Université de Rennes 1 Année 2008/2009

Licence Sciences, Technologie, Santé (portail MIEE)

AL2 : Algèbre linéaire 2
Feuille d'Exercice 1

On pratiquera la méthode du pivot de Gauss et on n'hésitera pas à utiliser la notation matricielle.

Exercice 1 *Résoudre les systèmes linéaires suivants. Donner dans chaque cas une interprétation graphique du résultat.*

1) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 8 \\ 3x-4y &=& 4 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 10 \\ 2x-2y &=& -4 \\ 3x+5y &=& 26 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y &=& 7 \\ 3x+2y &=& 12 \\ 4x-3y &=& 2 \end{array}\right.$

Exercice 2 *Résoudre les systèmes linéaires suivants*

1) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& 6 \\ 2x-3y+2z &=& 14 \\ 3x+y-z &=& 2 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 2 \\ 2x-y+2z &=& 3 \\ 6x+2z &=& 10 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 4 \\ 2x+y+z &=& 4 \\ x+5y-z &=& 2 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y+z &=& 2 \\ 4x+2y+2z &=& 8 \\ x-y+z &=& 4 \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z &=& -4 \\ 2x+3y-3z &=& 4 \end{array}\right.$

6) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z &=& 8 \\ 3x-z &=& 3 \\ x-y-z &=& 0 \end{array}\right.$

Exercice 3 *Même question avec*

1) $\left\{\begin{array}{rcl} -2x+y-z-t &=& -1 \\ 2x+2y-2t &=& 1 \\ -2x-y-z-2t &=& 1 \\ -2x+y-t &=& -1 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcl} x+z+t &=& 2 \\ x-t &=& 4 \\ y+t &=& -1 \\ y+z-t &=& -1 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z+t &=& 1 \\ 3x+2y+2t &=& 3 \\ x+y+z &=& -1 \\ -x+y+z-t &=& 0 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z+4t &=& 30 \\ 2x-3y+5z-2t &=& 3 \\ 3x+4y-2z-t &=& 1 \\ 4x-y+6z-3t &=& 8 \end{array}\right.$

Exercice 4 *Et ça continue. . .*

1) $\left\{\begin{array}{rcr} x+2y+3z+4t &=& 5 \\ x+3y+5z+7t &=& 11 \\ x-z-2t &=& -6 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{rcr} 3x+4y+z+2t &=& 3 \\ 6x+8y+2z+5t &=& 7 \\ 9x+12y+3z+10t &=& 13 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z+t &=& 0 \\ x+t &=& 0 \\ x+2y+z &=& 0 \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{rcr} x+y+2z-5t &=& 3 \\ 2x+5y-z-9t &=& -3 \\ 2x+y-z+3t &=& -11 \\ x-3y+2z+7t &=& -5 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y+z+t &=& 3 \\ x+2y+z+t &=& 1 \\ x+y+2z+t &=& 2 \\ x+y+z+2t &=& 4 \end{array}\right.$

6) $\left\{\begin{array}{rcr} x+2y+3z+4t+5u &=& 6 \\ x+3y+5z+7t+4u &=& 13 \\ x+4y+7z+10t+3u &=& 20 \\ x+2y+4z+6t+8u &=& 13 \end{array}\right.$

Exercice 5 *1) Résoudre*

$$\left\{\begin{array}{ccr} -x_2+2x_3+x_5+4x_6-3x_7 &=& 1 \\ -3x_2+7x_3+4x_4+6x_5+12x_6-10x_7 &=& 3 \\ x_2+8x_4+5x_5-2x_6-3x_7 &=& 5 \\ -x_2+3x_3+4x_4+4x_5+2x_6+3x_7 &=& -14 \\ x_2+8x_4+5x_5+2x_6-14x_7 &=& 26 \end{array}\right.$$

2) Même question mais avec seconds membres $6, 20, -4, 10, -7$.

3) Même question mais avec seconds membres $1, 2, -1, -5, 6$.

4) Même question mais avec seconds membres $0, 0, 2, 1, 2$.

Université de Rennes 1 Année 2008/2009

Licence Sciences, Technologie, Santé (portail MIEE)

AL2 : Espaces vectoriels et applications linéaires
Feuille d'Exercice 2

Exercice 6 *Dans chaque cas, on déterminera pour quelles valeurs des paramètres $a, b, c, d \ldots$, le système a une solution. On dira alors si celle-ci est unique. Enfin, on résoudra le système pour les valeurs données.*

$$\text{1)}\ \left\{\begin{array}{rcl} x-y+2z &=& a \\ -2x+2y-z &=& b \\ -x+y+7z &=& c \end{array}\right. ,\quad a=1, b=-1, c=2.$$

$$\text{2)}\ \left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& a \\ -x-4y+z &=& b \\ 2x+6y+2z &=& c \\ -x-6y+5z &=& d \end{array}\right. ,\quad a=1, b=-1, c=2, d=-1.$$

$$\text{3)}\ \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z+3t &=& a \\ 3x+6y-2z+10t &=& b \\ -x-2y+2z-2t &=& c \\ 2x+4y-4z+4t &=& d \end{array}\right. ,\quad a=1, b=2, c=-2, d=4.$$

Exercice 7 *Déterminer l'unique polynôme du troisième degré à coefficients dans* $\mathbf{R}$ *vérifiant*

$$P(1)=0, \quad P(-1)=-4, \quad P(2)=5 \quad \text{et} \quad P(-2)=-15.$$

Exercice 8 *L'année prochaine, Yvonne aura deux fois l'âge que sa fille a aujourd'hui. Et elle se souvient que quand Xavier est né, Zelda fêtait juste ses six ans. En fait, dans cinq ans, Xavier et Zelda auront à eux deux exactement l'age de leur mère. Quel est l'âge du capitaine ? En fait, du* futur *capitaine ! car Xavier ne le deviendra que quand il sera deux fois plus âgé, juste un an avant que sa maman ne fête ses soixante ans.*

Exercice 9 *Discuter et résoudre en fonction du paramètre m.*

$$\text{1)}\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& m+1 \\ mx+y+(m-1)z &=& m \\ x+my+z &=& 1 \end{array}\right.$$

$$\text{2)}\ \left\{\begin{array}{rcl} (1+m)x+y+z &=& 2 \\ x+y+(1-m)z &=& 1+m \\ x+(1-m)y+z &=& 1 \end{array}\right.$$

$$\text{3)}\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y+(1-m)z &=& m+2 \\ (1+m)x-y+2z &=& 0 \\ 2x-my+3z &=& m+2 \end{array}\right.$$

Exercice 10 *Discuter et résoudre en fonction des paramètres (a, b dans le premier cas et a, b, c, d dans le second).*

1) $\left\{\begin{array}{rcl} x+by+az & = & 1 \\ x+aby+z & = & b \\ ax+by+z & = & 1 \end{array}\right.$ *2)* $\left\{\begin{array}{ccc} x+y+z & = & 1 \\ ax+by+cz & = & d \\ a^2x+b^2y+c^2z & = & d^2 \end{array}\right.$

Exercice 11 *Discuter et résoudre en fonction des paramètres* λ *et* μ.

$$\left\{\begin{array}{ccc} x-y+t & = & 0 \\ \lambda x+(\lambda^2-\lambda+2)y-z+2\lambda t & = & 0 \\ -x+(\lambda(\lambda^2+2)+1)y+\lambda^2 t & = & 1 \\ 2x+\lambda^2 y-(\lambda+1)z+2\lambda t & = & 1+\mu \\ \lambda x+(\lambda^2-\lambda+2)y-z+(3\lambda-1)t & = & \mu \end{array}\right.$$

Exercice 12 *Pour* n *entier non nul et* $\lambda, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ *fixés, on considère le système suivant :*

$$\left\{\begin{array}{ccc} \lambda x_1+x_2+\cdots+x_n & = & a_1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3+\cdots+x_n & = & a_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x_1+\cdots+x_{n-2}+\lambda x_{n-1}+x_n & = & a_{n-1} \\ x_1+\cdots+x_{n-1}+\lambda x_n & = & a_n \end{array}\right. .$$

1) *Pour quel les valeurs de* λ*, le système admet-il une solution unique ? Calculer alors celle-ci.*
2) *Sinon, pour quelles valeurs des* $a_1, \ldots, a_n$*, y-a-t-il des solutions ?*

Exercice 13 *Pour* n *entier* $n \geq 3$ *et* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ *fixés, on considère le système suivant :*

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1+x_2 & = & 2a_1 \\ x_2+x_3 & = & 2a_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x_{n-1}+x_n & = & 2a_{n-1} \\ x_n+x_1 & = & 2a_n \end{array}\right. .$$

1) *Résoudre pour* $n = 3, 4$.
2) *Montrer que si* n *est impair, le système a une unique solution que l'on déterminera.*
3) *Discuter et résoudre lorsque* n *est pair.*

Université de Rennes 1 Année 2008/2009

Licence Sciences, Technologie, Santé (portail MIEE)

AL2 : Espaces vectoriels et applications linéaires
Feuille d'Exercice 3

On utilisera librement le fait que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel.

Exercice 14 *Dans $\mathbf{R}^2$, donner une interprétation géométrique des sous-ensembles suivants et déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :*

$$
\begin{array}{ll}
F_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x + 2y = 2\} & F_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + 2y = 0\} \\
F_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 1\} & F_4 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\} \\
F_5 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sin(x+y) = 0\} & F_6 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \\
F_7 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 1\} & F_8 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 2\} \\
G_1 = \{(\lambda, 3\lambda) \mid \lambda \in \mathbf{R}\} & G_2 = \{(2\lambda + \mu, 3\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\} \\
G_3 = \{(\lambda + \mu, \lambda - \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\} &
\end{array}
$$

Exercice 15 *Dans $\mathbf{R}^3$, donner une interprétation géométrique des sous-ensembles suivants et déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :*

$$
\begin{array}{l}
F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 3x + 2y + 5z = 0\} \\
F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y - z = 3\} \\
F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \\
F_4 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \text{ et } 3x + 2y - z = 0\} \\
F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y = 0\} \\
G_1 = \{(\lambda, 3\lambda, 5\lambda) \mid \lambda \in \mathbf{R}\} \\
G_2 = \{(2 + \mu, \lambda + 3\mu, 1 - \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\} \\
G_3 = \{(3\lambda - \mu, 2\lambda + \mu, \lambda + \mu) \mid \lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}\}
\end{array}
$$

Exercice 16 *Les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?*

1) $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid xy = 0\}$

2) L'ensemble S_1 des solutions (x_1, x_2, x_3) du système

$$
\left\{
\begin{array}{l}
2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\
x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 \\
x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0
\end{array}
\right.
$$

3) L'ensemble S_2 des solutions (x_1, x_2, x_3) du système

$$
\left\{
\begin{array}{l}
2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\
x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 \\
x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0
\end{array}
\right.
$$

Exercice 17 *Donner un exemple de deux sous-espaces vectoriels S, T non nuls de $\mathbf{R}^3$ tels que*

1) $S \cup T$ ne soit pas un sous-espace vectoriel.

2) $S \cup T$ soit un sous-espace vectoriel.

On pourra s'aider d'un dessin.

Exercice 18 *Peut-on trouver un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ ayant un seul élément ? Deux éléments distincts ?*

Exercice 19 *Soient D une droite vectorielle de $\mathbf{R}^2$ et Δ la réunion du vecteur nul et des vecteurs n'appartenant pas à D. L'ensemble Δ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$?*

Exercice 20 *Soit u l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par :*

$$u(x, y, z, t) = (z, x + y + z - t, x + z).$$

Déterminer la matrice de u (dans les bases canoniques).

Licence Sciences, Technologie, Santé (portail MIEE)

AL2 : Espaces vectoriels et applications linéaires

Feuille d'Exercice 4

Exercice 21 *Calculer AB et BA pour les matrices suivantes :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 22 *Vérifier que $(AB)C = A(BC)$ pour les matrices suivantes :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 23 *Notons F le sous-ensemble des matrices de $M_2(\mathbf{R})$ défini par :*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in S \Leftrightarrow ad - bc = 1.$$

Montrer que si A et B sont deux matrices de F alors $AB \in S$.

Exercice 24 *Calculer les puissances des matrices suivantes :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \frac{1}{2}\sin\theta \\ -2\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Exercice 25 *Calculer les puissances de* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 26 *Calculer les puissances de* $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Université de Rennes 1 Année 2008/2009

Licence Sciences, Technologie, Santé (portail MIEE)

AL2 : Espaces vectoriels et applications linéaires
Feuille d'Exercice 5

On rappellera que les matrices carrées forment une algèbre - et ce que ça signifie en pratique. On utilisera pas les déterminants.

Exercice 27 *Soit* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. *Calculer* $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I$. *En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que* A *soit inversible. Calculer* A^{-1}.

Exercice 28 *Soit* $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Calculer* C^4, *en déduire* C^n *pour tout* n *dans* $\mathbf{Z}$.

Exercice 29 *Soit* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Vérifier que* $A^4 = A$, *mais* $A^3 \neq I$. *La matrice* A *est elle inversible ?*

Exercice 30 *Soit* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. *Vérifier que* $A^3 - A^2 + 4A + 6I = 0$. *En déduire que* A *est inversible et donner son inverse.*

Exercice 31 *Soit* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$. *Vérifier que* $A(A-I)(A-2I) = 0$. *La matrice* A *est-elle inversible ?*

Exercice 32 *Inverser les matrices suivantes :*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & 5 \\ -5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 5 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 & -2 \\ 4 & 5 & 18 & 11 \\ 3 & 6 & 17 & 7 \\ -5 & -3 & -14 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & -5 & 4 \\ 9 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Exercice 33 *Pour quelles valeurs des paramètres a, b, c les matrices suivantes sont-elles inversibles ?*

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{bmatrix}$$

Calculer l'inverse si c'est possible.

Exercice 34 *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1) Vérifier que $A^3 - 3A + 2I = 0$.

2) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Université de Rennes 1 Année 2008/2009

Licence Sciences, Technologie, Santé (portail MIEE)

AL2 : Espaces vectoriels et applications linéaires
Feuille d'Exercice 6

Exercice 35 *Dans le* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$*, donner une interprétation géométrique des sous-ensembles suivants et déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :*

$$
\begin{aligned}
&F_1 = \{z \in \mathbf{C}^* \mid \arg(z) = \pi/4 + k\pi, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{0\}\\
&F_2 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}\\
&F_3 = \{z \in \mathbf{C} \mid z = \overline{z}\}\\
&F_4 = \{z \in \mathbf{C} \mid (3+i)z + (3-i)\overline{z} = 0\}\\
&F_5 = \{z \in \mathbf{C} \mid z + \overline{z} = 2\}
\end{aligned}
$$

Exercice 36 *Dans l'espace vectoriel* $\mathbf{R}[X]$ *des polynômes à coefficients réels, on considère les sous-ensembles suivants. Lesquels sont des sous-espaces vectoriels ? (on note* $\deg(P)$ *le degré d'un polynôme* P*, et on pose* $\deg(0) = -\infty$*).*

$$
\begin{aligned}
&F_1 = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid \deg(P) = 3\}\\
&F_2 = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid \deg(P) \leq 4 \quad \text{ou} \quad P \text{ est pair}\}\\
&F_3 = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid \deg(P) \leq 4 \quad \text{et} \quad P \text{ est pair}\}\\
&F_4 = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P(X+1) = P(X)\}\\
&F_5 = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P(X) + 1 = P(X)\}\\
&F_6 = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P \text{ unitaire}\}\\
&F_7 = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P \text{ sans terme constant}\}
\end{aligned}
$$

Exercice 37 *Dans l'espace vectoriel des fonctions de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$*, on considère les sous-ensembles suivants. Lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?*

$$
\begin{aligned}
&F_1 = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid \forall x \in \mathbf{R}\,, f(x) \geq 0\ \}\\
&F_2 = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid \forall n \in \mathbf{N}\,, f(n) = 0\ \}\\
&F_3 = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid \forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad f(n) = 1\ \}\\
&F_4 = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid \lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ existe et est finie}\}\\
&F_5 = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid \lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty\}\\
&F_6 = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0\}\\
&F_7 = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{ est paire}\}\\
&F_8 = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid \forall\, x \in \mathbf{R}\,, f(-x) = -f(x)\ \}\\
&F_9 = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{ est bornee}\}\\
&F_{10} = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f(1) = 0, f(4) = 0, f(3) = 7\}
\end{aligned}
$$

Exercice 38 *Dire si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.*

1) L'ensemble des fonctions f *de classe* $\mathcal{C}^2$ *vérifiant* $f'' + 2f = 0$ *dans* $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$*.*

2) L'ensemble des fonctions f *vérifiant* $\int_0^1 \sin x f(x)dx = 0$ *dans* $\mathcal{C}^0([0,1])$*.*

3) L'ensemble des fonctions f vérifiant $f(0) = 7f(1) + \int_0^1 t^3 f(t)dt$ dans $\mathcal{C}^0([0,1])$.

4) L'ensemble des primitives de la fonction xe^x sur $\mathbf{R}$ dans l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Exercice 39 *Les ensembles de suites de nombres réels suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des suites de nombres réels ? :*

1) l'ensemble des suites arithmétiques ;

2) l'ensemble des suites convergentes ;

3) l'ensemble des suites de limite ℓ ;

4) l'ensemble des suites (u_n) de réels satisfaisant la relation : $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$;

5) l'ensemble des suites (u_n) de réels satisfaisant la relation : $u_{n+1} = u_n^2$;

6) l'ensemble des suites (u_n) de réels satisfaisant la relation : $u_{n+1} = n^2 u_n$.

Université de Rennes 1 Année 2008/2009

Licence Sciences, Technologie, Santé (portail MIEE)

AL2 : Espaces vectoriels et applications linéaires
Feuille d'Exercice 7

Exercice 40 *Soit E un espace vectoriel. Soient u et v deux éléments de E. Le vecteur u est-il combinaison linéaire de u et v ? Le vecteur nul de E est-il combinaison linéaire de u et v ?*

Exercice 41 *Montrer que le système $\{v_1, v_2\}$, où $v_1 = (1,2)$ et $v_2 = (-1,1)$, engendre $\mathbf{R}^2$.*

Exercice 42 *Soit D la droite vectorielle de $\mathbf{R}^2$ définie par l'équation cartésienne : $2x - 3y = 0$.*

1) *Compléter : $\left\{\begin{array}{ll} x & = \cdots \\ y & = t \end{array}\right.$ pour que ce système soit une représentation paramétrique de D.*
2) *Donner une autre représentation paramétrique de D.*
3) *Donner deux vecteurs différents v_1 et v_2 tels que $D = \mathrm{Vect}(v_1) = \mathrm{Vect}(v_2)$. Quelle est la relation entre ces deux vecteurs ?*

Exercice 43 1) *On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants :*

$$u_1 = (1,1,0), \quad u_2 = (1,0,-1), \quad u_3 = (1,2,1), \quad \text{et} \quad u_4 = (0,1,-1).$$

Le vecteur $u = (2,1,-1)$ est-il combinaison linéaire de u_1, u_2, et u_3 ? Y-a-t-il plusieurs choix possibles pour les coefficients de la combinaison linéaire ? Le vecteur $v = (0,0,1)$ est-il combinaison linéaire de u_1, u_2, et u_3 ? Reprendre les questions ci-dessus en remplaçant (u_1, u_2, u_3) par (u_1, u_2, u_4).

2) *Soient dans $\mathbf{R}^4$ les vecteurs $u_1 = (1,2,3,4)$ et $u_2 = (1,-2,3,-4)$. Peut-on trouver des réels x et y pour que $(x,1,y,1) \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$? Même question avec $(x,1,1,y)$.*

Exercice 44 *Dans $\mathbf{R}^3$, montrer, de deux manières, que les vecteurs $u_1 = (1,2,3)$ et $u_2 = (2,-1,1)$ engendrent le même espace sous-espace vectoriel que $v_1 = (1,0,1)$ et $v_2 = (0,1,1)$:*

1) *en écrivant u_1 et u_2 comme combinaisons linéaires de v_1 et v_2, vous obtiendrez une des inclusions. Un calcul simple, vous donnera l'autre.*
2) *en comparant l' équation qui caractérise $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et celle qui caractérise $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.*

Question subsidiaire : Les deux équations paramétriques suivantes définissent-elles le même plan ?

$$\left\{\begin{array}{ll} x & = \lambda + 2\mu \\ y & = 2\lambda - \mu \\ z & = 3\lambda + \mu \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{ll} x & = \lambda \\ y & = \mu \\ z & = \lambda + \mu \end{array}\right.$$

Exercice 45 *Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les plans suivants :*

$$H_1 : 2x + 3y + 4z = 0 \quad \text{et} \quad H_2 : x + y + z = 0$$

1) *Donner une représentation paramétrique de H_1. En déduire des vecteurs u et v tels que $H_1 = \mathrm{Vect}(u, v)$.*
2) *Donner une représentation paramétrique de $H_1 \cap H_2$ et l'exprimer avec la notation « Vect ».*

Exercice 46 *Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^2$, dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels (on pourra s'aider éventuellement d'une représentation graphique) :*

a) $\left\{\begin{array}{ll} x & = t \\ y & = t^2 \end{array}\right.$ *c)* $\left\{\begin{array}{ll} x & = r\cos t \\ y & = r\sin t \end{array}\right. \; (r > 0)$ *e)* $\left\{\begin{array}{ll} x & = 3t - 3 \\ y & = -t + 1 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{ll} x & = 2t \\ y & = 5t \end{array}\right.$ *d)* $\left\{\begin{array}{ll} x & = 3t - 1 \\ y & = 4t + 3 \end{array}\right.$

Exercice 47 *1) Dans $\mathbf{R}^3$, comparer les sous-espaces vectoriels*

$$F = \mathrm{Vect}(\ (2,3,1), (1,-1,2)\ ) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(\ (3,7,0), (5,0,7)\ )$$

2) *Dans $\mathbf{R}^4$, on pose : $u_1 = (1,0,1,1)$, $u_2 = (-1,-2,3,-1)$, $u_3 = (-5,-3,1,-5)$ et $v_1 = (-1,-1,1,-1)$, $v_2 = (4,1,2,4)$. Comparer $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ et $\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$.*

Exercice 48 *1) Démontrer que le sous-espace vectoriel E_1 de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs $u_1 = (1,2,0,1)$, $u_2 = (2,3,0,3)$, et $u_3 = (3,2,1,2)$ peut être défini par une équation que l'on déterminera.*

2) *Démontrer que le sous-espace vectoriel E_2 de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2,-1,4,0)$ et $v_2 = (-1,0,-3,4)$ peut être défini par deux équations que l'on déterminera.*

Licence Sciences, Technologie, Santé (portail MIEE)

AL2 : Espaces vectoriels et applications linéaires
Feuille d'Exercice 8

Exercice 49 *Sur une feuille de papier quadrillée, dessinez trois vecteurs dont les origines et les extrémités sont situées sur des intersections de lignes. Trouvez une relation de dépendance linéaire entre ces trois vecteurs.*

Exercice 50 *Soient u, v, w trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ non colinéaires deux à deux. Peut-on affirmer que le système (u, v, w) est libre ? Si oui, le démontrer, sinon, donner un contre exemple.*

Exercice 51 *Soit $n \in \mathbf{N}$ et (u_1, u_2, u_3, u_4) un système libre de vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Les systèmes suivant sont ils libres ?*

a) $(u_1, u_2, u_3, u_4, 0)$

b) $(u_1, 2u_2, u_3)$

c) $(u_1, 2u_1 + u_3, u_3)$

d) $(3u_1 + u_2, u_2, u_3 + u_2)$

e) $(u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_3 - u_4, u_4 - u_1)$

Exercice 52 *Trouver une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs $u_1 = (3, 1, -1)$, $u_2 = (-1, 1, 2)$, $u_3 = (1, -1, 1)$ et $u_4 = (5, -2, 3)$.*

Exercice 53 *Donner un système générateur, puis une base des sous-espaces suivants de $\mathbf{R}^2$:*

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x + 2y = 0\}, \quad E_2 = \{(a + b, a - b) | a, b \in \mathbf{R}\}$$

Exercice 54 *Reprendre l'exercice précédent, dans $\mathbf{R}^3$, pour les ensembles suivants :*

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x + y + 2z = 0\}$$

$$E_2 = \{(a + b, a - b, a + b) | a, b \in \mathbf{R}\},$$

$$E_3 = \{(x, 2x, x) | x \in \mathbf{R}\}.$$

Exercice 55 *1) Résoudre et discuter le système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = b_2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 13x_4 = b_3 \end{cases}$$

2) Dans l'espace $\mathbf{R}^3$*, on se donne les quatre vecteurs suivants :*

$$v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,2,3), v_3 = (3,1,4), v_4 = (10,4,13).$$

Monter que le système (v_1, v_2, v_3, v_4) *est générateur de* $\mathbf{R}^3$ *mais n'est pas libre et donner une relation de dépendance linéaire. Trouver une base de* $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ *extraite de ce système.*

Exercice 56 *Dire si les vecteurs suivants sont linéairement indépendants ; s'ils ne le sont pas, déterminer un sous-ensemble maximal dont les vecteurs le sont, et écrire les autres vecteurs en fonction de ceux-ci.*

1) $(0,1,1,1), (-1,0,1,-1), (1,1,0,2)$ *dans* $\mathbf{R}^4$ *considéré comme espace vectoriel sur* $\mathbf{R}$

2) $(3-i, 1+i, 2-2i, i, 1), (1,1,1-i, 2-i, i), (3, 1+2i, 3-i, 1+3i, 0)$ *dans* $\mathbf{C}^5$ *considéré comme espace vectoriel sur* $\mathbf{C}$

3) $1-X, X-X^2, 1-X^2, X-X^3$ *dans* $\mathbf{R}[X]$ *considéré comme espace vectoriel sur* $\mathbf{R}$

4) $\sin, \cos$ *dans l'ensemble de toutes les applications* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$*, considéré comme espace vectoriel sur* $\mathbf{R}$

Université de Rennes 1 Année 2008/2009

Licence Sciences, Technologie, Santé (portail MIEE)

AL2 : Espaces vectoriels et applications linéaires
Feuille d'Exercice 9

Exercice 57 *A l'aide d'opérations élémentaires sur les vecteurs, déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels engendrés par les systèmes de vecteurs suivants :*

1) $u_1 = (3, 1, -1)$, $u_2 = (-1, 1, 2)$, $u_3 = (1, -1, 1)$, $u_4 = (5, -2, 3)$ *dans* $\mathbf{R}^3$ *;*

2) $u_1 = (2, 5, 7)$, $u_2 = (-1, 4, 0)$ *;* $u_3 = (3, -1, 2)$ *dans* $\mathbf{R}^3$ *;*

3) $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (3, 2, 1)$, $u_3 = (3, 3, 3)$, $u_4 = (5, 0, -5)$ *dans* $\mathbf{R}^3$.

Exercice 58 *1) Donner une base et la dimension de* $\mathbf{R}^3$ *comme espace vectoriel sur* $\mathbf{R}$

2) Donner une base et la dimension de $\mathbf{C}^3$ *comme espace vectoriel sur* $\mathbf{C}$

3) Donner une base et la dimension de $\mathbf{C}^3$ *comme espace vectoriel sur* $\mathbf{R}$

Exercice 59 *1) Soit* (u_1, u_2, u_3) *un système générateur de* $\mathbf{R}^3$*. Le système* (u_2, u_3) *est-il libre ?*

2) Soient (u_1, u_2, u_3) *un système générateur de* $\mathbf{R}^2$ *et* v *un vecteur de* $\mathbf{R}^2$.

(a) Le système (u_1, u_2, u_3, v) *est-il générateur ?*

(b) Le système (u_1, u_2, u_3) *est-il libre ?*

Exercice 60 *Dans* $\mathbf{R}^4$ *on considère les quatre vecteurs*

$$v_1 = (1, -1, 0, 0), \quad v_2 = (1, 0, -1, 0), \quad v_3 = (1, 0, 0, -1) \quad \text{et} \quad v_4 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

1) Vérifiez que v_1,v_2, v_3 *et* v_4 *appartiennent au sous-espace vectoriel* F *d'équation* $x + y + z + t = 0$.

2) Le système (v_1, v_2, v_3, v_4) *est-il libre ?*

3) Le système (v_1, v_2, v_3, v_4) *est-il générateur de* $\mathbf{R}^4$ *?*

4) Le système (v_1, v_2, v_3, v_4) *est-il une base de* F *?*

Exercice 61 *Dans l'espace* $\mathbf{R}^4$*, vérifier que les vecteurs*

$$u_1 = (1, 2, -1, -2), \quad u_2 = (2, 3, 0, -1, \quad u_3 = (1, 3, -1, 0) \quad \text{et} \quad u_4 = (1, 2, 1, 4)$$

sont linéairement indépendants et calculer les coordonnées de $v = (7, 14, -1, 2)$ *dans la base* (u_1, u_2, u_3, u_4).

Exercice 62 *Dans l'espace* $\mathbf{C}^3$, *vérifier que les vecteurs*

$$u_1 = (1, -1, i), \quad u_2 = (1, -1, 1) \quad \text{et} \quad u_3 = (i, 1, -1)$$

forment une base et calculer les coordonnées de $v = (1+i, 1-i, i)$ *dans la base* (u_1, u_2, u_3).

Exercice 63 1) *Soit* F *le sous-espace vectoriel de* $\mathbf{R}^4$ *engendré par*

$$v_1 = (1, -1, 3, 2), \quad v_2 = (3, -1, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, -6, -3) \quad \text{et} \quad v_4 = (0, 2, -9, -5).$$

(a) *Déterminer la dimension de* F *et en donner une base.*

(b) *Donner un système d'équations cartésiennes de* F.

2) *Soit*

$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}.$$

Montrer que G *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{R}^4$ *et donner une base de* G.

3) *Montrer que* $F \subset G$. *A-t-on* $F = G$ *?*

Exercice 64 *Déterminer une base sur* $\mathbf{R}$ *pour les sous-espaces vectoriels suivants, et la compléter en une base de tout l'espace.*

1) $\mathrm{Vect}((1, 2, 1), (0, 1, 3), (2, 2, -4)) \subset \mathbf{R}^3$

2) $\mathrm{Vect}((1, 3, 0), (2, 3, -3)) \cap \mathrm{Vect}((1, 1, -3), (1, 4, 3)) \subset \mathbf{R}^3$

3) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbf{R}^3$

Exercice 65 *Déterminer une base sur* $\mathbf{C}$ *pour les sous-espaces vectoriels suivants, et la compléter en une base de tout l'espace.*

1) $\mathrm{Vect}((2+i, 1+i, i), (1+3i, 2i, -1+2i)) \subset \mathbf{C}^3$

2) $\mathrm{Vect}((1, 0, i), (0, 1+i, 1-i)) \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{C}^3 \mid (4+i)x_1 - x_2 = 0\} \subset \mathbf{C}^3$

Exercice 66 *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{R}^n$, *donner une base de* F *et sa dimension dans les cas suivants :*

1) $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$

2) $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_1 + x_n = x_2 + x_n = \ldots + x_n = x_{n-1} + x_n = 0\}$

Université de Rennes 1 Année 2008/2009

Licence Sciences, Technologie, Santé (portail MIEE)

AL2 : Espaces vectoriels et applications linéaires
Feuille d'Exercice 10

Exercice 67 *Dans* $\mathbf{R}[X]$*, vérifier si nécessaire que les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une base.*

1) $F_1 = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P(X) = aX^2 + bX(X-7) + c\ \}$
2) $F_2 = \mathrm{Vect}(X, X(X+1), X+1)$
3) $F_3 = \mathrm{Vect}((X-1)^2, X^2-1, X+1, X-1)$
4) $F_4 = \{P \in \mathbf{R}_n[X] \mid P(X) \text{ multiple de } (X^2+1)\}$

Exercice 68 *Dans l'espace vectoriel* $E = \mathbf{R}_{\leq 3}[X]$*, On considère les quatre polynômes :*

$P_1(X) = 6-X^3,\ \ P_2(X) = X^3-2X^2-2X,\ \ P_3(X) = X^2-3X+1,\ \ P_4(X) = X^3-X^2-4.$

1) Soit $F = \{P \in E \mid P(0) + P'(0) + P''(0) + P'''(0) = 0\}$*. Montrer que* $F \neq E$ *et vérifier que les quatre polynômes précédents sont dans* F*.*
2) le système (P_1, P_2, P_3, P_4) *est-il libre ?*
3) Le système (P_1, P_2, P_3, P_4) *est-il unsystème générateur de* E *?*
4) le système (P_1, P_2, P_3, P_4) *est-il une base de* F *?*

Exercice 69 *Montrer que les polynômes*

$$P_1(X) = X(X-1)(X-2), \quad P_2(X) = X(X-1)(X-3),$$

$$P_3(X) = X(X-2)(X-3) \quad \text{et} \quad P_4(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$$

forment une base de $\mathbf{R}_{\leq 3}[X]$*. Exprimer dans cette base le polynôme* P *tel que* $P(0) = 3$*,* $P(1) = -2$*,* $P(2) = 5$*,* $P(3) = 7$*.*

Exercice 70 *Soit* $E = \mathbf{Q}[X]$ *l'espace vectoriel sur* $\mathbf{Q}$ *des polynômes à coefficients dans* $\mathbf{Q}$*.*

1) Démontrer que toute famille de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots)$ *dont le degré est égal à l'indice est une base de* E*.*
2) En utilisant la base $P_0 = 1, P_1 = X, \ldots, P_n = (1/n!)X(X-1)\cdots(X-n+1)$*, déterminer les polynômes* Q *tels que* $Q(a) \in \mathbf{Z}$ *pour tout* $a \in \mathbf{Z}$*.*

Exercice 71 *Soit* E *l'espace vectoriel sur* $\mathbf{R}$ *des applications de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$ *et* F *le sous-espace engendré par* $f_1, \ldots, f_4$ *avec*

$$f_1(x) = \sinh(x), \quad f_2(x) = \cosh(x), \quad f_3(x) = e^x, \quad \text{et} \quad f_4(x) = e^{-x}.$$

Déterminer une base de F*.*

Exercice 72 *Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des applications de $]-1,1[$ dans $\mathbf{R}$ et F le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $f_1, \ldots, f_4$ avec*

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x+1}, \quad f_3(x) = \frac{2}{x^2-1} \quad \text{et} \quad f_4(x) = \frac{x+5}{x^2-1}.$$

Montrer que le système (f_1, f_2) est libre. Déterminer une base de F. (Pensez à la décomposition en éléments simples)

Exercice 73 *Pour tout x réel, $E(x)$ désigne la partie entière de x. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des applications de $[0,2[$ dans $\mathbf{R}$. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $f_1, \ldots, f_5$ avec*

$$f_1(x) = 1-x, \quad f_2(x) = |1-x|, \quad f_3(x) = E(x) \quad \text{et} \quad f_4(x) = xE(x), f_5(x) = 1+x.$$

Montrer que le système (f_1, f_2, f_3) est libre. Déterminer une base B de F contenant (f_1, f_2, f_3). Quel est la dimension de F ? Soit $g \in E$, définie par $g(x) = 2+4x$, si $x < 1$ et $g(x) = 0$, si $x \geq 1$. Montrer que $g \in F$ et donner ses composantes dans la base B.

Exercice 74 *Montrer que dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, les fonctions $f_1, f_2, ..., f_7$ définies par*

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \sin 2x, \quad f_3(x) = e^x,$$

$$f_4(x) = |x|, \quad f_5(x) = e^{-x} \quad \text{et} \quad f_6(x) = \cos x, \quad f_7(x) = \cos 2x$$

forment un système libre (penser à exploiter la dérivabilité, lecomportement à l'infini, la parité...). En déduire une base de $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, ..., f_7)$.

Exercice 75 *Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et n un entier naturel non nul. On note $c_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie par $x \mapsto \cos kx$ et $s_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie par $x \mapsto \sin kx$.*

1) Montrer que $(s_1, s_2, ..., s_n)$ est un système libre (on pourra raisonner par récurrence).

2) En déduire que $(c_0, c_1, c_2, ..., c_n)$ est libre, puis que $(c_0, c_1, c_2, ..., c_n, s_1, s_2, ..., s_n)$ est libre (penser à la parité).

Exercice 76 *Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbf{R}}$ des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies par $f_a(x) = |x-a|$ est libre. Donner une base de $\mathrm{Vect}((f_a)_{a\in\mathbf{R}})$.*

Exercice 77 *Soit G le sous-ensemble de $M_2(\mathbf{R})$ formé des matrices $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.*

1) Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de dimension deux de $M_2(\mathbf{R})$.

2) Montrer que G est stable pour la multiplication de matrices et que tout élément non nul de G a son inverse dans G.

Licence Sciences, Technologie, Santé (portail MIEE)

AL2 : Espaces vectoriels et applications linéaires
Feuille d'Exercice 11

Exercice 78 *Déterminer le rang des matrices suivantes :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \alpha & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & \beta & \beta \\ 3 & 0 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 3 & 0 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

où α et β sont des paramètres.

Exercice 79 *Soit* $A = \begin{bmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ *où a et b désignent deux réels.*

1) Montrer qu'on a $2 \leq \mathrm{rg}\ A \leq 3$.

2) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\mathrm{rg}\ A = 2$?

Exercice 80 *Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1) Calculer le noyau et l'image de f.

2) Quel est le rang de f ?

3) Calculer la matrice de $f^2 = f \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$ et montrer que $f^2 - 3f = 0$.

4) M est-elle inversible ?

Exercice 81 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :*

$$M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soient $v_1 = (1, -1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (-1, 1, 2)$.

1) *Montrer que* $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ *est une base de* $\mathbf{R}^3$.

2) *Déterminer la matrice associée à* f *dans la base* $\mathcal{B}$.

3) *En déduire que* f *est une symétrie par rapportà un plan vectoriel que l'on déterminera.*

Exercice 82 *Soit* g *l'application linéaire de* $\mathbf{R}^3$ *dans* $\mathbf{R}^2$ *définie par rapport aux deux bases* (e_1, e_2, e_3) *et* (f_1, f_2) *par la matrice :*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

1) *On prend dans* $\mathbf{R}^3$ *la nouvelle base* $e'_1 = e_2 + e_3, e'_2 = e_1 + e_3, e'_3 = e_1 + e_2$. *Écrire la matrice* B *de* g *quand on se place dans cette base.*

2) *On prend dans* $\mathbf{R}^2$ *la nouvelle base* $f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$. *Écrire la matrice* C *de* g *par rapport aux bases* (e'_1, e'_2, e'_3) *et* (f'_1, f'_2).

Exercice 83 *Soient* (e_1, e_2, e_3, e_4) *la base canonique de* $\mathbf{R}^4$ *et* f *l'application linéaire de* $\mathbf{R}^4$ *dans* $\mathbf{R}^3$ *définie par* $f(x, y, z, t) = (X, Y, Z)$ *avec :*

$$X = x - y + z + t, Y = x + 2z - t, Z = x + y + 3z - 3t.$$

1) *Quelle est la matrice de* f *dans les bases canoniques ?*

2) *Montrer que* $(f(e_1), f(e_2))$ *est une base de* $\mathrm{im} f$ *et la compléter en une base* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbf{R}^3$.

3) *Montrer que* $\ker f$ *est de dimension* 2 *et donner une base* (u_1, u_2) *de* $\ker f$.

4) *Vérifier que* (e_1, e_2, u_1, u_2) *est une base de* $\mathbf{R}^4$. *Quelle est la matrice de* f *dans les bases* (e_1, e_2, u_1, u_2) *et* $\mathcal{B}$ *?*

Exercice 84 *Notons* (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbf{R}^3$. *Soient* $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$ *et* $\varepsilon_2 = (1, 2, 1)$.

1) *Vérifier que les vecteurs* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *et* e_1 *forment une base de* $\mathbf{R}^3$.

2) *Soit* f *l'application linéaire définie de* $\mathbf{R}^3$ *dans* $\mathbf{R}^3$ *par :*

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \quad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \quad \text{et} \quad f(e_1) = e_1 + e_2.$$

Donner la matrice de f *dans la base canonique de* $\mathbf{R}^3$.

3) *Calculer la matrice de* f *dans la base* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_1)$.

Exercice 85 *Soit* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'application linéaire définie par :*

$$f(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z, x + z).$$

1) *Écrire la matrice de* f *dans la base canonique de* $\mathbf{R}^3$.

2) *Montrer que les vecteurs* $v_1 = (2, 1, -1)$, $v_2 = (2, -1, 2)$ *et* $v_3 = (3, 0, 1)$ *forment une base de* $\mathbf{R}^3$. *Donner la matrice de* f *dans la base* (v_1, v_2, v_3).

Exercice 86 *Considérons l'espace vectoriel* $\mathbf{R}^n$ *; notons* $(e_1, \ldots, e_n)$ *sa base canonique et* v *le vecteur défini par* $v = e_1 + \ldots + e_n$. *Soit* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *l'application linéaire définie, pour* $i = 1, \ldots, n$, *par* $f(e_i) = e_i + v$.

1) *Montrer que tout vecteur de* $\ker f$ *est colinéaire à* v *et, en fait, égal à* 0.
2) *Montrer que* f *est un isomorphisme.*
3) *Écrire la matrice de* f *dans la base canonique de* $\mathbf{R}^n$.

Exercice 87 *Soit* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *une application linéaire. Posons* $g = f - \mathrm{Id}$ *; supposons que* $g \circ g \neq 0$ *et que* $g \circ g \circ g = 0$.

1) *Soit* v *dans* $\mathbf{R}^3$ *tel que* $g \circ g(v) \neq 0$. *Montrer que les vecteurs* v, $g(v)$ *et* $g \circ g(v)$ *forment une base de* $\mathbf{R}^3$.
2) *Donner la matrice de* g *puis la matrice de* f *dans la base* $\{v, g(v), g \circ g(v)\}$.
3) *Supposons maintenant que* f *est l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de* $\mathbf{R}^3$ *est :*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Posons $v = (1, 0, 0)$. *Montrer que* f *et* v *vérifient les conditions énoncées en 1). Écrire la matrice de* f *dans la base* $(v, g(v), g \circ g(v))$.

Exercice 88 *Soient* (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbf{R}^3$ *et* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'application linéaire définie par :*

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, -2x + y + z, -6x + 2y + 4z).$$

1) *Écrire la matrice de* f *dans la base canonique de* $\mathbf{R}^3$.
2) *Considérons les vecteurs* $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 1, 2)$ *et* $v_3 = (2, 1, 5)$ *de* $\mathbf{R}^3$. *Montrer que* (v_1, v_2, v_3) *est une base de* $\mathbf{R}^3$ *et calculer la matrice de* f *dans cette base.*

Exercice 89 *Soient* E *un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel de dimension* 3 *et* (e_1, e_2, e_3) *une base de* E. *Notons* $f : E \to E$ *l'application linéaire dont la matrice dans la base* (e_1, e_2, e_3) *est :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

1) *Trouver une base de* $\ker f$.
2) *Posons* $v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $v_2 = e_2 + e_3$ *et* $v_3 = e_1 + 2e_3$. *Montrer que* (v_1, v_2, v_3) *est une base de* E. *Calculer la matrice de* f *dans cette base.*
3) *En déduire que l'on a* $f \circ f = -f$.

Exercice 90 *Notons* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbf{R}^3$. *Soit* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'unique application linéaire telle que :*

$$f(e_1) = -e_1 + e_2 + e_3, f(e_2) = -2e_1 + 2e_3 \text{et} f(e_3) = -4e_1 + e_2 + 4e_3.$$

1) *Écrire la matrice de* f *dans la base* $\mathcal{B}$.
2) *Donner une base de* $\mathrm{im} f$ *et une équation de* $\mathrm{im} f$.
3) *Pour quelles valeurs du paramètre réel* t *l'application linéaire* $f - t\mathrm{Id}$ *est-elle un isomorphisme ?*
4) *Trouver une base* v_1 *de* $\ker(f - 3\mathrm{Id})$ *et une base* v_2 *de* $\ker f$. *Montrer que les vecteurs* v_1 *et* v_2 *sont linéairement indépendants. Trouver* v_3 *dans* $\mathbf{R}^3$ *tel que* (v_1, v_2, v_3) *soit une base de* $\mathbf{R}^3$. *Quelle est la matrice de* f *dans la base* (v_1, v_2, v_3) *?*

Exercice 91 *Soient* E *un* K*-espace vectoriel de dimension* 3 *et* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *une base de* E. *Notons* f *l'application linéaire de* E *dans* E *dont la matrice dans la base* $\mathcal{B}$ *est :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1) *Écrire la matrice de* f *dans la base* (e_3, e_2, e_1).
2) *Écrire la matrice de* f *dans la base* $(e_1 + e_3, e_3, e_2 - e_3)$.

Exercice 92 *Dans l'espace vectoriel* $\mathbf{R}^3$ *muni de sa base canonique* (e_1, e_2, e_3), *on considère l'endomorphisme* u *défini par :*

$$u(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3, \quad u(e_2) = e_1 - e_2 \quad \text{et} \quad u(e_3) = e_2 - e_3.$$

1) *Écrire la matrice* M *de* u *dans la base canonique. Calculer* M^2 *et vérifier que* $M^3 = 0$.
2) *Déterminer* $\ker u$, $\ker u^2$, $\mathrm{im} u$, $\mathrm{im} u^2$ *et donner les relations d'inclusion entre ces sous-espaces.*
3) *On pose* $e'_1 = u^2(e_1), e'_2 = -u(e_3), e'_3 = e_3$. *Montrer que* (e'_1, e'_2, e'_3) *est une base de* $\mathbf{R}^3$. *Donner la matrice* N *de* u *dans cette base.*
4) *Soit* S *la matrice de passage de* (e_1, e_2, e_3) *à* (e'_1, e'_2, e'_3). *Calculer* S^2 *et en déduire* S^{-1}. *Vérifier que* $S^{-1}MS = N$.

Université de Rennes 1 Année 2008/2009

Licence Sciences, Technologie, Santé (portail MIEE)

AL2 : Espaces vectoriels et applications linéaires
Feuille d'Exercice 12

Exercice 93 *Soit*

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbf{R}_{\leq 4}[X] & \to & \mathbf{R}_{\leq 4}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

1) *Déterminer la matrice* A *de* ϕ *dans la base* $(1, X, \frac{X^2}{2!}, \frac{X^3}{3!}, \frac{X^4}{4!})$.
2) *Que vaut* A^5 *?*

Exercice 94 *Soit* φ *l'endomorphisme de* $\mathbf{R}_{\leq 3}[X]$ *défini par :*

$$\varphi(P)(X) = P(X+1).$$

1) *Déterminer la matrice* A *de* φ *dans la base canonique* $(1, X, X^2, X^3)$.
2) *Montrer que* A *est inversible.*

Exercice 95 *Soit* φ *l'application de* $\mathbf{R}_{\leq 3}[X]$ *dans* $\mathbf{R}[X]$ *définie par :*

$$\varphi(P)(X) = P(X) - XP'(X).$$

1) *Montrer que* φ *définit un endomorphisme de* $\mathbf{R}_{\leq 3}[X]$.
2) *Déterminer le noyau de* φ.
3) *Déterminer la matrice* M *de* φ *dans la base canonique* $(1, X, X^2, X^3)$.
4) *Quel est le rang de* M *?*

Exercice 96 *Soit* u *l'application définie sur* $\mathbf{R}_{\leq 4}[X]$ *par*

$$u(P) = X^2 P''(X) - 3XP'(X).$$

1) *Montrer que* u *est une application linéaire de* $\mathbf{R}_{\leq 4}[X]$ *dans* $\mathbf{R}_{\leq 4}[X]$. *Donner la matrice de* u *dans la base canonique de* $\mathbf{R}_{\leq 4}[X]$.
2) *Déterminer* $\ker u$ *et* $\mathrm{im} u$. *En donner des bases et les dimensions.*
3) *L'équation* $u(P) = 1$ *a-t-elle une solution dans* $\mathbf{R}_{\leq 4}[X]$ *? Donner une solution de l'équation* $u(P) = X^3$. *Si* P_1 *et* P_2 *sont deux solutions de cette équation, que peut-on dire de* $P_1 - P_2$ *? Donner toutes les solutions de l'équation* $u(P) = X^3$.

Exercice 97 *Dans* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ *on considère le sous espace vectoriel*

$$E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$$

avec

$$f_1(x) = \sin^3 x, f_2(x) = \sin^2 x \cos x, f_3(x) = \sin x \cos^2 x \quad \text{et} \quad f_4(x) = \cos^3 x.$$

1) Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) *est une base de* E.

2) Montrer que $\{f_1', f_2', f_3', f_4'\} \subset E$. *En déduire que l'application :*

$$\begin{array}{rcl} D : E & \to & E \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$

est par conséquent un endomorphisme de E. *Donner la matrice* M *de* D *dans la base* (f_1, f_2, f_3, f_4).

3) Montrer que D *est un automorphisme de* E *et calculer* M^{-1}.

4) Soient $g_1(x) = \sin x, g_2(x) = \cos x, g_3(x) = \sin 3x, g_4(x) = \cos 3x$. *Montrer que* (g_1, g_2, g_3, g_4) *est une base de* E.

5) Quelle est la matrice N *de* D *dans cette dernière base ?*

Exercice 98 *Soient* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ *et :*

$$\begin{array}{rcl} \psi : M_2(\mathbf{R}) & \to & M_2(\mathbf{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

1) Montrer que ψ *est linéaire. Calculer* $\psi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$. *Déterminer une base de* $\ker \psi$ *et une base de* $\mathrm{im}\psi$.

2) Donner la matrice K *de* ψ *dans la base canonique de* $M_2(\mathbf{R})$.

3) Trouver une base de $M_2(\mathbf{R})$ *dans laquelle la matrice de* ψ *soit :*

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Université de Rennes 1 Année 2008/2009

Licence Sciences, Technologie, Santé (portail MIEE)

AL2 : Espaces vectoriels et applications linéaires
Feuille d'Exercice 13

Exercice 99 *Dans $\mathbf{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), les sous espaces E et F suivants sont-ils supplémentaires ?*

1) $E = \{(x, y, z) | x = y = z\}$ *et* $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$

2) $E = \{(3t, 3t, t), t \in \mathbf{R}\}$ *et* $F = \{(2u + v, u + 2v, u), u \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{R}\}$

3) $E = \{(2u + v, u + 2v, u + v), u \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{R}\}$ *et* $F = \{(u + v, u + v, 2u), u \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{R}\}$

Exercice 100 *Donner deux sous-espaces vectoriels distincts S et T de $\mathbf{R}^3$ tels que*

$$\mathbf{R}^3 = \mathrm{Vect}((1, 1, 1)) \oplus S = \mathrm{Vect}((1, 1, 1)) \oplus T.$$

Exercice 101 *On désigne par E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?*

1) Soient F et G des plans vectoriels de $E = \mathbf{R}^3$. Alors $E \neq F \cup G$.

2) Soient F et G des plans vectoriels de $E = \mathbf{R}^3$. Alors $E \neq F + G$.

3) Soient P_1 et P_2 des plans vectoriels de E tels que $P_1 \cap P_2 = \{0\}$. Alors $\dim(E) \geq 4$

4) Soient F et G des sous-espaces de dimension 3 *de $\mathbf{R}^5$. Alors $F \cap G \neq \{0\}$.*

5) Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$. Tout sous-espace supplémentaire de F contient e_2.

Exercice 102 *Soient K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$ et soit $u \in E$ et $u \notin H$. Montrer que H et $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.*

Exercice 103 *Donner deux exemples de sous-espaces vectoriels distincts de $\mathbf{R}_{\leq 2}[X]$, de dimension 2. Est-il possible de les choisir supplémentaires dans $\mathbf{R}_{\leq 2}[X]$?*

Exercice 104 *Dans l'espace vectoriel $X = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, on considère $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ où $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = e^x$ et $F = \{f \in X | f(0) = f'(0) = f''(0) = 0\}$. Prouver que $X = E \oplus F$.*

Exercice 105 *Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel réel des fonctions deux fois dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{I}$) le sous-espace formé des fonctions paires (respectivement impaires).*

1) Montrer que $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

2) En déduire toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbf{R}$ *telles que :*

$$\forall x \in \mathbf{R}, f''(x) + f(-x) = x + x^2 + chx.$$

Exercice 106 *On rappelle qu'une matrice* symétrique *(resp.* antisymétrique*) est une matrice* A *telle que*

$${}^tA = A \text{ (resp. } {}^tA = -A).$$

Leur ensemble se note $SM_n(\mathbf{R})$ *(resp.* $AM_n(\mathbf{R})$*). Montrer que* $SM_n(\mathbf{R})$ *et* $AM_n(\mathbf{R})$ *sont des sous-espaces vectoriels de* $M_n(\mathbf{R})$ *et que*

$$M_n(\mathbf{R}) = SM_n(\mathbf{R}) \oplus AM_n(\mathbf{R}).$$

Exercice 107 *On note* C *(resp.* C_k*) l'ensemble des carrés magiques 3-3 (resp. de trace* k*), c'est à dire, les* $A \in M_3(\mathbf{R})$ *telles que les sommes des éléments des lignes, des colonnes et des diagonales soient toutes égales (resp. égales à* k*).*

1) Montrer que C_k *est non-vide et que si* $M, N \in C_k$*, alors* $M - N \in C_0$*.*

2) Montrer que

$$C_0 = SC_0 \oplus AC_0$$

avec

$$SC_0 = C_0 \cap SM_3(\mathbf{R}) \text{ et } AC_0 = C_0 \cap AM_3(\mathbf{R}).$$

3) Déterminer une base de SC_0 *puis une base de* AC_0*. En déduire une base de* C_0 *puis une base de* C*.*

4) Trouver un carré magique de trace 27 *dont toutes les entrées sont distinctes.*

Licence Sciences, Technologie, Santé (portail MIEE)

AL2 : Espaces vectoriels et applications linéaires
Feuille d'Exercice 14

Exercice 108 *Écrire comme produit de cycles disjoints, comme produit de transpositions, puis calculer la signature de trois manières distinctes :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{te} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 8 & 9 & 4 & 6 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercice 109 *1) Montrer que toute permutation est composée de transpositions de la forme $(1, i)$ pour $i = 2, \ldots, n$.*

2) Montrer que toute permutation est composée de transpositions de la forme $(i, i+1)$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.

3) Montrer que toute permutation est composée d'un certain nombre de fois de $(1, 2)$ et $(1, 2, \ldots, n)$ pris dans un certain ordre.

4) Montrer que toute permutation paire est composée de cycles de longueur 3.

Exercice 110 *Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2 + A + I = 0$. Calculer $\det A$. Même question avec $A^2 - A + I = 0$.*

Exercice 111 *Montrer que si n est impair, il n'existe pas de $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A^2 + I = 0$. Même question avec $A^2 - \sqrt{2}A + I = 0$.*

Exercice 112 *Montrer que si $A \in M_n(\mathbf{C})$, alors $\det \bar{A} = \overline{\det A}$. En déduire que si $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ satisfont $AB = BA$, alors $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.*

Exercice 113 *Montrer que si n est impair et $A \in M_n(\mathbf{R})$ antisymétrique, alors $\det A = 0$.*

Exercice 114 *Calculer*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 10 & 14 & 22 \\ 0 & 21 & 33 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} i & j & i & j \\ 0 & i & j & i \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & 0 & i \end{vmatrix}$$

Exercice 115 *Calculer pour tout $n \geq 2$*

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ x & \ddots & & \vdots & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & a_1 \end{vmatrix} \quad \text{puis} \quad \Gamma_n := \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & a_1 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_1 & x \end{vmatrix}.$$

Exercice 116 *Calculer*

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 117 *Montrer que si $P \in \mathbf{R}[X]$ est tel que* $\deg P < n$, *et*

$$A = \begin{bmatrix} P(x) & \cdots & P(x+n) \\ \vdots & & \vdots \\ P(x+n) & \cdots & P(x+n+m) \end{bmatrix},$$

alors $\det A = 0$. *Calculer* $\det B$ *avec*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ n^2 & \cdots & (n+m)^2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 118 *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $a \neq b$ fixés. Calculer*

$$\Delta := \begin{vmatrix} \lambda_1 & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

On pourra montrer que

$$\Delta(X) := \begin{vmatrix} \lambda_1 + X & b+X & \cdots & b+X \\ a+X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+X \\ a+X & \cdots & a+X & \lambda_n + X \end{vmatrix}$$

est un polynôme de degré au plus 1, calculer $\Delta(-a)$ et $\Delta(-b)$ et en déduire $\Delta = \Delta(0)$.

Licence Sciences, Technologie, Santé (portail MIEE)

AL2 : Espaces vectoriels et applications linéaires

Feuille d'Exercice 15

Exercice 119 *Lorsque c'est possible, diagonaliser les matrices suivantes :*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 120 *Pour quelles valeurs de a, b et c les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?*

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

Exercice 121 *La matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ *est-elle diagonalisable sur* $\mathbf{R}$ *? sur* $\mathbf{C}$ *?*

Exercice 122 *Soient a un réel et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice A par rapport à la base canonique est donnée par*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1) Calculer le determinant de A. Pour quelles valeurs du paramètre a le noyau de f n'est-il pas reduit à $\{0\}$? Justifier.

2) Montrer que le polynôme caractéristique P de f vérie $P = (X - 3)Q$, où Q est un polynôme que l'on déterminera. Pour quelles valeurs de a le nombre 3 est-il racine multiple de P ?

3) Determiner, en fonction de a, les valeurs propres de f, leurs multiplicités et la dimension des sous espaces propres associés. Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice 123 *Diagonaliser la matrice A suivante et calculer A^n :*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 124 *Soit u l'application suivante :*

$$\begin{aligned} \mathbf{R}[X]_{\leq 2} &\xrightarrow{\quad u \quad} \mathbf{R}[X]_{\leq 2} \\ P &\longmapsto (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{aligned}$$

Montrer que u est bien définie et linéaire. Déterminer les valeurs propres de u et, si c'est possible, diagonaliser u.

Université de Rennes 1 Année 2008/2009

Licence Sciences, Technologie, Santé (portail MIEE)

AL2 : Espaces vectoriels et applications linéaires
Feuille d'Exercice 16

Exercice 125 *Dire si les applications suivantes sont des produits scalaires sur* $\mathbf{R}^2$ *ou* $\mathbf{R}^3$ *:*

1) $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$

2) $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$

3) $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$

Exercice 126 *1) Montrer que*

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$$

définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$.

2) Déterminer alors la partie orthogonale au sous-espace défini par $x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 = 0$.

Exercice 127 *Dans* $\mathbf{R}^4$ *muni du produit scalaire usuel, on considère le sous-espace vectoriel* F *engendré par*

$$u_1 := (1, 1, 1, 1), \quad u_2 := (-1, -1, -2, 2), \quad u_3 := (-1, 5, -4, 8) \quad \text{et} \quad u_4 := (-3, 1, -5, 3).$$

Montrer que $F^\perp$ *est une droite dont on déterminera un vecteur directeur. En déduire que* F *est un hyperplan dont on donnera une équation.*

Exercice 128 *1) Dans l'espace vectoriel euclidien* $\mathbf{R}^3$ *muni du produit scalaire usuel montrer que*

$$(u_1 := (1, 0, 0), \quad u_2 := (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \text{et} \quad u_3 := (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1))$$

forment une base orthonormée.

2) Déterminer la projection orthogonale de $u := (7, 5, 9)$ *sur le plan* H *engendré par* v_1 *et* v_2.

3) Même question avec le plan engendré par v_2 *et* v_3

Exercice 129 *Dans lespace vectoriel euclidien* $\mathbf{R}^3$ *muni du produit scalaire usuel, appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base*

$$(v_1 := (3, 1, 1), v_2 := (2, 1, 0), v_3 := (-1, -1, -1))$$

pour obtenir une base orthonormée.

Exercice 130 *Déterminer la matrice, dans la base canonique de* $\mathbf{R}^3$ *muni du produit scalaire usuel, de la projection orthogonale sur le plan d'équation* $x + 2y - 3z = 0$ *.*

Exercice 131 *1) Montrer que l'application*

$$(P, Q) \mapsto P(-1)Q(-1) + 2P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]_{\leq 2}$*. Donner une base orthornormée pour ce produit scalaire (utiliser Gram-Schmidt sur la base canonique).*

2) Mêmes questions avec l'application

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

3) Mêmes questions avec l'application

$$(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$