ et $f(\vec{u}_2)$ ainsi que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ ainsi que son inverse.
3. En déduire la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 3.11 Soient $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire associée à A.

1. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ et son inverse.
2. Déterminer $f(\vec{v}_1)$ et $f(\vec{v}_2)$.
3. Quelles sont les coordonnées de $f(\vec{v}_1)$ et de $f(\vec{v}_2)$ dans la base $\mathcal{B}$?
4. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de deux façons différentes.
5. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'unique application linéaire telle que

$$g(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \text{et} \quad g(\vec{v}_2) = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

   Déterminer la matrice de g dans la base canonique.

Exercice 3.12 Soient

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer $\det(A)$ par un produit en croix.

2. Calculer $\det(B)$ avec la règle de Sarrus.
3. Calculer $\det(C)$ en développant selon la troisième ligne.
4. Calculer $\det(D)$ en développant selon la seconde colonne.
5. Calculer $\det(E)$ en par opérations élémentaires sur les lignes.

Exercice 3.13 On considère les matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ 7 & -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 230 & 728 & 230 & 432 \\ 1301 & 315 & 1301 & 539 \\ 5\pi & 52 & 5\pi & 7\sqrt{2} \\ -22 & 45 & -22 & 18 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & \pi & 35 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Que valent les déterminants de A, B et C.
2. Que valent les déterminants de BC, C^2, C^{-1} et $2C$.

Exercice 3.14 Pour quelles valeurs de λ la matrice est-elle inversible ?

1. $\begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,
2. $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 3.15 Soient $A = \begin{bmatrix} -11 & 10 \\ -15 & 14 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont des vecteurs propres de A.
2. Déterminer P inversible et D diagonale telles que $D = P^{-1}AP$.
3. Calculer P^{-1} et vérifier que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 3.16 Diagonaliser si possible

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,
2. $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,
3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,
4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Autrement dit :

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A.
3. Déterminer une base formée de vecteurs propres pour A.
4. Trouver P inversible et D diagonale telles que $D = P^{-1}AP$.
5. (facultatif) Calculer P^{-1} et vérifier.