

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE. — *Cohomologie rigide et variétés abéliennes*. Note de Bernard Le Stum, présentée par Pierre Deligne.

Nous étudions la cohomologie de de Rham d'une variété semi-abélienne en caractéristique zéro, puis la cohomologie rigide d'une telle variété en caractéristique positive. Nous construisons ensuite en termes de cohomologie rigide une structure d'extension panachée sur la cohomologie de de Rham d'une variété abélienne à réduction semi-stable.

ALGEBRAIC GEOMETRY. — Rigid cohomology and abelian varieties.

We study the de Rham cohomology of a semi-abelian variety defined over a field of characteristic zero, as well as the rigid cohomology of such a variety defined over a field of positive characteristic. Following this, we equip, in terms of rigid cohomology, the de Rham cohomology of an abelian variety having semi-stable reduction with the structure of an "extension panachée".

1. COHOMOLOGIE DE DE RHAM D'UNE VARIÉTÉ ABÉLIENNE. — Nous fixons un schéma de base S de caractéristique zéro.

1.1. Si G est un schéma en groupes sur S , on note ω_G le $\mathcal{O}_S$ -module des formes différentielles invariantes (par translation) sur G .

1.2. Notons, pour un morphisme lisse de S -schémas lisses $f: X \rightarrow Y$, $\mathcal{D}_{X/Y}$ le faisceau des opérateurs différentiels relatifs de X sur Y (via f). Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{D}_X$ -module (à gauche), le faisceau

$$(1.2.1) \quad f_{\text{DR}} \mathcal{F} = f_* \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X/Y}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$$

est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{D}_Y$ -module.

Lorsque $\mathcal{F}$ est quasi cohérent, les $\mathcal{H}_{\text{DR}}^i(X/Y, \mathcal{F}) = R^i f_{\text{DR}} \mathcal{F}$ sont les faisceaux de cohomologie de de Rham de X sur Y à valeurs dans $\mathcal{F}$.

1.3. THÉORÈME. — Soit G une extension d'un schéma en groupes lisse B par un tore T au-dessus d'un schéma de caractéristique zéro S . Alors :

(1) Il existe une trivialisation naturelle de la connexion de Gauss-Manin sur les $\mathcal{H}_{\text{DR}}^i(G/B)$:

$$(1.3.1) \quad \mathcal{O}_B \otimes_{\mathcal{O}_S} \Lambda^i \omega_T \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\text{DR}}^i(G/B).$$

(2) La suite spectrale de Leray-de Rham

$$(1.3.2) \quad E_2^{p,q} = \mathcal{H}_{\text{DR}}^p(B, \mathcal{H}_{\text{DR}}^q(G/B)) \Rightarrow \mathcal{H}_{\text{DR}}^{p+q}(G)$$

dégénère en E_2 .

Soit $\pi: G \rightarrow B$ le morphisme quotient. Il est alors possible de construire, au moins localement sur S , un isomorphisme

$$(1.3.3) \quad R\pi_{\text{DR}} \mathcal{O}_G \cong \mathcal{O}_B \otimes_{\mathcal{O}_S} \Lambda^* \omega_T$$

dans la catégorie dérivée des $\mathcal{D}_B$ -modules. Le théorème en résulte.

1.4. Considérons maintenant une extension

$$(1.4.1) \quad 0 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow 0$$

d'un schéma abélien par un tore au-dessus de S (i.e. une variété semi-abélienne si S est le spectre d'un corps). Du résultat analogue bien connu pour les schémas abéliens, on déduit grâce à (1.3) que $\mathcal{H}_{\text{DR}}^1(G)$ est localement libre de rang $2 \dim G - \dim T$ et qu'il existe un isomorphisme naturel

$$(1.4.2) \quad \Lambda \mathcal{H}_{\text{DR}}^1(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\text{DR}}^*(G).$$

On munit $\mathcal{H}_{\text{DR}}^1(G)$ d'une filtration (dite « de Hodge ») en posant :

$$(1.4.3) \quad \text{Fil}^0 = \mathcal{H}_{\text{DR}}^1(G), \quad \text{Fil}^1 = \omega_G, \quad \text{Fil}^2 = 0.$$

La suite exacte (1.4.1) fournit alors une suite exacte de $\mathcal{O}_S$ -modules filtrés

$$(1.4.4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{H}_{\text{DR}}^1(B) \rightarrow \mathcal{H}_{\text{DR}}^1(G) \rightarrow \mathcal{H}_{\text{DR}}^1(T) \rightarrow 0.$$

2. COHOMOLOGIE RIGIDE D'UNE VARIÉTÉ SEMI-ABÉLIENNE. — Nous fixons un corps local K de caractéristique zéro. Nous notons $\mathcal{V}$ l'anneau des entiers de K et k son corps résiduel supposé parfait de caractéristique positive p .

2.1. Nous renvoyons le lecteur à [1] pour les définitions et propriétés de la cohomologie rigide. Soient X un schéma lisse compactifiable sur $\mathcal{V}$, X_K sa fibre générique et X_0 sa fibre spéciale. Il existe alors une suite exacte longue de cohomologie

$$(2.1.1) \quad \dots \rightarrow H^i(X_K^{\text{an}}, \Phi_X) \rightarrow H_{\text{DR}}^i(X_K) \xrightarrow{\text{cos}_X^i} H_{\text{rig}}^i(X_0/K) \rightarrow \dots$$

Les cos_X^i sont appelés homomorphismes de cospécialisation.

Lorsque G est un schéma semi-abélien de rang torique constant sur $\mathcal{V}$, i.e. une extension d'un schéma abélien par un tore, on montre que la cospécialisation est bijective :

$$(2.1.2) \quad \text{cos}_G^* : H_{\text{DR}}^*(G_K) \xrightarrow{\sim} H_{\text{rig}}^*(G_0).$$

2.2. Soient G_0 une variété semi-abélienne sur k et

$$(2.2.1) \quad m, p_1, p_2 : G_0 \times G_0 \rightarrow G_0$$

l'addition et les projections. On définit la partie primitive du H^1 cristallin de G_0 sur l'anneau W des vecteurs de Witt de K , comme étant le noyau $H_{\text{cris}}^1(G_0)_{\text{prim}}$ de l'homomorphisme

$$(2.2.2) \quad \delta^* = -p_1^* + m^* - p_2^* : H_{\text{cris}}^1(G_0/W) \rightarrow H_{\text{cris}}^1(G_0 \times G_0/W).$$

En utilisant les techniques de [2], on montre que si $D(G_0)$ est le module de Dieudonné de G_0 , il existe un isomorphisme naturel

$$(2.2.3) \quad H_{\text{cris}}^1(G_0)_{\text{prim}} \cong D(G_0).$$

2.3. THÉORÈME. — Soit G_0 une variété semi-abélienne sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$. Si K est un corps local de caractéristique zéro admettant k pour corps résiduel, il existe un isomorphisme canonique

$$(2.3.1) \quad H_{\text{rig}}^1(G_0/K) \cong D(G_0) \otimes_W K.$$

Il existe un homomorphisme canonique

$$(2.3.2) \quad H_{\text{rig}}^1(G_0/K) \rightarrow H_{\text{cris}}^1(G_0) \otimes_W K,$$

qui est en fait à valeurs dans la partie primitive de $H_{\text{cris}}^1(G_0) \otimes_W K$. De (2.2.3) résulte alors un homomorphisme

$$(2.3.3) \quad H_{\text{rig}}^1(G_0/K) \rightarrow D(G_0) \otimes_W K.$$

Comme corollaire au théorème de relèvement des variétés abéliennes, on peut voir que G_0 se relève en un schéma semi-abélien de rang torique constant G sur $\mathcal{V}$ (après extension finie de K). On peut alors utiliser (2.1.2) et (1.4.4) pour se ramener au cas où G est soit un schéma abélien, soit un tore, et conclure.

2.4. Soit encore G_0 une variété semi-abélienne sur k . Nous disposons donc d'une suite exacte

$$(2.4.1) \quad 0 \rightarrow T_0 \rightarrow G_0 \rightarrow B_0 \rightarrow 0$$

où T_0 est un tore et B_0 une variété abélienne. Celle-ci fournit grâce à (2.3) une suite exacte de F-isocristaux (voir [3])

$$(2.4.2) \quad 0 \rightarrow H_{\text{rig}}^1(B_0) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(G_0) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(T_0) \rightarrow 0.$$

De plus, il résulte de (1.4) et (2.1.2) que, lorsque G_0 se relève en un schéma semi-abélien de rang torique constant, la suite (2.4.2) est une suite exacte de modules de Dieudonné filtrés.

3. COHOMOLOGIE DE DE RHAM D'UNE VARIÉTÉ ABÉLIENNE À RÉDUCTION SEMI-STABLE. —

3.1. Soient A une variété abélienne à réduction semi-stable sur K et N son modèle de Néron connexe. La fibre spéciale N_0 de N est donc extension d'une variété abélienne B_0 par un tore T_0 . En fait, N_0 se relève en un schéma semi-abélien de rang torique constant G sur $\mathcal{V}$, le groupe de Raynaud connexe de A (voir [4]). Nous disposons donc par (2.4) d'une suite exacte de modules de Dieudonné filtrés sur K :

$$(3.1.1) \quad \mathcal{E} : 0 \rightarrow H_{\text{rig}}^1(B_0) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(N_0) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(T_0) \rightarrow 0.$$

De même, à la variété abélienne duale A' est associée une suite exacte analogue $\mathcal{E}'$. On peut définir le dual $\check{D}$ et les décalés $D[n]$ d'un module de Dieudonné filtré. Nous noterons

$$(3.1.2) \quad \mathcal{F} : 0 \rightarrow H_{\text{rig}}^1(T_0)' \check{[-1]} \rightarrow H_{\text{rig}}^1(N_0)' \check{[-1]} \rightarrow H_{\text{rig}}^1(B_0)' \check{[-1]} \rightarrow 0$$

la suite exacte duale de $\mathcal{E}'$ décalée de un.

3.2. THÉORÈME. — *Sous les hypothèses et avec les notations ci-dessus, $H_{\text{DR}}^1(A)$ est de manière naturelle extension panachée (voir [4]) de $\mathcal{E}$ par $\mathcal{F}$ dans la catégorie des K -vectoriels filtrés.*

Le théorème est une conséquence des résultats suivants :

(0) L'homomorphisme $\cos_N^1 : H_{\text{DR}}^1(A) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(N_0)$ respecte les filtrations.

(1) Le diagramme

$$(3.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{c} H_{\text{DR}}^1(A) \check{\sim} [-1] \xleftarrow{\cos_{N'}^1[-1]} H_{\text{rig}}^1(N_0) \check{\sim} [-1] \rightarrow H_{\text{rig}}^1(B_0) \check{\sim} [-1] \\ \approx \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \approx \\ H_{\text{DR}}^1(A) \xrightarrow{\cos_N^1} H_{\text{rig}}^1(N_0) \longleftrightarrow H_{\text{rig}}^1(B_0) \end{array} \right.$$

dans lequel les isomorphismes sont induits par les biextensions de Poincaré via la théorie des classes de Chern, est commutatif.

(2) La suite

$$(3.2.2) \quad 0 \rightarrow H^1(A^{\text{an}}, \Phi_N) \rightarrow H_{\text{DR}}^1(A) \xrightarrow{\cos_N^1} H_{\text{rig}}^1(N_0) \rightarrow 0$$

est exacte.

La démonstration repose sur la construction par Raynaud dans [5] d'une suite exacte (analytique)

$$(3.2.3) \quad 0 \rightarrow M_K^{\text{an}} \rightarrow G_K^{\text{an}} \xrightarrow{\pi} A_K^{\text{an}} \rightarrow 0$$

où M est le groupe des caractères de la partie torique du groupe de Raynaud connexe G' de A' .

CONCLUSION. — Ce genre de question avait déjà été traité par Messing en termes de groupes p -divisibles et d'extensions universelles. Il semble que le formalisme cohomologique se prête mieux à des généralisations éventuelles. D'autre part, une extension panachée analogue à celle de (3.3) sur le H^1 p -adique de A est construite par Grothendieck dans [4]. La théorie de Fontaine permet de reconstruire l'extension panachée de (3.2) en partant de celle de Grothendieck. C'est en fait une conséquence du théorème de Fontaine-Messing qui dit qu'une variété abélienne est de de Rham. En particulier, les foncteurs V_{cris} et D_{cris} de Fontaine permettent de passer de $H_{\text{rig}}^1(N_0)$ à la « partie fixe » de $H_{\text{et}}^1(A, \mathbb{Q}_p)$ et réciproquement.

Reçue le 27 octobre 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] P. BERTHELOT, *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p* , dans *Introduction aux cohomologies p -adiques*, Bull. Soc. Math. Fr., Mémoire n° 23, 1986.
- [2] P. BERTHELOT, L. BREEN, W. MESSING, *Théorie de Dieudonné cristalline II*, Lecture Notes in Math., n° 930, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [3] J.-M. FONTAINE, Sur certains types de représentations p -adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, *Ann. Math.*, 115, n° 3, 1982, p. 529-577.
- [4] A. GROTHENDIECK, *Séminaire de Géométrie Algébrique 7, Groupes de Monodromie en géométrie algébrique*, I, chap. VII-IX, Lecture Notes in Math. n° 288, Springer-Verlag, 1973.
- [5] M. RAYNAUD, Variétés abéliennes et géométrie rigide, *Proc. Int. Congr.*, Nice I, 1970, p. 473-477.

School of Mathematics, University of Minnesota,
127 Vincent Hall, 206 Church Street SE, Minneapolis, MN 55455, U.S.A.