Petit Séminaire

Bernard Le Stum[1]

Université de Rennes 1

Version du 30 mars 2007

[1] bernard.lestum@univ-rennes1.fr

Cohomologie singulière

Soit X un espace topologique. On peut considérer sa cohomologie singulière

$$H^*_{\mathrm{sing}}(X) = H^*(C^\bullet_{\mathrm{sing}}(X))$$

avec

$$C^q_{\mathrm{sing}}(X) = Hom_{\mathrm{Ens}}(Hom_{\mathrm{top}}(\Delta_q, X), \mathbf{Z})$$

et Δ_q est le simplexe (convexe) de dimension q.

Cette cohomologie s'exprime comme cohomologie d'un faisceau :

Théorème

Si X est localement contractile,

$$H^*_{\mathrm{sing}}(X) \simeq H^*(X, \mathbf{Z}).$$

Cohomologie de de Rham

Théorème (de de Rham)

Si X est une variété différentiable, on a

$$H^*_{\mathrm{dR}}(X/\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R} \otimes H^*(X, \mathbf{Z}).$$

Et donc, si X est une variété analytique complexe,

$$H^*_{\mathrm{dR}}(X/\mathbf{C}) \simeq \mathbf{C} \otimes H^*(X, \mathbf{Z}).$$

Si maintenant, X est une variété algébrique lisse sur un sous-corps K de $\mathbf{C}$, on a

$$\mathbf{C} \otimes_K H^*_{\mathrm{dR}}(X/K) \simeq H^*_{\mathrm{dR}}(X/\mathbf{C}) \simeq H^*_{\mathrm{dR}}(X^{an}/\mathbf{C}).$$

Interprétation par les faisceaux

On peut aussi exprimer la cohomologie de de Rham (algébrique) comme cohomologie d'un faisceau :

Théorème (Grothendieck)

Si X est une variété algébrique (lisse) sur un corps K de caractéristique nulle, on a

$$H^*_{\mathrm{dR}}(X/K) \simeq H^*(X_{\mathrm{inf}}, \mathcal{O}_{X_{\mathrm{inf}}}).$$

Ici, X_{inf} n'est plus un espace topologique mais un site et $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{inf}}}$ est un faisceau sur ce site.

Le site infinitésimal

Si X est une variété algébrique sur un corps K de caractéristique nulle, X_{inf} est le site infinitésimal dont les objets sont les

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "\text{nilpotent}"] \arrow[d, hook, "\text{ouvert}"] & T. \\ X & \end{tikzcd}$$

Et le faisceau est défini par

$$\mathcal{O}_{X_{\mathrm{inf}}} : (X \supset U \subset T) \mapsto \Gamma(T, \mathcal{O}_T).$$

La cohomologie rigide

Si X est une variété sur un corps de caractéristique $p > 0$, la cohomologie de de Rham est remplacée par la cohomologie rigide de P. Berthelot,

$$H^*_{\mathrm{rig}}(X/K),$$

où K est un corps ultramétrique de caractéristique nulle dont le corps résiduel est k.

Je veux montrer que c'est la cohomologie d'un faisceau sur un site à définir :

Théorème ((?))

$$H^*_{\mathrm{rig}}(X/K) \simeq H^*(X_{\mathrm{an}^\dagger}, \mathcal{O}^\dagger_X).$$

Le site (analytique) surconvergent

Les objets du site sont les

$$
\begin{tikzcd}
 & P_K \arrow[d, "\mathrm{sp}"] & & V \arrow[ll, hook', "\text{ouvert}"'] \\
U \arrow[r, hook, "\text{immersion}"] \arrow[d, hook, "\text{ouvert}"] & P & & \\
X & & \text{Schéma formel} \arrow[ul, dotted] &
\end{tikzcd}
$$

Et le faisceau est défini par

$$\mathcal{O}_X^\dagger : (X \supset U \subset P \leftarrow P_K \supset V) \mapsto \Gamma(]U[_V, i_V^{-1}\mathcal{O}_V)$$

avec

$$]U[_V :=]U[_P \cap V \quad \text{et} \quad i_V :]U[_V \hookrightarrow V.$$

Čech-Alexander surconvergent

Si on plonge X dans P propre et lisse au voisinage de X, l'objet

$$(X = X \subset P \leftarrow P_K = P_K)$$

est un recouvrement de l'objet final du site surconvergent.
On considère plus généralement l'objet associé au plongement diagonal $X \hookrightarrow P^{r+1}$ et les flèches induites par la première projection

$$p_r :]X[_{P^{r+1}} \to]X[_P.$$

On définit le complexe de Čech-Alexander surconvergent de X dans P par

$$\check{C}A^\bullet_P := [\imath_P^{-1}\mathcal{O}_{P_K} \to \cdots \to p_{r*}i^{-1}_{P^{r+1}}\mathcal{O}_{P_K^{r+1}} \to \cdots],$$

ou les différentielles sont « simpliciales ».

Première étape

Il faut d'abord un théorème d'annulation (à vérifier) :

Proposition ((?))

$$\forall r \geq 0, s > 0, \quad R^s p_{r*} i_{P^{r+1}}^{-1} \mathcal{O}_{P_K^{r+1}} = 0.$$

On en déduit alors formellement que :

Proposition

$$H^*(X_{\mathrm{an}^\dagger}, \mathcal{O}_X^\dagger) \simeq H^*(]X[_P, \check{C}A_P^\bullet).$$

Comparaison

Il reste ensuite à identifier ce dernier espace avec la cohomologie rigide de X qui est (par définition) :

$$H^*_{\mathrm{rig}}(X/K) := H^*(]X[_P, i_P^{-1}\Omega^\bullet_{P_K/K}).$$

Pour finir, il suffit donc de montrer que :

Théorème ((?))

On a un isomorphisme (dans la catégorie dérivée)

$$\check{C}A^\bullet_P \simeq i_P^{-1}\Omega^\bullet_{P_K/K}.$$

Seconde étape

Notons que si $N\check{C}A_P^\bullet$ est le normalisé du complexe de Čech-Alexander surconvergent, on a des morphismes canoniques

$$\check{C}A_P^\bullet \hookleftarrow N\check{C}A_P^\bullet \twoheadrightarrow i_P^{-1}\Omega^\bullet_{P_K/K}$$

et le premier est un quasi-isomorphisme.
Il reste donc à montrer :

Proposition ((?))

On a un quasi-isomorphisme

$$N\check{C}A_P^\bullet \simeq i_P^{-1}\Omega^\bullet_{P_K/K}.$$