

M-MODULES

Bernard Le Stum

Université de Rennes

14 mars 2026

- 1 INTRODUCTION
- 2 L'ANNEAU \mathbb{M} DES MATRICES
- 3 GROUPES ABÉLIENS LINÉAIREMENT TOPOLOGISÉS
- 4 \mathbb{M} -ANNEAUX
- 5 COUP DE THÉÂTRE

On peut fonctionner par analogie avec l'**algèbre de Weyl**

$$\mathcal{D} = \left\{ \sum_{\text{finie}} a_{kn} x^k \partial^n, a_{kn} \in \mathbb{C} \right\}, \text{ avec } \partial x^{n+1} = (n+1)x^n \text{ et } x^k x^n = x^{n+k}.$$

(1) On a la suite d'inclusions

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \subset \mathcal{O} &= \left\{ \sum_{\text{finie}} c_n x^n, c_n \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathcal{D} = \left\{ \sum_{\text{finie}} f_n \partial^n, f_n \in \mathcal{O} \right\} \\ &\subset \widehat{\mathcal{D}} = \left\{ \sum_{\text{infinie}} f_n \partial^n, f_n \in \mathcal{O} \right\} \simeq \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}). \end{aligned}$$

(2) Il existe une présentation $0 \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\partial} \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$.

(3) Les \mathcal{D} -modules à gauche forment une catégorie abélienne (de Grothendieck) symétrique monoïdale fermée avec unité \mathcal{O} .

(4) La catégories des représentations du groupe fondamental d'un ouvert se plonge dans celle des \mathcal{D} -modules.

On peut introduire de manière analogue l'**anneau des matrices**

$$\mathbb{M} = \left\{ \sum_{\text{infinie en } t} a_{kn} e_k t^n, a_{kn} \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ avec } te_{n+1} = e_n \text{ et } e_k e_n = \begin{cases} e_k & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) On peut montrer que

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_\bullet := \left\{ \sum_{\text{finie}} c_n e_n, c_n \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{M}^\vee = \left\{ \sum_{\text{finie}} a_n t^n, a_n \in \mathbb{Z}_\bullet \right\}$$

$$\subset \mathbb{M} = \left\{ \sum_{\text{infinie}} a_n t^n, a_n \in \mathbb{Z}_\bullet \right\} \simeq \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_\bullet).$$

(2) On dispose d'une résolution $0 \rightarrow \mathbb{M} \xrightarrow{t} \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{Z}_\bullet \rightarrow 0$.

(3) Les \mathbb{M} -modules forment une catégorie abélienne (de Grothendieck) symétrique monoïdale fermée avec unité \mathbb{Z}_\bullet .

(4) La catégorie des groupes abéliens linéairement topologisés métrisables complets se plonge dans celle des \mathbb{M} -modules.

DÉFINITION

L'**anneau \mathbb{M} des matrices** et le **module \mathbb{Z}_\bullet des vecteurs** sont respectivement

- 1 l'ensemble des matrices $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ à colonnes finies à coefficients dans \mathbb{Z} avec la multiplication usuelle,
- 2 l'ensemble des suites verticales finies d'éléments de \mathbb{Z} avec l'action usuelle.

$$\mathbb{M} = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ * & \vdots & \\ 0 & * & \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}_\bullet := \left\{ \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \right\}.$$

Si on identifie \mathbb{Z}_\bullet avec la première colonne de \mathbb{M} , c'est un idéal principal projectif (à gauche) et $\mathbb{M} \simeq \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_\bullet) \simeq \mathbb{Z}_\bullet^{\mathbb{N}}$ (comme \mathbb{M} -module).

Si on pose

$$e_n := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad t := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad t' := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix},$$

on a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{M} \xrightarrow{\cdot t^n} \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\bullet}^n \longrightarrow 0$$

scindée par t'^n et un isomorphisme $\mathbb{M} \simeq \varprojlim \mathbb{M}/\mathbb{M}t^n$ montrant que \mathbb{M} est complet pour la topologie t -adique. On a par exemple $1 = \sum_{n=0}^{\infty} e_n t^n$.

On désigne par $M^{\otimes 2}$ l'ensemble des matrices $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ à coefficients entiers et colonnes finies (premier indice fini). C'est un \mathbb{M} -module (à gauche) avec deux structures compatibles (et échangeables) de \mathbb{M} -modules à droite. On a

$$M^{\otimes 2} \simeq \mathbb{Z}_{\bullet}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \simeq (\mathbb{Z}_{\bullet}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{M}^{\mathbb{N}}$$

de deux manières différentes.

DÉFINITION

Le **produit tensoriel interne** de deux \mathbb{M} -modules (à gauche) M et N est le \mathbb{M} -module à gauche

$$M \otimes_{\mathbb{Z}_\bullet} N := (\mathbb{M}^{\otimes 2} \otimes_{\mathbb{M}} M) \otimes_{\mathbb{M}} N$$

en utilisant successivement les deux structures de \mathbb{M} -module à droite.

PROPOSITION

Le produit tensoriel interne munit la catégorie des \mathbb{M} -modules d'une structure monoïdale symétrique fermée avec unite \mathbb{Z}_\bullet .

En particulier, il existe un bifoncteur $\mathcal{H}om_{\mathbb{Z}_\bullet}$ et un isomorphisme naturel

$$\mathcal{H}om_{\mathbb{Z}_\bullet}(M \otimes_{\mathbb{Z}_\bullet} N, P) \simeq \mathcal{H}om_{\mathbb{Z}_\bullet}(M, \mathcal{H}om_{\mathbb{Z}_\bullet}(N, P)).$$

On note $M^\vee := \mathcal{H}om_{\mathbb{Z}_\bullet}(M, \mathbb{Z}_\bullet)$ le dual de M .

PROPOSITION

M^\vee est (isomorphe à) l'idéal projectif bilatère des matrices **finies** et $M^{\vee\vee} \simeq M$.

PROPOSITION

Les \mathbb{M} -modules de présentation finie sont stables par colimite, limite **dénombrable**, extension et produit tensoriel interne. Tout \mathbb{M} -module est colimite filtrante de \mathbb{M} -modules de présentation finie.

PROPOSITION

Pour un \mathbb{M} -module M , les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1 M est de présentation finie / projectif de présentation finie,
- 2 $M \simeq \mathbb{M}/\mathbb{M}u$ / $\mathbb{M}/\mathbb{M}e$ avec $e^2 = e$,
- 3 Il existe une suite exacte $\mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}^J \rightarrow M \rightarrow 0$ avec I, J dénombrables / un isomorphisme $\mathbb{Z}^I \simeq M$ avec I dénombrable.

EXEMPLE

- 1 \mathbb{M} , \mathbb{Z}_\bullet et \mathbb{M}^2 sont projectifs de présentation finie.
- 2 \mathbb{M}^\vee est projectif mais pas de présentation finie.
- 3 $\mathbb{Z}_{p\bullet} := \mathbb{M}/\mathbb{M}(t - p)$ est de présentation finie (p premier).
- 4 $\mathbb{Z}[1/n]_\bullet := \mathbb{M}^\vee/\mathbb{M}^\vee(1 - nt)$ et $\mathbb{Q}_{p\bullet} := \varinjlim_p \mathbb{Z}_{p\bullet}$ ne sont ni l'un ni l'autre.

En copiant un argument de Clausen et Scholze, on montre :

LEMME

Si M est un \mathbb{M} -module de présentation finie, alors

$$M \simeq \mathbb{Z}_{\bullet}^E \oplus \mathcal{E}xt_{\mathbb{Z}_{\bullet}}(\mathbb{Z}_{\bullet} \otimes_{\mathbb{Z}} T, \mathbb{Z}_{\bullet})$$

avec T groupe abélien dénombrable tel que $T^{\vee} := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{Z}) = 0$.

THÉORÈME

Tout idéal I de type fini de \mathbb{M} est projectif.

DÉMONSTRATION.

De manière équivalente : tout module de présentation finie M a une résolution de longueur 2. En effet, si $0 \rightarrow \mathbb{Z} \cdot I \rightarrow \mathbb{Z} \cdot J \rightarrow T \rightarrow 0$ est exacte, il en va de même de $0 \rightarrow \mathbb{Z}_{\bullet}^I \rightarrow \mathbb{Z}_{\bullet}^J \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathbb{Z}_{\bullet}}(\mathbb{Z}_{\bullet} \otimes_{\mathbb{Z}} T, \mathbb{Z}_{\bullet}) \rightarrow 0$. \square

COROLLAIRE

L'anneau \mathbb{M} est cohérent.

DÉFINITION

Un groupe abélien topologique M est **linéairement topologisé** si les sous-groupes ouverts forment une base de voisinages de zéro. On dit alors que M est **complet** si $M \simeq \varprojlim M/M'$ quand M' parcourt les sous-groupes ouverts.

EXEMPLE

- ① Un module sur un anneau adique (sur $\mathbb{Z}[[X]]$ ou \mathbb{Z}_p par exemple),
- ② Un module de présentation finie sur un anneau de Huber (sur \mathbb{Q}_p ou $\mathbb{Q}_p\{X\}$ par exemple).

Si V est un groupe abélien topologique, on pose $V_\bullet := \{(s_n)_{n \in \mathbb{N}}, s_n \rightarrow 0\}$.

EXEMPLE

- ① On retrouve \mathbb{Z}_\bullet pour la topologie discrète,
- ② on a $\mathbb{M} \simeq (\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})_\bullet$ (topologie produit) et $\mathbb{M}^\vee \simeq (\mathbb{Z} \cdot \mathbb{N})_\bullet$ (topologie discrète),
- ③ $\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{M}/\mathbb{M}(t - p)$, $\mathbb{Z}[1/n]_\bullet \simeq \mathbb{M}^\vee/\mathbb{M}^\vee(1 - nt)$ et $\mathbb{Q}_p \simeq \varinjlim_p \mathbb{Z}_p$.

PROPOSITION

- 1 Si V est linéairement topologisé complet, alors \mathbb{M} agit sur V_\bullet ,
- 2 le foncteur $V \rightarrow V_\bullet$ possède un adjoint $M \rightarrow \widehat{M}^{t=0}$,
- 3 le foncteur $V \rightarrow V_\bullet$ est monoïdal : on dispose d'une application \mathbb{M} -linéaire naturelle $V_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_\bullet} W_\bullet \rightarrow (V \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}} W)_\bullet$.
- 4 Restreint aux groupes métrisables, le foncteur $V \rightarrow V_\bullet$ est pleinement fidèle.
- 5 Restreint aux groupes discrets, le foncteur $V \rightarrow V_\bullet$ est fortement monoïdal :

$$V_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_\bullet} W_\bullet \simeq (V \otimes_{\mathbb{Z}} W)_\bullet$$

et possède un coadjoint $M \mapsto M^{t=0}$ (automatiquement monoïdal) qui possède lui même un coadjoint.

On dispose aussi de la notion de \mathbb{M} -module linéairement \mathbb{M} -topologisé et le point (4) résulte alors du

LEMME

Toute application \mathbb{M} -linéaire $M \rightarrow N$ entre \mathbb{M} -modules linéairement \mathbb{M} -topologisés avec M métrisable et N complet est continue.

DÉFINITION

Un **M-anneau** A (resp. un **A-module** M) est un \mathbb{M} -module muni d'un morphisme associatif unitaire $A \otimes_{\mathbb{Z}_\bullet} A \rightarrow A$ (resp. $A \otimes_{\mathbb{Z}_\bullet} M \rightarrow M$).

Formellement, A est un monoïde de la catégorie monoïdale et M est un A -object.

PROPOSITION

- ① *Si R est un anneau linéairement topologisé complet (resp. V un R -module), alors R_\bullet (resp. V_\bullet) est canoniquement un \mathbb{M} -anneau (resp. R_\bullet -module).*
- ② *Restreint aux anneaux (resp. modules) métrisables, on obtient un foncteur pleinement fidèle.*
- ③ *Si R est un anneau discret, la catégorie des R_\bullet -modules est équivalente à celle des $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{M}$ -modules usuels.*

Attention : \mathbb{Z}_\bullet est un \mathbb{M} -anneau et un \mathbb{Z}_\bullet -module est un \mathbb{M} -module usuel. On a $\mathbb{M} \simeq \mathbb{Z}[[t]]_\bullet$ (resp. $\mathbb{M}^\vee \simeq \mathbb{Z}[t]_\bullet$) mais un $\mathbb{Z}[[t]]_\bullet$ -module n'est pas la même chose qu'un \mathbb{M} -module usuel (resp. mais \mathbb{M}^\vee n'est pas un anneau **unitaire** usuel).

EXEMPLE

- 1 Un $\mathbb{Z}[X]_{\bullet}$ -module est un $\mathbb{M}[X]$ -module usuel (un \mathbb{M} -module usuel muni d'un endomorphisme).
- 2 Un $\mathbb{Z}[[X]]_{\bullet}$ -module est un $\mathbb{M}[[X]]$ -module usuel. On a (foncteurs pleinement fidèles)

$$\mathbb{Z}[[X]]\text{-Mod}^{\wedge} \subset \mathbb{Z}[[X]]_{\bullet}\text{-Mod} \subset \mathbb{Z}[X]_{\bullet}\text{-Mod}$$

(\wedge : linéairement topologisés complets métrisables).

- 3 Un \mathbb{Z}_p_{\bullet} -module est un \mathbb{M}_p -module usuel (on écrit $M_p := \varprojlim M/pM$) et $\mathbb{Z}_p\text{-Mod}^{\wedge} \subset \mathbb{Z}_p_{\bullet}\text{-Mod} \subset \mathbb{M}\text{-Mod}$.
- 4 Un \mathbb{Q}_{\bullet} -module est un $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{M}$ -module usuel (ne pas confondre avec l'anneau $\mathbb{M}_{\mathbb{Q}}$ des matrices à n colonnes finies et à n coefficients rationnels).
- 5 Un \mathbb{Q}_p_{\bullet} -module est un $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{M}_p$ -module usuel. On a :

$$\mathbb{Q}_p\text{-Ban} \subset \mathbb{Q}_p_{\bullet}\text{-Mod} \subset \mathbb{M}\text{-Mod}.$$

($\mathbb{Q}_p\text{-Ban} = \{\text{espaces de Banach } p\text{-adiques}\}$).

- 6 Un $\mathbb{Z}_p\{X\}_{\bullet}$ -module est un $\mathbb{M}_p\{X\}$ -module usuel (on note $A\{X\} := \varprojlim_V A[X]/V[X]$, V sous-groupe ouvert, l'anneau des fonctions convergentes sur le disque unité fermé).

Le produit tensoriel interne est remarquablement stable.

EXEMPLE

On a

$$\textcircled{1} \mathbb{Z}[[X]]_{\bullet} \otimes_{\mathbb{Z}}^L \mathbb{Z}[[Y]]_{\bullet} \simeq \mathbb{Z}[[X, Y]]_{\bullet}$$

$$\textcircled{2} \mathbb{Z}_{p\bullet} \otimes_{\mathbb{Z}}^L \mathbb{Z}[[X]]_{\bullet} \simeq \mathbb{Z}_p[[X]]_{\bullet},$$

$$\textcircled{3} \mathbb{Z}_{p\bullet} \otimes_{\mathbb{Z}}^L \mathbb{Z}_{p\bullet} \simeq \mathbb{Z}_{p\bullet} \text{ et } \mathbb{Z}_{p\bullet} \otimes_{\mathbb{Z}}^L \mathbb{Z}_{\ell\bullet} = 0 \text{ quand } \ell \neq p,$$

$$\textcircled{4} \mathbb{Q}_{p\bullet} \otimes_{\mathbb{Z}}^L \mathbb{Z}[[X]]_{\bullet} \simeq \mathbb{Q}_p[[X]]_{\bullet}^{\text{bd}} \text{ et } \mathbb{Q}_{p\bullet} \otimes_{\mathbb{Z}}^L \mathbb{Q}_{p\bullet} \simeq \mathbb{Q}_{p\bullet} \text{ (où } \mathbb{Q}_p[[X]]^{\text{bd}} := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[[X]] \text{ est l'anneau des fonctions bornées sur le disque),}$$

$$\textcircled{5} E_{\bullet} \otimes_{\mathbb{Z}} F_{\bullet} \simeq (E \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} F)_{\bullet} \text{ si } E \text{ et } F \text{ sont deux espaces de Banach sur } \mathbb{Q}_p,$$

$$\textcircled{6} \mathbb{Z}[[X]]_{\bullet} \otimes_{\mathbb{Z}[[X]]}^L \mathbb{Z}[[X]]_{\bullet} \simeq \mathbb{Z}[[X]]_{\bullet}$$

THÉORÈME

Si R est un anneau discret de type fini (sur \mathbb{Z}), $I \subset R$ un idéal et M, N deux R_{\bullet} -modules (dérivés) I -complets, alors $M \otimes_{R_{\bullet}}^L N$ est aussi (dérivé) I -complet.

En utilisant les mathématiques condensées, on peut retrouver ce résultat (à partir d'un théorème de Mann) et tout ce qui précède :

THÉORÈME (GABRIEL-POPESCU)

Si \mathcal{A} est une catégorie abélienne complète et cocomplète dans laquelle les colimites filtrantes sont exactes et G est un générateur projectif de présentation finie, alors \mathcal{A} est équivalente à la catégorie des A -modules avec $A = \text{End}(G)$.

THÉORÈME (CLAUSEN-SCHOLZE)

Les modules solides forment une catégorie abélienne complète et cocomplète dans laquelle les colimites filtrantes sont exactes et $\underline{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}}$ est un générateur projectif de présentation finie.

COROLLAIRE

La catégorie des groupes abéliens solides est équivalente à la catégorie des \mathbb{M} -modules. □

– MERCI –

- [Cam26] Juan Esteban Rodríguez CAMARGO. *Notes on Solid Geometry*. 2026. arXiv : 2603.03012 [math.AG]. URL : <https://arxiv.org/abs/2603.03012>.
- [CS23] Dustin CLAUSEN et Peter SCHOLZE. *Analytic Stacks*. Video lecture series, IHES and Max Planck Institute for Mathematics. Course on analytic stacks and foundations for analytic geometry. 2023. URL : <https://www.carmin.tv/en/collections/dustin-clausen-and-peter-scholze-analytic-stacks>.
- [Joh79] P. T. JOHNSTONE. “On a topological topos”. English. In : *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 38 (1979).