Géométrie Algébrique

(Schémas/Espaces adiques)

Bernard Le Stum (26 avril 2019)

– Ça c'est la caisse. Le mouton que tu veux est dedans (Antoine de Saint-Exupéry).

Réalisé en LaTeX à partir du modèle Legrand Orange Book

Table des matières

Introduction

La géométrie algébrique est l'étude des systèmes d'équations polynomiales de la même manière que l'algèbre linéaire est l'étude des systèmes d'équations linéaires. Il s'agit essentiellement de décrire l'ensemble des solutions du système, que l'on voit comme un espace topologique, mais on souhaite aussi conserver certaines informations provenant des équations elles mêmes, ce que l'on voit comme un « faisceau » d'anneaux sur cet espace. Un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux est un « espace annelé » et nous allons montrer comment différentes géométries peuvent s'interpréter dans ce contexte. Nous pouvons ainsi présenter par exemple les notions de variété topologique, de variété différentiable ou de variété analytique.

Explicitons ce dernier cas. Une variété analytique complexe est définie comme étant « localement » l'ensemble V des zéros communs à certaines fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_k$ définies sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$:

$$V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in U \ / \ \forall i = 1, \ldots, k, f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0\}.$$

Une variété analytique complexe hérite d'une topologie et d'un faisceau défini localement comme étant l'ensemble des fonctions sur V qui peuvent se prolonger en une fonction holomorphe sur U (on peut aussi autoriser les « nilpotents »).

On dispose d'une version algébrique dans laquelle on remplace la topologie usuelle par la topologie dite de Zariski et les fonctions holomorphes par des polynômes. Plus précisément, on définit justement un fermé de Zariski X dans $\mathbb{C}^n$ comme étant l'ensemble des zéros communs à certains polynômes $f_1, \ldots, f_k$:

$$X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \ / \ \forall i = 1, \ldots, k, f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0\},$$

et, par définition, une variété algébrique complexe est localement de cette forme. Remarquons en passant, qu'en raffinant la topologie, on peut toujours voir une variété algébrique complexe X comme une variété analytique complexe, que l'on notera alors X^{an}.

Afin de définir de manière raisonnable la notion de variété algébrique sur un corps k qui n'est pas nécessairement algébriquement clos, on rappelle le théorème des zéros de Hilbert. Ce résultat fondamental établit une bijection entre les points et les idéaux maximaux lorsque k est algébriquement clos :

$$k^n \simeq \mathrm{Spm}(k[t_1, \ldots, t_n]), \quad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \mathfrak{m} := (t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n).$$

On peut aussi remarquer que, sous cette bijection, on a $f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \Leftrightarrow f \in \mathfrak{m}$ et redéfinir, lorsque $k = \mathbb{C}$, une variété algébrique comme étant localement de la forme :

$$X := \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(k[t_1, \ldots, t_n]) \ / \ \forall i = 1, \ldots, k, f_i \in \mathfrak{m}\} \simeq \mathrm{Spm}(A)$$

où $A := k[T_1, \ldots, T_n]/(f_1, \ldots, f_k)$. [1] Ceci fait sens sur n'importe quel corps k.

Plus généralement, une k-algèbre A qui est isomorphe à un quotient d'un anneau de polynômes sur k est dite « de type fini ». On définit alors une variété algébrique X sur k comme étant localement de la forme $X := \mathrm{Spm}(A)$ ou A est une k-algèbre de type fini. Cette construction est « fonctorielle » : si $\varphi : A \to B$ est un homomorphisme de k-algèbres de type fini et $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de B, alors $\varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ est un idéal maximal de A. On obtient ainsi une application $\varphi^{-1} : \mathrm{Spm}(B) \to \mathrm{Spm}(A)$. En recollant, on peut définir la notion de morphisme entre variétés algébriques et obtenir ainsi une « catégorie ». Remarquons au passage que, lorsque k est contenu dans $\mathbb{C}$, on peut associer à n'importe quelle variété algébrique X sur k la variété algébrique complexe $X_{\mathbb{C}}$ définie localement par les mêmes équations.

Ces méthodes ne permettent malheureusement pas de traiter directement des équations diophantiennes, c'est à dire, de chercher les solutions entières à un système d'équations polynomiales. Il faut pour cela être capable de considérer des anneaux commutatifs plus généraux que des algèbres de type fini sur un corps. Il est alors nécessaire de prendre en compte l'ensemble $\mathrm{Spec}(A)$ de tous les idéaux premiers (et pas seulement des idéaux maximaux) : en effet, si $\varphi : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux et $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de B, alors $\varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ n'est *pas* nécessairement un idéal maximal de A. Mais l'assertion reste vraie pour les idéaux premiers et on obtient bien une application $\varphi^{-1} : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$. On va ainsi substituer le spectre premier au spectre maximal et entrer dans le monde des schémas ([GD71], [Har77], [Liu02]). Sur ces questions, on pourra avantageusement consulter l'excellent cours de mon collègue Matthieu Romagny [2].

Il existe une autre approche pour les problèmes diophantiens. Tout entier naturel n s'écrit de manière unique sous la forme $n = \prod p^{v_p(n)}$ avec p premier. Les applications v_p sont les valuations p-adiques et celles-ci se prolongent naturellement à $\mathbb{Q}$. On obtient ainsi une bijection [3]

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Spv}(\mathbb{Q}) := \{\text{valuations sur } \mathbb{Q}\},$$

1. À rapprocher de l'homéomorphisme $x \mapsto \mathfrak{m}_x := \{f \in A \ / \ f(x) = 0\}$ lorsque X est un espace topologique compact et A est l'anneau des fonctions continues sur X.

2. `https://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/M2_1516/cours_total.pdf`.

3. On dispose aussi d'un analogue géométrique $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{Spv}(\mathbb{C}(t), \mathbb{C})$ qui permet aussi de voir les points de la droite comme des valuations sur un corps.

ce qui nous encourage à considérer la notion de « valuation » comme une alternative à celle d'idéal premier. Notons que chaque valuation p-adique donne naissance à une valeur absolue $|a|_p = p^{-v_p(a)}$ qui satisfait des propriétés analogues à la valeur absolue usuelle.

Lorsque X est une variété algébrique sur $\mathbb{Q}$, on peut lui associer une variété analytique complexe $X_{\mathbb{C}}^{\mathrm{an}}$ en composant les deux processus vus ci-dessus (extension des scalaires et analytification) et utiliser les outils de la géométrie analytique classique. Le corps $\mathbb{C}$ est le complété algébriquement clos de $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue usuelle. On aimerait pourvoir considérer aussi $X_{\mathbb{C}_p}^{\mathrm{an}}$ où $\mathbb{C}_p$ désigne l'analogue p-adique de $\mathbb{C}$. Malheureusement la notion de variété analytique complexe ne se transpose pas si facilement car $\mathbb{C}_p$ est totalement discontinu. On peut cependant interpréter un élément de $\mathbb{C}_p^n$ comme une valuation, dite de hauteur 1, en associant à $x = (x_1, \ldots, x_n)$ la valuation

$$v_x : f \mapsto v_p(f(x))$$

sur $\mathbb{C}_p[T_1, \ldots, T_n]$. En considérant toutes les valuations de hauteur 1 qui prolongent celle de $\mathbb{C}_p$, on obtient l'espace de Berkovich ([Ber90],[Ber93], [Ber98], [Duc07]). En prenant aussi celles de hauteur supérieure, on obtient l'espace de Huber ([Hub93a], [Hub93b], [Hub94]). Notons pour finir que cette approche a permis entre autre de développer ces dernières années la théorie des espaces perfectoïdes ([Sch12] et [Sch13]).

Avant de décrire la structure de ce cours, je me dois de signaler le Grimoire d'algèbre commutative [4] de mon collègue Lorenzo Ramero qui traite de manière bien plus complète et dans un style très agréable des mêmes questions que celles qui nous occupent ici.

Notre cours se compose de quatre parties de poids sensiblement égal.

Dans la première partie, nous présentons la théorie des catégories, qui est un enrichissement de la théorie des ensembles et fournit un vocabulaire extrêmement pratique pour la suite. Cela permet aussi de donner un sens rigoureux à un certain nombre de termes comme « universel », « naturel », « diagramme », etc. Cette partie sera illustrée par de nombreux exemples issus de différents domaines des mathématiques

Dans la seconde partie, nous introduisons la notion de faisceau en utilisant le langage des catégories. Nous sommes surtout intéressés par la notion d'espace localement annelé qui permet de présenter sous une forme générale différents types de géométries. Nous présentons en détail la construction des schémas (de Grothendieck) et donnons l'exemple des schémas projectifs.

Dans la troisième partie, nous introduisons les notions de valuation et de valeur absolue puis nous étudions l'espace de Riemann-Zariski (ou spectre valuatif) d'un anneau qui n'est autre que l'ensemble des valuations sur cet anneau. Nous montrons que c'est un espace « spectral », et en particulier qu'il est « quasi-compact ».

Dans la quatrième partie, nous étendons les constructions précédentes au cas où les anneaux sont munis d'une topologie. Cela donne naissance aux notions de schéma formel (de Grothendieck encore), d'espace adique (de Huber) et d'espace ana-

4. `http://math.univ-lille1.fr/~ramero/CoursAG.pdf`

lytique (de Berkovich). Nous devrons malheureusement passer sous silence certaines démonstrations afin d'arriver au bout de la présentation.

Tout au long du cours, un certain nombre de rappels sont donnés sans démonstration : on s'attend à ce que l'élève vérifie systématiquement toutes ces affirmations. Il s'assurera aussi de la validité des exemples proposés. Et il sera bien avisé de faire tous les exercices. Certains consistent en des vérifications élémentaires de résultats qui seront utilisés par la suite. D'autres sont des applications immédiates de la théorie. J'insiste sur le fait qu'il faudra vérifier toutes les assertions énoncées et non démontrées au fur et à mesure que le cours se déroule. On pourra même avantageusement anticiper sur les rappels – car ceux-ci ne seront pas développés en cours – en accédant au cours en avance. La consultation d'ouvrage, la recherche en ligne, les discussions avec les camarades et les requêtes auprès de l'enseignant pourront être mises à profit afin de résoudre certains exercices ou de comprendre certaines démonstrations.

1. Catégories et foncteurs

Pour les puristes, on fixe un *univers* et on appelle *collection* un ensemble d'éléments de notre univers qui n'appartient pas nécessairement lui même à cet univers (voir [Kri07] par exemple). Cela permet de réserver le terme d'*ensemble* pour désigner ceux qui appartiennent à notre univers (ceux qu'on appelle habituellement les petits ensembles). En première lecture, on pourra remplacer partout « collection » par « ensemble » et négliger l'épithète « petit » lorsqu'il apparaît plus bas. Le lecteur qui voudra en savoir plus pourra regarder les premières pages de [KS06] par exemple.

1.1 Catégorie

Définition 1.1.1 Une *catégorie* est la donnée

1. d'une collection d'*objets* $\mathcal{C}$,
2. pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$, d'un ensemble de *morphismes* $\mathrm{Hom}(X, Y)$,
3. pour chaque $X \in \mathcal{C}$ d'un morphisme $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{End}(X) := \mathrm{Hom}(X, X)$,
4. pour chaque $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, d'une loi de composition

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f$$

telle que
   (a) $f \circ \mathrm{Id}_X = f$ et $\mathrm{Id}_Y \circ f = f$,
   (b) si $h \in \mathrm{Hom}(Z, T)$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

On dira *petite catégorie* si les objets forment un ensemble.

On emploiera aussi l'expression *catégorie finie* lorsque (les objets ainsi que) les morphismes forment un ensemble fini.

On écrira souvent $f : X \to Y$ au lieu de $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ et on dira que X (resp. Y) est la *source* (resp. le *but*) de f. Notons que l'*identité* Id_X est uniquement déterminée par les conditions (4a).

On fera l'abus de nommer une catégorie par le nom $\mathcal{C}$ de la collection sous-jacente mais il ne faut pas oublier qu'il y a aussi des morphismes et une loi de composition.

Rappel 1.1.2 Une *relation* dans un ensemble X est un sous-ensemble $\mathcal{R} \subset X \times X$ et on écrit $x\mathcal{R}y$ pour $(x, y) \in \mathcal{R}$. On dispose toujours de la relation opposée $\mathcal{R}^{\mathrm{op}}$ obtenue en échangeant les facteurs. La relation est dite

1. *réflexive* si $\forall x \in X, x\mathcal{R}x$,
2. *transitive* si $\forall x, y, z \in X, (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$,
3. *symétrique* si $\forall x, y \in X, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,
4. *antisymétrique* si $\forall x, y \in X, (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$,
5. *filtrante* si $\forall x, y \in X, \exists z \in X, x\mathcal{R}z$ et $y\mathcal{R}z$.
6. *totale* si $\forall x, y \in X, x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

Une relation de *préordre* est une relation réflexive et transitive. C'est une relation d'*équivalence* (resp. d'*ordre*[a]) si elle est aussi symétrique (resp. antisymétrique). On peut remarquer que les trois première propriétés sont stables par conjonction (c'est à dire intersection). Il existe donc toujours une plus petite relation d'équivalence prolongeant (c'est à dire contenant) une relation donnée.

Une application $f : X \to Y$ est *compatible* avec des relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ dans X et Y si

$$\forall x, y \in X, \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x)\mathcal{S}f(y)$$

(c'est à dire $(f \times f)(\mathcal{R}) \subset \mathcal{S}$). On dit *application croissante*[b] lorsque $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des relations d'ordre.

Si $f : X \to Y$ est une application quelconque, on peut toujours considérer l'*image (directe)* (resp. l'*image réciproque*) par f (c'est à dire par $f \times f$) d'une relation sur X (resp. sur Y). L'image réciproque d'une relation de préordre ou d'équivalence est encore une relation de préordre ou d'équivalence. En particulier, l'image inverse de l'égalité est une relation d'équivalence. En fait, toute relation d'équivalence $\sim$ est image inverse de l'égalité par une application surjective $\pi : X \twoheadrightarrow X/\sim$ (on dit que $X/\sim$ est le *quotient* de X par $\sim$). Si $\leq$ est une relation de préordre sur X, alors la relation d'équivalence engendrée par $\leq$ est donnée par

$$x \sim y \Leftrightarrow (x \leq y \text{ et } y \leq x)$$

et l'image de la relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $X/\sim$.

a. *Partial order* en anglais
b. *Order preserving* en anglais.

Rappel 1.1.3 Un *monoïde* est un ensemble G muni d'une loi de composition interne qui est

1. *associative* : $\forall g, h, k \in G, \quad (gh)k = g(hk)$ et
2. *unitaire* : $\exists 1 \in G, \forall g \in G, \quad 1g = g1 = g$.

Un *homomorphisme* de monoïdes est une application $\varphi : G \to H$ qui préserve les produits finis (y compris le produit vide). Un *sous-monoïde* est une partie stable par produits finis. Toute intersection de sous-monoïdes est un monoïde et on peut donc toujours considérer le sous-monoïde engendré par une partie. Un homomorphisme $\varphi : G \to H$ induit une bijection entre les sous-monoïdes de G contenant le *noyau* $\ker \varphi := \{g \in G \ / \ \varphi(g) = 1\}$ et les sous-monoïdes de H contenus dans l'*image* $\operatorname{im} \varphi := \{\varphi(g) \ / \ g \in G\}$. Si G est un monoïde, le *monoïde opposé* est le monoïde G^{op} qui a les même éléments que G mais avec la multiplication dans l'autre sens. Le monoïde G est *commutatif* ou *abélien* si $G^{\mathrm{op}} = G$. Si X est un ensemble, alors l'ensemble $\mathcal{F}(X)$ des applications de X dans X est un monoïde pour la composition. Si X est un ensemble et G un monoïde, alors l'ensemble $\mathcal{F}(X, G)$ des applications de X dans G est un monoïde pour la loi image $(\varphi\psi)(x) = \varphi(x)\psi(x)$. Un élément g d'un monoïde G est *régulier* (resp. *inversible*) si la multiplication par g est injective (resp. bijective) à gauche et à droite. Un monoïde est *intègre* (resp. un *groupe*) si tous les éléments sont réguliers (resp. inversibles). Si M et N sont deux groupes abéliens, alors l'ensemble $\operatorname{Hom}(M, N)$ de tous les homomorphismes de M dans N est un sous-groupe de $\mathcal{F}(M, N)$.

Rappel 1.1.4 Une *topologie* sur un ensemble X est un ensemble $\mathcal{U}$ de parties de X dites *ouvertes* qui est stable par union quelconque (y compris vide) et intersection finie (y compris vide). Un ensemble d'ouverts $\mathcal{B}$ est une *base* pour la topologie de X si tout ouvert est réunion d'ouverts de $\mathcal{B}$. Les topologies sur un ensemble donné sont ordonnées par inclusion. L'ensemble des topologies est stable par intersection et on peut donc toujours considérer la topologie engendrée par un ensemble de parties. On dit qu'une topologie est *moins fine* si elle est contenue dans l'autre. Il existe une topologie plus fine (resp. moins fine) que toutes les autres : la topologie *discrète* (resp. *grossière*). Le complémentaire d'une partie ouverte est une partie *fermée*. Il existe toujours un plus petit fermé (resp. plus grand ouvert) contenant une partie Y donnée : c'est son *adhérence* $\overline{Y}$ (resp. son *intérieur*). Une partie Y est *dense* dans X si $\overline{Y} = X$. Une application entre deux espaces topologiques est *continue* si l'image inverse d'un ouvert (resp. fermé) est ouverte (resp. fermée).

Exemples

1. Si $\leq$ est un préordre sur un ensemble X, on notera $\mathbf{X}$ la catégorie dont les objets sont les $x \in X$ avec un unique morphisme $x \to y$ si $x \leq y$ et aucun sinon. On obtient ainsi toutes les petites catégories dont les Hom ont au plus un élément.
2. Comme cas particulier, on peut toujours munir un ensemble de la relation d'égalité et voir un ensemble comme une catégorie.
3. L'entier naturel $n := \{0, \ldots, n-1\}$ est un ensemble ordonné et on notera $\mathbf{n}$ la catégorie correspondante. Par exemple, $\mathbf{0}$ est la catégorie vide qui n'a pas d'objets (et pas de morphisme), $\mathbf{1}$ est une catégorie qui a exactement un morphisme (et un objet) et $\mathbf{2}$ est une catégorie avec un unique morphisme entre deux objets distincts, ainsi que les identités.
4. Si X est un espace topologique, alors l'ensemble $\operatorname{Ouv}(X)$ des ouverts de X est ordonné par inclusion et on notera $\mathbf{O}\mathrm{uv}(X)$ la catégorie correspondante. C'est un exemple fondamental pour nous.
5. On notera $\mathbf{E}$ns la catégorie dont les objets sont les ensembles et les morphismes sont les applications. Ce n'est pas une petite catégorie. On notera $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble de toutes les applications de X vers Y.

6. De même, on notera **Top** la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes sont les applications continues. On notera $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble de toutes les applications continues de X vers Y.
7. Enfin, on désignera par **Ab** la catégorie dont les objets sont les groupes abéliens et les morphismes sont les homomorphismes de groupes. La notation $\mathrm{Hom}(M, N)$ est alors standard pour l'ensemble des morphismes entre deux groupes abéliens.
8. Si G est un monoïde, on peut considérer la catégorie $\mathbf{G}$ qui a un seul objet, disons 0, avec $\mathrm{End}(0) = G$ et la composition est donnée par la loi de G. On trouve ainsi essentiellement toute les catégories qui ont un unique objet.

Rappel 1.1.5 Un *anneau (associatif unitaire)* est un groupe abélien A muni d'un homomorphisme de groupes abéliens $A \to \mathrm{End}_{\mathrm{Ab}}(A), a \mapsto (b \mapsto ab)$ qui induit une loi de monoïde sur A. Un *homomorphisme d'anneaux* est une application qui est un homomorphisme pour les deux lois. Un *sous-anneau* est une partie qui est à la fois un sous-groupe de $(A, +)$ et sous-monoïde de $(A, \times)$ (on dit aussi *partie multiplicative de* A). Si M est un groupe abélien, alors $\mathrm{End}_{\mathrm{Ab}}(M)$ est un anneau pour la composition. Si G est un monoïde, un *G-ensemble* est un ensemble X muni d'un homomorphisme de monoïdes $G \to \mathcal{F}(X), g \mapsto (x \mapsto gx)$. On définit les notions de *G-morphisme* et de *sous-G-ensemble* de la manière habituelle (exercice). Si A est un anneau, un *A-module (à gauche)* est un groupe abélien M muni d'un homomorphisme d'anneaux $A \to \mathrm{End}_{\mathrm{Ab}}(M), a \mapsto (x \mapsto ax)$. On définit les notions de *A-morphisme* et de *sous-A-module* de la manière habituelle (exercice). Au lieu de A-morphisme, on dit aussi *application A-linéaire*. On définit comme d'habitude le sous-A-module engendré par une partie et on dit que M est *de type fini* s'il est engendré par une partie finie. Un *idéal (à gauche)* $\mathfrak{a}$ de A est un sous-A-module de A. Un *A-module à droite* est un A^{op} module (à gauche). Si k est un anneau commutatif, une *k-algèbre (associative unitaire)* est un k-module A muni d'une application k-bilinéaire $A \times A \to A$ (les applications partielles sont k-linéaires) qui fait de A un anneau (associatif unitaire).

Exercice 1.1 Définir les catégories **Mon**, **Gr**, **Ann**, G-**Ens**, A-**Mod** et k-**Alg** des monoïdes, des groupes, des anneaux, des G-ensembles, des A-modules et des k-algèbres.

Le *produit* $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ de deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est naturellement une catégorie (tout se fait terme à terme).

La *catégorie opposée* à une catégorie $\mathcal{C}$ est la catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ qui a les mêmes objets que $\mathcal{C}$ mais avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ (et la composition qui se fait dans l'autres sens). On a $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$.

Exercice 1.2 Montrer que si $\mathcal{C}$ est une catégorie, on dispose d'une catégorie $\mathbf{Mor}(\mathcal{C})$ définie comme suit : un objet est un morphisme de $\mathcal{C}$ et un morphisme de $f : X \to Y$ dans $g : X' \to Y'$ est une paire de morphismes de $\mathcal{C}$, $\varphi : X \to X'$ et $\psi : Y \to Y'$, tels que $g \circ \varphi = \psi \circ f$.

Exercice 1.3 Montrer que si $\mathcal{C}$ est une catégorie et X un objet de $\mathcal{C}$, on dispose d'une catégorie ${}_{X\backslash}\mathcal{C}$ (des X-*objets* de $\mathcal{C}$) définie comme suit : un objet de ${}_{X\backslash}\mathcal{C}$ est un morphisme $f : X \to Y$ et un morphisme de $f : X \to Y$ dans $g : X \to Z$ est un morphisme $h : Y \to Z$ tel que $h \circ f = g$. Expliciter la catégorie $\mathcal{C}_{/X} := ({}_{X\backslash}\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ (des *objets de* $\mathcal{C}$ *au dessus* de X). Par exemple, dans **T**op, un objet X au dessus de B est un *fibré* [a] ou une *fibration*.

a. Bundle en anglais.

Définition 1.1.6 Dans une catégorie $\mathcal{C}$,

1. une *section* (resp une *rétraction*) d'un morphisme $f : X \to Y$ est un morphisme $g : Y \to X$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ (resp. $g \circ f = \mathrm{Id}_X$).
2. un *isomorphisme* est un morphisme qui possède à la fois une section et une rétraction. S'il existe un isomorphisme $X \to Y$, on dit que X et Y sont *isomorphes* et on écrit $X \simeq Y$.

Une rétraction est une section dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ et réciproquement. Plus généralement, toutes les notions possèdent une notion duale obtenue en appliquant la même définition mais dans la catégorie opposée.

Proposition 1.1.7 Si f est un isomorphisme, il possède une unique section et une unique rétraction et celles-ci coïncident.

Démonstration. En effet, si $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ et $h \circ f = \mathrm{id}_X$, alors

$$h = h \circ \mathrm{id}_Y = h \circ f \circ g = \mathrm{id}_X \circ g = g. \qquad \blacksquare$$

L'unique section/rétraction d'un isomorphisme f est son *inverse* et se note f^{-1}.

Exercice 1.4 Qu'est-ce qu'un isomorphisme dans **E**ns, dans **T**op, dans **A**b, etc. ? Dans **X** si X est un ensemble préordonné ?

On dit parfois *automorphisme* pour isomorphisme entre X et lui même (c'est à dire endomorphisme + isomorphisme).

Définition 1.1.8 Une *sous-catégorie* d'une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée

1. d'une sous-collection $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$,
2. pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$, d'un sous-ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, tel que
   (a) si $X \in \mathcal{C}'$, alors $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}'}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, X)$,
   (b) si $X, Y, Z \in \mathcal{C}'$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, Z)$, alors $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Z)$

C'est une *sous-catégorie pleine* si

$$\forall X, Y \in \mathcal{C}', \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Une sous-catégorie devient automatiquement une catégorie avec la loi induite. Une sous-catégorie pleine est uniquement déterminée par ses objets.

Exemples 1. **A**b est une sous-catégorie pleine de **G**r qui est une sous-catégorie pleine de **M**on qui est une sous-catégorie *non*-pleine de celle des semi-groupes ou des magmas).

2. Si X est un espace topologique, alors $\mathbf{O}\mathrm{uv}(X)$ est une sous-catégorie de $\mathbf{E}\mathrm{ns}$ qui n'est *pas* pleine.
3. $\mathbf{T}\mathrm{op}$ n'est *pas* une sous catégorie de $\mathbf{E}\mathrm{ns}$, et $\mathbf{A}\mathrm{b}$ non plus.

1.2 Foncteur

Définition 1.2.1
1. Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ entre deux catégories est la donnée pour tout $X \in \mathcal{C}$ d'un $F(X) \in \mathcal{C}'$ et pour tout $f : X \to Y$ d'un $F(f) : F(X) \to F(Y)$, de telle sorte que l'on ait toujours $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ et $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.
2. Si $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ est un autre foncteur, leur *composé* est le foncteur $G \circ F$ donné par $(G \circ F)(X) = G(F(X))$ et $(G \circ F)(f) = G(F(f))$.

On désignera par $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ la collection de tous les foncteurs $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$. On décrira souvent un foncteur par ses valeurs sur les objets, laissant le lecteur imaginer ce qui se passe sur les morphismes.

On dispose toujours du foncteur identité $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ qui ne change rien. On dira qu'un foncteur F est un *isomorphisme* s'il existe un foncteur G tel que $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ et $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ (c'est une condition trop forte et peu usitée).

Un foncteur $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}'$ s'appelle parfois un *foncteur contravariant* de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ (et ce que nous appelons foncteur s'appelle alors *foncteur covariant*). Tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ induit un foncteur $F^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}'^{\mathrm{op}}$ et cette construction est fonctorielle : $(G \circ F)^{\mathrm{op}} = G^{\mathrm{op}} \circ F^{\mathrm{op}}$.

Exemples
1. On dispose du foncteur d'oubli de la topologie (et de la continuité) $\mathbf{T}\mathrm{op} \to \mathbf{E}\mathrm{ns}$ (ou foncteur ensemble sous-jacent). Dans l'autre sens, on dispose de deux foncteurs $X \mapsto X^{\mathrm{disc}}$ et $X \mapsto X^{\mathrm{gros}}$ en munissant un ensemble X de la topologie discrète (maximale) ou de la topologie grossière (minimale).
2. On dispose du foncteur d'oubli de la structure algébrique $\mathbf{A}\mathrm{b} \to \mathbf{E}\mathrm{ns}$ (ou foncteur ensemble sous-jacent) et dans l'autre sens, du foncteur $X \mapsto \mathbb{Z} \cdot X$ qui associe à un ensemble le *groupe abélien libre*
$$\mathbb{Z} \cdot X := \left\{ \sum_{\text{finie}} n_x x \ : \ n_x \in \mathbb{Z}, x \in X \right\}.$$
3. On dispose du foncteur d'inclusion de $\mathbf{A}\mathrm{b} \hookrightarrow \mathbf{G}\mathrm{r}$ ainsi que du foncteur d'abélianisation $G \mapsto G^{\mathrm{ab}} = G/[G, G]$ dans l'autres sens.
4. Les petites catégories et les foncteurs entre elles forment une catégorie que l'on notera $\mathbf{C}\mathrm{at}$ et on dispose d'un foncteur (contravariant)
$$\mathbf{T}\mathrm{op}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{C}\mathrm{at}, \quad X \mapsto \mathbf{O}\mathrm{uv}(X), \quad u \mapsto u^{-1}.$$

Exercice 1.5 Quels sont les analogues (foncteurs libres) du foncteur « groupe abélien libre » $X \mapsto \mathbb{Z} \cdot X$ pour les catégories $\mathbf{M}\mathrm{on}$, $\mathbf{G}\mathrm{r}$, $\mathbf{A}\mathrm{nn}$, G-$\mathbf{E}\mathrm{ns}$, A-$\mathbf{M}\mathrm{od}$ et k-$\mathbf{A}\mathrm{lg}$.

Exercice 1.6 Montrer que le centre d'un groupe n'est pas fonctoriel : un homomorphisme de groupes $\varphi : G \to H$ n'induit pas nécessairement un morphisme de groupes abéliens $Z(G) \to Z(H)$.

Exercice 1.7 Montrer que les catégories $\mathbb{Z}$-$\mathbf{Mod}$ et $\mathbf{Ab}$ sont isomorphes. Même chose avec les catégories $\mathbb{Z}$-$\mathbf{Alg}$ et $\mathbf{Ann}$, et plus généralement, avec k-$\mathbf{Alg}$ et une sous-catégorie pleine de ${}_{k\backslash}\mathbf{Ann}$ (l'image de k doit être dans le centre).

Étant données deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, les projections de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont fonctorielles. Il en va de même de toutes les applications partielles $\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ ou $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie quelconque, on dispose toujours du (bi-)foncteur

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}, \quad (X,Y) \mapsto \mathrm{Hom}(X,Y)$$

qui envoie (f,g) sur l'application $h \mapsto g \circ h \circ f$. En composant avec les applications partielles, on obtient les foncteurs

$$h^X : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}, \quad Y \mapsto \mathrm{Hom}(X,Y)$$

et

$$h_Y : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}, \quad X \mapsto \mathrm{Hom}(X,Y).$$

Exercice 1.8 Définir les foncteurs source et but $\mathbf{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ ainsi que les foncteurs d'oublis ${}_{X\backslash}\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_{/X} \to \mathcal{C}$.

Exercice 1.9 On désigne par $\mathbf{Op}(\mathcal{C}) \subset \mathbf{Mor}(\mathcal{C})$ la sous-catégorie des objets et morphismes pour lesquels source et but coïncident (objets à opérateur). Montrer que, si k est un anneau, alors $\mathbf{Op}(k\text{-}\mathbf{Mod}) \simeq k[T]\text{-}\mathbf{Mod}$.

Définition 1.2.2
1. Si $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ sont deux foncteurs, une *transformation naturelle* $\alpha : F \Rightarrow G$ est la donnée pour tout $X \in \mathcal{C}$ d'un morphisme $\alpha_X : F(X) \to G(X)$ tel que pour tout $f : X \to Y$, on ait $\alpha_Y \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_X$. On dira *isomorphisme naturel* si tous les α_X sont des isomorphismes.
2. Si $\beta : G \Rightarrow H$ est une autre transformation naturelle, leur *composée* $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow H$ est la transformation naturelle définie par $(\beta \circ \alpha)_X = \beta_X \circ \alpha_X$ pour $X \in \mathcal{C}$.

On désignera par $\mathrm{Hom}(F,G)$ la collection de toutes les transformations naturelles de F vers G. Si $\mathcal{C}$ est une petite catégorie et $\mathcal{C}'$ une catégorie quelconque, alors les foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ forment une catégorie que l'on désigne par $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ avec les transformations naturelles pour morphismes. On vérifie que les isomorphismes sont bien les isomorphismes naturels définis précédemment.

Exemples
1. On obtient une transformation naturelle en considérant $\det_A : \mathrm{GL}_n(A) \to A^\times$ (entre foncteurs des anneaux commutatifs vers les groupes). C'est un isomorphisme naturel pour $n = 1$.
2. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie quelconque, on a des isomorphismes $\mathbf{Hom}(\mathbf{0}, \mathcal{C}) \simeq \mathbf{1}$ et $\mathbf{Hom}(\mathbf{1}, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$.

Exercice 1.10 Montrer que $\mathbf{Hom}(\mathbf{2}, \mathcal{C}) \simeq \mathbf{Mor}(\mathcal{C})$.

Définition 1.2.3 Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est

1. *fidèle* (resp. *plein*, resp. *pleinement fidèle*) si pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$, l'application

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(F(X), F(Y)), \quad f \mapsto F(f)$$

est injective (resp. surjective, resp. bijective).
2. *essentiellement surjectif* si pour tout $X' \in \mathcal{C}'$, il existe $X \in \mathcal{C}$ tel que $X' \simeq F(X)$.
3. une *équivalence de catégorie* s'il existe $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ tel que $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}'} \simeq F \circ G$ et $G \circ F \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$.

L'inclusion d'une sous-catégorie (resp. d'une sous-catégorie pleine) est un foncteur fidèle (resp. pleinement fidèle). On précisera éventuellement s'il s'agit d'un isomorphisme mais on ne parlera désormais que d'*équivalence* de catégories.

Exercice 1.11 Montrer que les foncteurs d'oubli $\mathbf{Top} \to \mathbf{Ens}$ et $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Ens}$ sont fidèles mais pas pleinement fidèles. Montrer que les foncteurs d'oubli $\mathbf{Ann} \to \mathbf{Ab} \times \mathbf{Mon}$ et $k\text{-}\mathbf{Ann} \to k\text{-}\mathbf{Mod} \times \mathbf{Ann}$ sont pleinement fidèles.

Exercice 1.12 Montrer que l'on dispose d'un foncteur pleinement fidèle $X \mapsto \mathbf{X}$ des ensembles préordonnés vers les petites catégories.

Exercice 1.13 (voir exercice 2.23 plus bas) Montrer que le foncteur d'oubli des variétés analytiques différentiables réelles vers les variétés k-différentiables réelles avec $k \geq 1$ est essentiellement surjectif et fidèle mais n'est pas pleinement fidèle. Montrer la pleine fidélité dans le cas complexe.

Exercice 1.14 Montrer que si $F \simeq G$, alors F est fidèle (resp. plein, resp. pleinement fidèle, essentiellement surjectif, une équivalence de catégorie) si et seulement si G l'est.

Théoreme 1.2.4 Un foncteur est une équivalence de catégories si et seulement s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

Démonstration. Pour montrer que la condition est nécessaire, on remarque d'abord que F sera bien évidemment essentiellement surjectif puisqu'on pourra toujours écrire $X' \simeq F(X)$ avec $X := G(X')$. On considère ensuite la suite d'applications

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$$

$$\xrightarrow{G} \mathrm{Hom}(G(F(X)), G(F(Y))) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}(F(G(F(X))), F(G(F(Y))))$$

Puisque $G \circ F$ et $F \circ G$ sont pleinement fidèles, toutes ces applications sont nécessairement bijectives et F est pleinement fidèle. Pour montrer que la condition est suffisante, on *choisit*[1] pour chaque $X' \in \mathcal{C}'$ un objet $X \in \mathcal{C}$ et un isomorphisme $\alpha_{X'} : X' \simeq F(X)$ et on pose $G(X') := X$. Puisque le foncteur F est pleinement

1. Il s'agit ici de l'axiome du choix dans une collection qui n'est pas nécessairement un ensemble (de notre univers).

fidèle, il existe pour chaque $f' : X' \to Y'$ un unique $f : G(X') \to G(Y')$ tel que $F(f) = \alpha_Y \circ f' \circ \alpha_X^{-1}$ et on pose $G(f') = f$. Il est facile de vérifier que G est un foncteur et nous obtenons par construction un isomorphisme $\alpha : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}'} \simeq F \circ G$. En particulier, si $X \in \mathcal{C}$, on aura un isomorphisme naturel $\alpha_{F(X)}^{-1} : F(G(F(X))) \simeq F(X)$ et comme F est pleinement fidèle, il existe un unique isomorphisme $\beta_X : (G \circ F)(X) \simeq X$ tel que $F(\beta_X) = \alpha_{F(X)}^{-1}$. Il n'est pas difficile de vérifier que β est bien une transformation naturelle. ■

Exercice 1.15 Montrer que si X est un ensemble préordonné et Y son quotient ordonné, alors les catégories $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont équivalentes.

Exercice 1.16 Montrer que si k est un anneau commutatif, alors l'ensemble $\mathbf{Mat}(k) := \mathbb{N}$ muni de $\mathrm{Hom}(m,n) = \mathrm{M}_{n\times m}(k)$ et de la multiplication des matrices est une petite catégorie. Montrer que si k est un corps, celle-ci est équivalente, mais pas isomorphe, à la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur k. Est-ce toujours vrai si k n'est pas un corps ?

1.3 Foncteur représentable

Définition 1.3.1 Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ est *représenté* par $X \in \mathcal{C}$ si $F \simeq h^X$.

En d'autres termes, on aura une bijection naturelle $\mathrm{Hom}(X,Y) \simeq F(Y)$.

Exemple Le foncteur qui associe à un espace topologique X l'ensemble $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ est représenté par la droite réelle (tautologique).

Lemme 1.3.2 — de Yoneda. Si $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ est un foncteur quelconque et $X \in \mathcal{C}$, on a une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}(h^X, F) \simeq F(X), \quad \alpha \mapsto \alpha_X(\mathrm{Id}_X).$$

Démonstration. Si on se donne $s \in F(X)$, $Y \in \mathcal{C}$ et $f : X \to Y$, on pose $\alpha_Y(f) := F(f)(s)$. On vérifie que ce morphisme est bien naturel, c'est à dire que

$$\alpha_Z \circ h^X(g) = F(g) \circ \alpha_Y$$

si $g : Y \to Z$. En effet, on a bien

$$\alpha_Z(g \circ f) = F(g \circ f)(s) = (F(g) \circ F(f))(s) = (F(g)(F(f)(s)) = F(g)(\alpha_Y(f)).$$

Il suffit ensuite de s'assurer que l'on a défini un inverse. ■

Exercice 1.17 Montrer que si $\mathcal{C}$ est une petite catégorie, le foncteur

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Hom}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens}), \quad X \mapsto h^X$$

est pleinement fidèle. En déduire que $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (resp. $\mathcal{C}$) est équivalente à la sous-catégorie pleine formées des foncteurs représentables sur $\mathcal{C}$ (resp. sur $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$).

Exercice 1.18 Montrer que si un foncteur F est représenté par X et X', alors $X \simeq X'$.

Définition 1.3.3 Soit $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur, $X \in \mathcal{C}$ et $s \in F(X)$. Si pour tout $Y \in \mathcal{C}$ et tout $t \in F(Y)$, il existe un unique $f : X \to Y$ tel que $F(f)(s) = t$, on dit que (X, s) est *universel* pour F (ou universel pour les (Y, t) avec $Y \in \mathcal{C}$ et $t \in F(Y)$).

On peut remarquer que (X, s) est alors unique à unique isomorphisme près : si F est aussi représenté par X' via s', alors il existe un unique isomorphisme $f : X' \simeq X$ tel que $F(f)(s') = s$.

Exemples
1. Si k est un anneau commutatif, le couple $(k[t], t)$ est universel pour les couples (A, a) ou A est une k-algèbre et $a \in A$: si on se donne $a \in A$, il existe un unique morphisme de K-algèbres $\varphi : k[t] \to A$ tel que $\varphi(t) = a$.
2. Si Y est une partie d'un espace topologique X, alors Y muni de la topologie induite, est universel pour les applications continues $f : Z \to X$ telles que $f(Z) \subset Y$.

Proposition 1.3.4 Si (X, s) et (X', s') sont tous les deux universels pour F, il existe un unique isomorphisme $X \simeq X'$ tel que $s \leftrightarrow s'$.

Démonstration. Il existe $f : X \to X'$ tel que $F(f)(s) = s'$ et $g : X \to Y$ tel que $F(f)(s') = s$. Il suit que $g \circ f : X \to X$ satisfait $F(g \circ f)(s) = s$ et donc, par unicité que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. De même, $f \circ g = \mathrm{Id}_{X'}$ ■

Proposition 1.3.5 Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ est représenté par $X \in \mathcal{C}$ si et seulement s'il existe $s \in F(X)$ tel que (X, s) soit universel pour F.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme de Yoneda : dire que F est représentable signifie qu'il existe une transformation naturelle $\alpha : h^X \to F$ qui est un isomorphisme. Cet α correspond à un $s \in F(X)$ et la condition exprime bien que α_Y est toujours bijectif puisque nécessairement $F(f)(s) = \alpha_Y(f)$. ■

Exemple Si k est un anneau commutatif, le foncteur d'oubli k-$\mathbf{Alg} \to \mathbf{Ens}$ est représenté par l'anneau des polynômes $k[t]$. Cela signifie qu'on a une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[t], A) \simeq A$$

(donnée par $\varphi \mapsto \varphi(t)$).

Exercice 1.19 Montrer que les autres foncteurs oubli à valeur dans $\mathbf{Ens}$ sont aussi représentables.

Rappel 1.3.6 Si A est un anneau, le *produit tensoriel* d'un A module à droite M par un A module à gauche N est défini comme étant le quotient $M \otimes_A N$ du groupe abélien libre $\mathbb{Z} \cdot (M \times N)$ par toutes les relations

1. $\forall m \in M, n, n' \in N, \quad (m, n+n') = (m,n) + (m,n')$,
2. $\forall m, m' \in M, n \in N, \quad (m+m', n) = (m,n) + (m', n)$,
3. $\forall a \in A, m \in M, n \in N, \quad (ma, n) = (m, an)$.

On note $m \otimes n$ l'image de (m,n) dans $M \otimes_A N$. Si k est un anneau commutatif et M, N deux k-modules, on munit $M \otimes_k N$ d'une structure de k-module en posant $a(m \otimes n) = am \otimes n$. Si A et B sont deux k-algèbres, on munit $A \otimes_k B$ d'une structure de k-algèbre en posant $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$.

Exercice 1.20 Montrer que le produit tensoriel $(M, N) \mapsto M \otimes_A N$ (resp. $(M, N) \mapsto M \otimes_k N$) est universel pour les applications $\mathbb{Z}$-bilinéaires (resp. k-bilinéaires).

Exercice 1.21 On se donne un anneau commutatif k et des polynômes $f_1, \ldots, f_r \in k[t_1, \ldots, t_n]$. Montrer que le foncteur qui associe à une k-algèbre commutative A, l'ensemble

$$\mathcal{S}(A) := \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \ / \ f_1(a_1, \ldots, a_n) = \cdots = f_r(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$$

des solutions à valeurs dans A, est représentable.

1.4 Limite

Définition 1.4.1 Soit I une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque. Un *diagramme (commutatif)* de *base* I dans $\mathcal{C}$ est un foncteur $D : I \to \mathcal{C}$.

Un diagramme de base I dans $\mathcal{C}$ est donc la donnée pour tout $i \in I$ d'un objet X_i et pour tout $\alpha : i \to j$ d'un morphisme $f_\alpha : X_i \to X_j$, ceux-ci étant sujets aux conditions $f_{\beta \circ \alpha} = f_\beta \circ f_\alpha$ et $f_{\mathrm{Id}_i} = \mathrm{Id}_{X_i}$

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "f_\alpha"] \arrow[dr, "f_{\beta\circ\alpha}"'] & & X_j \arrow[dl, "f_\beta"] \\ & X_k & \end{tikzcd}$$

On dira parfois que c'est le diagramme $(f_\alpha : X_i \to X_j)$ ou (X_i, f_α).

On désignera la catégorie des diagrammes de base I dans $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}^I := \mathbf{Hom}(I, \mathcal{C})$. Par composition, tout foncteur $\lambda : I \to J$ entre petites catégories va fournir un foncteur $\lambda^* : \mathcal{C}^J \to \mathcal{C}^I$ (et cette construction est fonctorielle).

En particulier, si I est une petite catégorie, l'unique foncteur $I \to \mathbf{1}$ fournit un foncteur *diagramme constant*

$$\_ : \mathcal{C} \simeq \mathcal{C}^{\mathbf{1}} \to \mathcal{C}^I, \quad X \mapsto \underline{X}.$$

Définition 1.4.2 Un diagramme D de *base* I dans une catégorie $\mathcal{C}$ a pour *limite*

$X \in \mathcal{C}$ si l'on a un isomorphisme naturel (en Y)

$$\mathrm{Hom}(\underline{Y}, D) \simeq \mathrm{Hom}(Y, X).$$

On dira *limite finie* si I est finie.

Cela signifie que le foncteur composé $h_D \circ \_$ est représentable par X dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. En d'autres termes, un diagramme (X_i, f_α) a pour limite X si et seulement s'il existe pour tout $i \in I$ un morphisme $p_i : X \to X_i$ tel que pour tout $\alpha : i \to j$, on ait $p_j = f_\alpha \circ p_i$ et que si on se donne un objet $Y \in \mathcal{C}$ muni, pour tout $i \in I$ d'un morphisme $g_i : Y \to X_i$ satisfaisant pour tout $u : i \to j$, $g_j = f_\alpha \circ g_i$, alors il existe un unique morphisme $g : Y \to X$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $g_i = p_i \circ g$:

$$\begin{tikzcd}
 & & X_i \arrow[dd, "f_\alpha"] \\
Y \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[urr, bend left, "g_i"] \arrow[drr, bend right, "g_j"'] & X \arrow[ur, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\
 & & X_j
\end{tikzcd}$$

La limite d'un diagramme D n'est définie qu'à (unique) isomorphisme près si elle existe mais nous la noterons tout de même $\varprojlim D$ (on peut aussi dire que c'est *une* limite). Une limite dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ s'appelle une *colimite* dans $\mathcal{C}$ et se note $\varinjlim$. On dit aussi limite inverse (resp. directe), limite projective (resp. inductive) ou limite à gauche (resp. à droite) au lieu de limite (resp. colimite). Pour mémoire, on rappelle donc que

$$\mathrm{Hom}(\underline{Y}, D) \simeq \mathrm{Hom}(Y, \varprojlim D) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}(\varinjlim D, Y) \simeq \mathrm{Hom}(D, \underline{Y}).$$

Exercice 1.22 Expliciter la notion de colimite.

Exemples

1. La (ou une) limite du diagramme vide $\mathbf{0} \to \mathcal{C}$ est ce qu'on appelle l'objet (ou un objet) *final* $1_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ (s'il existe) : si $X \in \mathcal{C}$, il existe un unique morphisme $X \to 1_{\mathcal{C}}$. Dualement, on trouve l'objet *initial* $0_{\mathcal{C}}$.
   Dans **Ens**, l'objet initial est $\emptyset$ et l'objet final est $\{0\}$ (défini à unique bijection près). Même chose dans **Top**. Dans **Ab**, $\{0\}$ est à la fois l'objet initial et l'objet final.
2. La limite d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ (sans morphismes à part les identités) est appelée *produit* et notée $\prod_{i\in I} X_i$. Quand tous les X_i sont égaux à un même X, on parle de *puissance* X^I. La colimite est appelée *coproduit* et notée $\coprod_{i\in I} X_i$, ou *copuissance* notée (parfois) $X^{(I)}$. Notons que l'objet final (resp. initial) n'est autre que le produit (resp. coproduit) vide.
   Dans **Ens** le produit est le produit habituel et le coproduit est l'union disjointe. Dans **Top**, c'est le même ensemble avec la topologie la moins fine (resp. plus fine) rendant les projections (resp. injections) continues. Dans **Ab**, le produit [2] est le produit ensembliste muni de l'unique structure de groupe abélien telle que les projections soient des homomorphismes et le coproduit est la somme directe munie de la structure induite (la somme directe est identique au produit si I est fini).

2. Attention, ce qu'on appelle *produit libre* est le coproduit dans la catégorie des groupes.

3. Si X est la limite du diagramme $(X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \xleftarrow{f_2} X_2)$, on dit que le carré

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"] & X_0 \end{tikzcd}$$

est *cartésien* ou que X est le *produit fibré* de X_1 et X_2 au dessus de X_0 et on écrit $X = X_1 \times_{X_0} X_2$. On dispose de même des notions de carré *cocartésien* et de *coproduit fibré* que l'on note $X_1 \sqcup_{X_0} X_2$. Notons qu'un produit (resp. coproduit) de deux objets n'est autre qu'un produit fibré (resp. coproduit fibré) au dessus de l'objet final (resp. initial) si celui-ci existe.
Dans **E**ns, on aura

$$X_1 \times_{X_0} X_2 = \{(x_1, x_2) \ / \ f_1(x_1) = f_2(x_2)\} \subset X_1 \times X_2$$

et

$$X_1 \sqcup_{X_0} X_2 = (X_1 \sqcup X_2)/\sim$$

est la somme amalgamée où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par tous les $f_1(x_0) \sim f_2(x_0)$ avec $x_0 \in X_0$. Dans **T**op, on trouve la même chose avec la topologie induite (resp. quotient). Dans **A**b, le produit fibré est le produit fibré ensembliste muni de la structure induite et le coproduit fibré est le quotient (voir plus bas) du produit par l'image (voir plus bas) de X_0.
4. La limite X d'un diagramme $(Y \rightrightarrows Z)$ s'appelle un *noyau* et on dit alors que la suite

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & Y \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

est *exacte à gauche*. On écrit $X = \ker(f, g)$. Et on dispose de même des notions de *conoyau* $\operatorname{coker}(f, g)$ et de suite *exacte à droite*[3].
Dans **E**ns, on a $\ker(f, g) = \{y \in Y \ / \ f(y) = g(y)\}$ et $\operatorname{coker}(f, g) = Z/\sim$ ou $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $f(y) \sim g(y)$ pour $y \in Y$. Même chose dans **T**op. Dans **A**b, $\ker f := \ker(f, 0)$ est le *noyau* de f et on dit que la suite $0 \to X \to Y \to Z$ est *exacte à gauche* lorsque $X = \ker(Y \to Z)$. On définit de même les notions de *conoyau* $\operatorname{coker}(f)$ et de *suite exacte à droite* (voire de *suite exacte* à droite et à gauche[4]).
5. Si le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\mathrm{Id}_Y"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_Y"] & Y \arrow[d, "i"] \\ Y \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

3. On devrait dire *suite exacte* et suite *coexacte*.
4. On devrait dire *suite biexacte*.

est cartésien, on dit que Y est un *sous-objet* de X, ou que i est un *monomorphisme* et on écrit $Y \hookrightarrow X$. La notion duale est celle de *quotient* ou d'*épimorphisme* et on écrit alors $X \twoheadrightarrow Y$.
À isomorphisme près, un sous-objet d'un ensemble (resp. d'un espace topologique, resp. d'un groupe abélien) est une partie (resp. un sous-espace, resp. un sous-groupe) et un quotient d'un ensemble (resp. d'un espace topologique, d'un sous-groupe) est un quotient par une relation d'équivalence (ou par un sous-groupe dans le dernier cas). Attention cependant à ce que $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est à la fois un sous-objet *et* un quotient d'anneaux mais n'est pas un isomorphisme.

Exercice 1.23 Expliciter la plupart des limites et colimites classiques dans les catégories **Mon**, **Gr**, **Ann**, G-**Ens** et A-**Mod** et k-**Alg**.

Exercice 1.24 Montrer que le coproduit fibré dans la catégorie des anneaux commutatifs est le produit tensoriel.

Exercice 1.25 Montrer que dans un ensemble ordonné, la limite (resp. colimite) est la borne inférieure (resp. supérieure). Expliciter le cas d'un ordinal ainsi que celui des ouverts d'un espace topologique.

Exercice 1.26 La catégorie **Cat** a-t-elle un objet final ? un objet initial ? des produits finis ? des sous-objets ? Expliciter. Montrer que si $\mathcal{C}$ est une petite catégorie, alors $\mathbf{Op}(\mathcal{C})$ est le noyau des foncteurs source et but $\mathbf{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ dans **Cat**.

Exercice 1.27 Montrer qu'un morphisme $f : Y \to X$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si le foncteur induit $\mathcal{C}_{/Y} \to \mathcal{C}_{/X}$ (resp. ${}_{X\backslash}\mathcal{C} \to {}_{Y\backslash}\mathcal{C}$) est fidèle.

Exercice 1.28 L'*image* $\mathrm{im}(f)$ d'un morphisme $f : X \to Y$ est un sous-objet I de Y qui est universel pour les factorisations $f : X \to I \hookrightarrow Y$ (s'il existe). Expliciter la notion duale de *coïmage* $\mathrm{coim}(f)$. Montrer que les deux notions coïncident dans **Ens** et **Ab** mais pas dans **Top**.

Exercice 1.29 Montrer que si 1 est l'objet final et X un objet quelconque, alors le produit $1 \times X$ existe et qu'il y a un unique isomorphisme naturel $1 \times X \simeq X$. Montrer que si $X \times Y$ existe, alors le produit $Y \times X$ aussi et qu'il y a un unique isomorphisme naturel $\sigma : X \times Y \simeq Y \times X$. Même type de question avec $(X \times Y) \times Z$ et $X \times (Y \times Z)$.

Exercice 1.30 On se donne un diagramme (X_i, f_α). On suppose que $X' := \prod_i X_i$ et $X'' := \prod_{\alpha:i\to j} X_j$ existent. On désigne par p (resp. f) les applications $X' \to X''$ induites par les projections sur le but (resp. la composition de la projection sur la source et de f_α). Alors, dire que $X = \varprojlim(X_i, f_\alpha)$ signifie que la suite

$$X \longrightarrow X' \underset{f}{\overset{p}{\rightrightarrows}} X''$$

est exacte.

Exercice 1.31 Montrer que si $(f_\alpha : X_i \to X_j)$ est un diagramme d'ensembles, alors $\varinjlim X_i = \sqcup X_i / \sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par les $x_i \sim x_j$ lorsque $f_\alpha(x_i) = x_j$.

Exercice 1.32 Montrer que si on se donne $f, g : X \to Y$, on a un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \ker(f,g) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Y \times Y. \end{tikzcd}$$

Plus précisément : si le produit $Y \times Y$ existe, alors le produit fibré, s'il existe aussi, est nécessairement le noyau.

Exercice 1.33 Soit $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque.
1. Montrer que si tous les produits (finis) et les noyaux existent, alors toutes les limites (finies) existent.
2. Montrer que si tous les produits fibrés existent et qu'il existe aussi un objet final, alors toutes les limites finies existent.

Analogues pour les colimites.

Exercice 1.34 Montrer que toutes les limites et colimites existent dans **E**ns, **T**op, **A**b, etc.

Tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ fournit par composition un foncteur noté de la même manière

$$F : \mathcal{C}^I \to \mathcal{D}^I, \quad D \mapsto F(D) := F \circ D$$

En d'autres termes, on a $F(X_i, f_\alpha) = (F(X_i), F(f_\alpha))$.

Définition 1.4.3 Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur et D un diagramme de $\mathcal{C}$ tel que

$$F(\varprojlim D) \simeq \varprojlim F(D),$$

on dit que F *préserve* (ou *commute* avec) la limite de D.

Cela présuppose que la limite de D existe et implique qu'alors celle de $F(D)$ existe aussi.

Exercice 1.35 Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur.
1. Montrer que si F préserve tous les produits (finis) et les noyaux, alors F préserve toutes les limites (finies).
2. Montrer que si F préserve tous les produits fibrés et l'objet final, alors F préserve toutes les limites finies.

Analogues pour les colimites.

Exercice 1.36 Montrer que le foncteur d'oubli $\mathbf{Top} \to \mathbf{Ens}$ préserve toutes les limites et toutes les colimites et que le foncteur d'oubli $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Ens}$ préserve toutes les limites (mais pas les colimites).

Proposition 1.4.4 Un foncteur représentable $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ préserve toutes les limites.

Démonstration. On peut bien sûr supposer que $F = h^X$ avec $X \in \mathcal{C}$. Il suffit alors de voir que si D est un diagramme de $\mathcal{C}$, on a la suite de bijections

$$h^X(\varprojlim D) \simeq \operatorname{Hom}(X, \varprojlim D) \simeq \operatorname{Hom}(\underline{X}, D)$$

$$\simeq \operatorname{Hom}(\underline{\{0\}}, h^X(D)) \simeq \operatorname{Hom}(\{0\}, \varprojlim h^X(D)) \simeq \varprojlim h^X(D).$$

Seule la bijection du milieu nécessite d'être vérifié à la main : si on écrit $D =: (X_i, f_\alpha)$, se donner un morphisme $\underline{\{0\}} \to h^X(D)$ revient à se donner une famille compatible d'applications $\{0\} \to \operatorname{Hom}(X, X_i)$, c'est à dire, pour tout $i \in I$, un morphisme $g_i : X \to X_i$ avec les conditions $f_\alpha \circ g_i = g_j$, ou encore un morphisme $\underline{X} \to D$. ■

Attention : le foncteur h^X ne préserve pas les colimites. Par contre, le foncteur (contravariant) h_X transforme les colimites de $\mathcal{C}$ en limites d'ensembles. On fera l'abus d'écriture $\operatorname{Hom}(X, D) := h^X(D)$ et $\operatorname{Hom}(D, X) := h_X(D)$ et on retiendra donc que

$$\operatorname{Hom}(X, \varprojlim D) \simeq \varprojlim \operatorname{Hom}(X, D) \quad \text{et} \quad \operatorname{Hom}(\varinjlim D, X) \simeq \varprojlim \operatorname{Hom}(D, X).$$

1.5 Structure algébrique

Définition 1.5.1 Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec produits finis. Un *monoïde* de $\mathcal{C}$ est un objet G muni d'une *multiplication* $\mu : G \times G \to G$ et d'une *unité* $\epsilon : 1 \to G$ tels que $\mu \circ (\mu \times \mathrm{Id}_G) = \mu \circ (\mathrm{Id}_G \times \mu)$ et $\mu \circ (\epsilon \times \mathrm{Id}_G) = \mathrm{Id}_G = \mu \circ (\mathrm{Id}_G \times \epsilon)$ (faire un dessin). Un *morphisme de monoïdes* $G \to G'$ est un morphisme $f : G \to G'$ dans $\mathcal{C}$ tel que $f \circ \mu = \mu' \circ (f \times f)$ et $f \circ \epsilon = \epsilon'$. C'est un *groupe* s'il existe une *inversion* $\iota : G \to G$ tel que $\mu \circ (\iota, \mathrm{Id}_G) = \epsilon \circ 1 = \mu \circ (\mathrm{Id}_G, \iota)$. Il est *abélien* si $\mu \circ \sigma = \mu$ où σ est l'échange des facteurs dans $G \times G$.

Les monoïdes (resp. groupes, resp. groupes abéliens) de $\mathcal{C}$ forment une catégorie $\mathbf{Mon}(\mathcal{C})$ (resp. $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$, resp. $\mathbf{Ab}(\mathcal{C})$).

Exemple Un groupe de $\mathbf{Ens}$ est un groupe usuel. Un groupe de $\mathbf{Top}$ est un groupe topologique (avec multiplication et inversion continues). Attention : un *corps topologique* est un anneau topologique k tel que $k \setminus \{0\}$ soit un (sous-) groupe topologique. Autrement dit, on suppose aussi que l'inversion est continue.

Exercice 1.37 Une *bialgèbre* est un monoïde de la catégorie opposée à celle des k-algèbres. Montrer que $k[t]$ (resp. $k[t, 1/t]$) muni de $t \mapsto t \otimes 1 + 1 \otimes t$ (resp. $t \mapsto t \otimes t$) sont des bigèbres.

Exercice 1.38 Définir la notion d'anneau A d'une catégorie $\mathcal{C}$ avec produits finis ainsi que celles de G-ensemble, de A-module et de k-algèbre. On désignera par $\mathbf{A}\mathrm{nn}(\mathcal{C})$, G-$\mathbf{E}\mathrm{ns}(\mathcal{C})$, A-$\mathbf{M}\mathrm{od}(\mathcal{C})$ et k-$\mathbf{A}\mathrm{lg}(\mathcal{C})$ ces catégories.

Exercice 1.39 Montrer que si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des catégories avec produits finis et si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ préserve les produits finis, alors F induit un foncteur $\mathbf{G}\mathrm{r}(\mathcal{C}) \to \mathbf{G}\mathrm{r}(\mathcal{C}')$. Même chose pour $\mathbf{M}\mathrm{on}$, $\mathbf{A}\mathrm{b}$, etc.

Remarque On définit une *théorie algébrique* comme étant une petite catégorie $\mathcal{A}$ avec produits et une *structure algébrique* dans une catégorie $\mathcal{C}$ comme un foncteur $\mathcal{A} \to \mathcal{C}$ qui préserve les produits. On définit alors de manière très générale la catégorie $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ des $\mathcal{A}$-objets de $\mathcal{C}$.

1.6 Foncteur adjoint

Définition 1.6.1 Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est *adjoint* à un foncteur $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ s'il existe un isomorphisme naturel

$$\forall X \in \mathcal{C}, X' \in \mathcal{C}', \quad \mathrm{Hom}(F(X), X') \simeq \mathrm{Hom}(X, G(X')).$$

La notion duale est celle de *coadjoint* si bien que G est coadjoint à F si et seulement si F est adjoint à G.

Exemples
1. Le foncteur oubli $\mathbf{T}\mathrm{op} \to \mathbf{E}\mathrm{ns}$ possède un adjoint (topologie discrète) et un coadjoint (topologie grossière) :

$$\mathcal{C}(X^{\mathrm{disc}}, Y) \simeq \mathcal{F}(X, Y) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(X, Y) \simeq \mathcal{C}(X, Y^{\mathrm{gross}}).$$

2. Le foncteur oubli $\mathbf{A}\mathrm{b} \to \mathbf{E}\mathrm{ns}$ possède un adjoint (groupe abélien libre) :

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z} \cdot X, M) \simeq \mathcal{F}(X, M).$$

Exercice 1.40 Montrer que la plupart des foncteurs d'oubli ainsi que les foncteurs d'inclusion possèdent un adjoint, et parfois un coadjoint, que l'on décrira.

Exercice 1.41 Montrer que le foncteur $X \mapsto X \times Y$ est adjoint au foncteur $Z \mapsto \mathrm{Hom}(Y, Z)$ dans la catégorie des ensembles. Analogue dans la catégorie des petites catégories ? des groupes abéliens ?

Proposition 1.6.2 Si F_1 et F_2 sont tous deux adjoints à G, alors $F_1 \simeq F_2$.

Démonstration. En effet, ils représentent tous les deux le même foncteur. ■

Exercice 1.42 Montrer que si $F_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est adjoint à G_1 et $F_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ est adjoint à G_2 alors, $F_2 \circ F_1$ est adjoint à $G_1 \circ G_2$.

Exercice 1.43 Montrer que F est adjoint à G si et seulement s'il existe $\alpha : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$ et $\beta = F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}'}$ tels que $\beta_F \circ F(\alpha) = \mathrm{Id}_F$ et $G(\beta) \circ \alpha_G = \mathrm{id}_G$. Les morphismes α et β sont appelés *morphismes d'adjonction* (ou encore *unité* et *coünité*).

Exercice 1.44 Supposons que F est adjoint à G avec morphismes d'adjonctions α et β. Montrer que F est fidèle (resp. pleinement fidèle) si et seulement si α est un monomorphisme (resp. isomorphisme). Assertion analogue pour G ?

Exercice 1.45 Décrire les morphismes d'adjonction dans les exemples rencontrés jusqu'ici. En déduire la fidélité ou pleine fidélité des foncteurs.

Proposition 1.6.3 Toutes les limites de base I existent dans une catégorie $\mathcal{C}$ si et seulement si le foncteur $X \mapsto \underline{X}$ possède un coadjoint, et celui-ci est donné par $D \mapsto \varprojlim D$.

Démonstration. En effet, on a un isomorphisme naturel en X donné par

$$\mathrm{Hom}(\underline{X}, D) \simeq \mathrm{Hom}(X, \varprojlim D)$$

et il suffit de vérifier qu'il est aussi naturel en D. Cela résulte immédiatement de la propriété universelle des limites. ∎

Exercice 1.46 Montrer que toute adjonction entre F et G se prolonge en une adjonction sur les diagrammes de même base (disons I) :

$$\mathrm{Hom}(F(D), E) \simeq \mathrm{Hom}(D, G(E)).$$

Théoreme 1.6.4 Un foncteur qui possède un adjoint (resp. un coadjoint) préserve toutes les limites (resp. colimites).

Démonstration. On suppose que $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est adjoint à un foncteur G et on se donne un diagramme D dans $\mathcal{D}$. Si $X \in \mathcal{C}$, on dispose d'une suite d'isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}(X, G(\varprojlim D)) \simeq \mathrm{Hom}(F(X), \varprojlim D) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{F(X)}, D)$$

$$= \mathrm{Hom}(F(\underline{X}), D) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{X}, G(D)) \simeq \mathrm{Hom}(X, \varprojlim G(D)).$$

Il suit que $G(\varprojlim D)$ et $\varprojlim G(D)$ représentent le même foncteur et sont donc naturellement isomorphes. ∎

Comme conséquence, on voit que les limites (resp. colimites) commutent entre elles.

Exemple Comme on l'avait déjà remarqué, le foncteur d'oubli $\mathbf{Top} \to \mathbf{Ens}$ préserve toutes les limites et les colimites et le foncteur oubli $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Ens}$ préserve toutes les limites.

Exercice 1.47 Montrer que les foncteurs d'oubli de la structure sur **Mon**, **Gr**, **Ann**, G-**Ens**, A-**Mod** et k-**Alg** préservent toutes les limites.

Exercice 1.48 Montrer que, si les coproduits existent dans $\mathcal{C}$, alors tout foncteur représentable F sur $\mathcal{C}$ possède un adjoint. Retrouver le fait que F préserve toutes les limites.

Définition 1.6.5 Un foncteur est *exact à gauche* (resp. *exact à droite*) s'il préserve les limites (resp. les colimites) finies. Il est *exact* s'il est exact à gauche et à droite [a].

[a] On devrait dire exact, coexact et biexact.

Exemples

1. Le foncteur d'oubli **Top** $\to$ **Ens** est exact, de même que celui qui munit un ensemble de la topologie discrète, mais celui qui munit un ensemble de la topologie grossière n'est exact qu'à gauche.
2. Le foncteur d'oubli **Ab** $\to$ **Ens** est exact à gauche mais pas à droite, et celui qui associe à un ensemble un groupe abélien libre est exact à droite mais pas à gauche.

Exercice 1.49 Exactitude des foncteurs d'oubli et d'inclusion ainsi que de leurs adjoints ?

Exercice 1.50 Montrer que si les limites de base I existent dans $\mathcal{C}$, alors les limites de base I existent dans $\mathcal{C}^J$ et que si $D \in \mathcal{C}^{I\times J}(\simeq (\mathcal{C}^J)^I)$, alors

$$\forall j \in J, \quad \left(\varprojlim_i D\right)_j = \varprojlim_i D_j.$$

Analogue pour les colimites.

Proposition 1.6.6 Les colimites filtrantes d'ensembles sont exactes.

Démonstration. Il s'agit de montrer que si I un ensemble préordonné filtrant (c'est vrai plus généralement pour les *catégories filtrantes*), alors le foncteur

$$\varinjlim : \mathbf{Ens}^I \to \mathbf{Ens}$$

est exact. Il suffit de traiter le cas de l'objet final, du produits de deux objets et des noyaux. On rappelle aussi pour la suite que les colimites de diagrammes se calculent argument par argument (voir exercice 1.50). On voit tout d'abord que $\varinjlim \{0\} = \{0\}$. On se donne ensuite deux familles de morphismes $(u_{ij} : X_i \to X_j)$ et $(v_{ij} : Y_i \to Y_j)$ définis pour $i < j$ avec $u_{jk} \circ u_{ij} = u_{ik}$ et $v_{jk} \circ v_{ij} = v_{ik}$ lorsque $i < j < k$. On rappelle qu'on peut écrire $\varinjlim X_i = \sqcup X_i / \sim$ et on notera $\overline{x}_i$ la classe d'un $x_i \in X_i$ (et de même pour les autres colimites filtrantes de base I). Rappelons que pour tout $i < j$, on a $\overline{u_{ij}(x_i)} = \overline{x}_i$ et qu'on peut donc toujours remplacer x_i par un $x_j \in X_j$ lorsque $j > i$ sans changer sa classe. En prenant la colimite sur les projections, on obtient des morphismes

$$\varinjlim (X_i \times Y_i) \to \varinjlim X_i \quad \text{et} \quad \varinjlim (X_i \times Y_i) \to \varinjlim Y_i$$

et la propriété universelle du produit nous fournit une application

$$\varinjlim(X_i \times Y_i) \to \varinjlim X_i \times \varinjlim X_i, \quad \overline{(x_i, y_i)} \mapsto (\overline{x}_i, \overline{y}_i).$$

Il faut montrer que c'est une bijection. Pour l'injectivité on suppose que $(\overline{x}_i, \overline{y}_i) = (\overline{x}'_j, \overline{y}'_j)$. Puisque I est filtrant, il existe $k \geq i, j$ et on peut donc supposer que $i = j = k$ et alors $(x_i, y_i) = (x'_i, y'_i)$. Pour la surjectivité, c'est pareil, on se donne $x_i \in X_i$ et $x_j \in Y_j$, quitte à remplacer i et j par $k \geq i, j$, on peut supposer que $i = j = k$. Cela règle le cas du produit de deux ensembles et celui des noyaux va être traité de la même façon. On se donne donc deux familles d'applications $(f_i, g_i : X_i \to Y_i)$ compatibles avec les u_{ij} et les v_{ij}. La propriété universelle du noyau (et la description des colimites d'ensembles) nous donne une inclusion

$$\varinjlim \ker(f_i, g_i) \subset \ker(\varinjlim f_i, \varinjlim g_i)$$

Il faut montrer que c'est une égalité. On se donne donc $\overline{x}_i \in \varinjlim X_i$ tel que $\overline{f_i(x_i)} = \overline{g_i(x_i)}$. Comme d'habitude, il existe $k \geq i, j$ tel et on peut donc supposer que $i = j = k$ et on a fini. ■

De manière équivalente, l'assertion nous dit que si I est une catégorie *filtrante*, J est une catégorie *finie* et $(X_{i,j})$ est un diagramme *d'ensembles* sur $I \times J$, on a

$$\varinjlim_i \varprojlim_j X_{ij} \simeq \varprojlim_j \varinjlim_i X_{ij}.$$

Exercice 1.51 Montrer que les colimites filtrantes sont exactes dans $\mathbf{A}$b, etc. et qu'elles commutent aux foncteurs d'oubli (on montrera d'abord la seconde assertion).

Remarque Attention : on ne peux pas en déduire par dualité que les *limites* filtrantes sont exactes dans **E**ns (mais dans **E**ns$^{\mathrm{op}}$, ce qui ne nous avance à rien).

2. Faisceaux et schémas

2.1 Préfaisceau

On fixe une catégorie $\mathcal{A}$ dans laquelle toutes les limites et colimites existent et les colimites filtrantes sont exactes (par exemple $\mathbf{E}$ns, $\mathbf{T}$op ou $\mathbf{A}$b).

Définition 2.1.1 Un *préfaisceau* sur un espace topologique X à valeurs dans $\mathcal{A}$ est un foncteur $\mathcal{F} : \mathbf{O}\mathrm{uv}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}$. Un *morphisme de préfaisceaux* $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est une transformation naturelle entre ces foncteurs.

Les préfaisceaux sur X à valeurs dans $\mathcal{A}$ forment donc une catégorie

$$\widehat{\mathcal{A}(X)} := \mathbf{H}\mathrm{om}(\mathbf{O}\mathrm{uv}(X)^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}).$$

Exemples

1. Un préfaisceau d'ensembles sur X est la donnée, pour tout ouvert U de X, d'un ensemble $\mathcal{F}(U)$ et chaque fois que $V \subset U$, d'une application (de restriction)

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V), \quad s \mapsto s_{|v}$$

tels que, $s_{|U} = s$ et si $W \subset V$, alors $(s_{|V})_{|W} = s_{|W}$.

2. Un morphisme de préfaisceaux d'ensembles $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est la donnée pour tout ouvert $U \subset X$ d'une application $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ tel que si $V \subset U$ et $s \in \mathcal{F}(U)$, on ait $f_V(s_{|V}) = f_U(s)_{|V}$.
3. Même chose avec des préfaisceaux de groupes abéliens, etc.

Exercice 2.1 Montrer qu'on définit bien un préfaisceau d'ensembles en posant $\mathcal{C}_X^E : U \mapsto \mathcal{C}(X, E))$ lorsque E est un espace topologique fixé.

Exercice 2.2 Montrer que, si $p : F \to X$ est une application continue, on définit bien un préfaisceau (des *sections* de F) en posant

$$F(U) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_{/X}}(U, F).$$

Montrer que l'on obtient ainsi un foncteur $\mathbf{Top}_{/X} \to \widehat{\mathbf{Ens}(X)}$.

Exercice 2.3 Montrer que $\mathcal{C}_X^E$ est isomorphe au (pré-) faisceau des sections de la projection $E^{\mathrm{disc}} \times X \to X$.

Exercice 2.4 Montrer que l'on a des isomorphismes $\widehat{\mathcal{A}(\emptyset)} \simeq \mathcal{A}$ et $\widehat{\mathbf{1}(X)} \simeq \mathbf{1}$.

Si on se donne un foncteur $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, alors tout préfaisceau sur X à valeurs dans $\mathcal{A}$ va fournir par composition un préfaisceau à valeurs dans $\mathcal{A}'$ et on obtient ainsi un foncteur

$$\widehat{\mathcal{A}(X)} \to \widehat{\mathcal{A}'(X)}.$$

Exemple On dispose d'un foncteur d'oubli $\widehat{\mathbf{Ab}(X)} \to \widehat{\mathbf{Ens}(X)}$.

Si $u : X \to Y$ est une application continue, on dispose d'un foncteur

$$u^{-1} : \mathbf{Ouv}(Y) \to \mathbf{Ouv}(X)$$

qui fournit par composition un foncteur $u_* : \widehat{\mathcal{A}(X)} \to \widehat{\mathcal{A}(Y)}$. Pour tout ouvert V de Y, on aura donc

$$u_*(\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(u^{-1}(V)).$$

Exemple L'inclusion de l'ouvert vide $\emptyset \hookrightarrow X$ fournit le foncteur *préfaisceau constant*

$$\mathcal{A} \simeq \widehat{\mathcal{A}(\emptyset)} \to \widehat{\mathcal{A}(X)}, \quad E \mapsto \underline{E}$$

et on a donc toujours $\underline{E}(U) = E$.

Si U est un ouvert de X, alors $\mathbf{Ouv}(U)$ est une sous-catégorie de $\mathbf{Ouv}(X)$ et on obtient par restriction un foncteur

$$\widehat{\mathcal{A}(X)} \to \widehat{\mathcal{A}(U)}, \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{|U}.$$

On aura donc pour tout ouvert V de U,

$$\mathcal{F}_{|U}(V) = \mathcal{F}(V).$$

Nous devons aussi introduire le foncteur *sections globales* sur U :

$$\widehat{\mathcal{A}(X)} \to \mathcal{A}, \quad \mathcal{F} \mapsto \Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U).$$

On utilise la première notation lorsqu'on fait varier $\mathcal{F}$ et la seconde lorsqu'on fait varier U.

Exercice 2.5 Montrer que le foncteur $E \mapsto \underline{E}$ est adjoint au foncteur $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Proposition 2.1.2 Toutes les limites et colimites existent dans $\widehat{\mathcal{A}(X)}$ et sont préservées par les sections globales :

$$\Gamma(U, \varprojlim(\mathcal{F}_i, f_\alpha)) = \varprojlim(\Gamma(U, \mathcal{F}_i), f_{\alpha U}))$$

et

$$\Gamma(U, \varinjlim(\mathcal{F}_i, f_\alpha)) = \varinjlim(\Gamma(U, \mathcal{F}_i), f_{\alpha U})).$$

Démonstration. Au vocabulaire près (foncteur/diagramme), cela résulte de l'exercice 1.50. ■

Exercice 2.6 On rappelle qu'on a défini dans la section 1.5 la notion de groupe abélien d'une catégorie. Montrer qu'on a une équivalence

$$\mathbf{A}\mathrm{b}(\widehat{\mathbf{E}\mathrm{ns}(X)}) \simeq \widehat{\mathbf{A}\mathrm{b}(X)}$$

entre la catégorie des groupes abéliens de préfaisceaux d'ensembles sur X et la catégorie des préfaisceaux de groupes abéliens sur X. Même chose avec $\mathbf{M}$on, $\mathbf{G}$r et $\mathbf{A}$nn.

Exercice 2.7 Montrer que si $\mathcal{O}$ est un préfaisceau d'anneaux sur X, il revient au même de se donner un $\mathcal{O}$-module de $\widehat{\mathbf{E}\mathrm{ns}(X)}$ ou bien un préfaisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$ et un morphisme de préfaisceaux d'ensembles $\mathcal{O} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ qui fasse, pour tout $U \subset X$, de $\mathcal{F}(U)$ un $\mathcal{O}(U)$-module. Analogue pour les $\mathcal{O}$-algèbres si $\mathcal{O}$ est commutatif. On notera respectivement $\mathcal{O}$-$\widehat{\mathbf{M}\mathrm{od}(X)}$ et $\mathcal{O}$-$\widehat{\mathbf{A}\mathrm{lg}(X)}$ ces catégories.

Exercice 2.8 Montrer que si $\underline{A}$ désigne le préfaisceau d'anneaux constant associé à un anneau A, on a une équivalence

$$\underline{A}\text{-}\widehat{\mathbf{M}\mathrm{od}(X)} \simeq A\text{-}\widehat{\mathbf{M}\mathrm{od}(X)}.$$

entre la catégorie des modules sur le préfaisceau d'anneau $\underline{A}$ et celle des préfaisceaux en A-modules. Même chose pour les k-algèbres si k est un anneau commutatif.

Proposition 2.1.3 Si $u : X \to Y$ est une application continue, alors le foncteur

$$u_* : \widehat{\mathcal{A}(X)} \to \widehat{\mathcal{A}(Y)}$$

possède un adjoint $\widehat{u}^{-1}$ qui est exact.

Démonstration. On pose

$$(\widehat{u}^{-1}\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{u(U) \subset V} \mathcal{G}(V).$$

Se donner un morphisme $\mathcal{G} \to u_*\mathcal{F}$ revient à se donner une famille compatible de morphismes $\mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(u^{-1}(V))$, ou de manière équivalente, une famille compatible de morphismes $\mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(u^{-1}(V)) \to \mathcal{F}(U)$ chaque fois que $U \subset u^{-1}(V)$. Cela revient à se donner une famille compatibles de morphismes $\varinjlim_{u(U)\subset V} \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(U)$. On a donc bien une adjonction. Le foncteur $\widehat{u}^{-1}$ est exact car les colimites filtrantes sont exactes dans $\mathcal{A}$ par convention. ∎

Exercice 2.9 Montrer que u_* possède aussi un coadjoint $\widehat{u}^!$ si bien que u_* préserve toutes les limites et colimites (attention, ce ne sera plus le cas avec les faisceaux plus tard).

Définition 2.1.4 Soit X un espace topologique et $x \in X$.

1. Si $E \in \mathcal{A}$, le *gratte-ciel* associé à E en x est défini par
$$E_x(U) = \begin{cases} E \text{ si } x \in U \\ 1 \text{ si } x \notin U. \end{cases}$$
2. Si $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur X, la *fibre* de $\mathcal{F}$ en $x \in X$ est
$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x\in U} \mathcal{F}(U).$$

Lorsque $s \in \mathcal{F}(U)$ et $x \in U$, on écrira s_x, ou même simplement encore s, pour l'image de s dans $\mathcal{F}_x$. Réciproquement, si $s \in \mathcal{F}_x$, on sait qu'il existe un ouvert U contenant x tel que s provient d'un élément de $\mathcal{F}(U)$ que l'on notera généralement encore s. Et on dira alors que s est *défini* sur U (il n'existe pas de plus grand ouvert de définition en général).

Proposition 2.1.5 Si X est un espace topologique et $x \in X$, alors le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x$ est adjoint au foncteur $E \mapsto E_x$ et il est exact.

Démonstration. L'exactitude provient de l'exactitude des colimites filtrantes. Il suffit donc de remarquer qu'on a un isomorphisme naturel
$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, E) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, E_x).$$
Or, se donner un morphisme $\mathcal{F} \to E_x$ revient à se donner une famille compatible de morphismes $\mathcal{F}(U) \to E$ lorsque $x \in U$. ∎

Remarquons que, par composition, si $u : X \to Y$ est une application continue, alors
$$(\widehat{u}^{-1}\mathcal{F})_x \simeq \mathcal{F}_{u(x)}$$
(cela résulte formellement de la propriété adjointe $E_{u(x)} \simeq u_*(E_x)$).

2.2 Faisceau

Comme précédemment, on fixe une catégorie $\mathcal{A}$ dans laquelle toutes les limites et colimites existent et où les colimites filtrantes sont exactes.

Définition 2.2.1 Un préfaisceau $\mathcal{F}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ sur un espace topologique X est un *faisceau* si, pour tout recouvrement ouvert $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ d'un ouvert U de X, on a

$$\mathcal{F}(U) = \varprojlim \left\{ \begin{tikzcd} \mathcal{F}(U_i) \arrow[dr] & \\ & \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \\ \mathcal{F}(U_j) \arrow[ur] & \end{tikzcd} \right\}$$

(la base du diagramme est formée de tous les $\{i, j\}$ avec $i, j \in I$ et les inclusions).

Alternativement, cela signifie que la suite

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

est exacte à gauche. Les faisceaux sur X à valeur dans $\mathcal{A}$ définissent une sous-catégorie pleine

$$\widetilde{\mathcal{A}(X)} \subset \widehat{\mathcal{A}(X)}.$$

Exemples 1. Pour un préfaisceau d'ensembles $\mathcal{F}$, être un faisceau signifie que, pour tout recouvrement ouvert $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ d'un ouvert U de X, si on se donne pour tout $i \in I$, un $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tel que pour tout $i, j \in I$, on ait $(s_i)_{|U_i\cap U_j} = (s_j)_{|U_i\cap U_j}$, alors il existe un unique $s \in \mathcal{F}(U)$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $s_{|U_i} = s_i$.
2. Si E est un espace topologique, alors le préfaisceau $\mathcal{C}_U^E : U \mapsto \mathcal{C}(X, E)$ est un faisceau d'ensembles sur X.
3. Si k est un anneau topologique commutatif fixé, on écrira tout simplement $\mathcal{C}_X$. C'est alors un faisceau de k-algèbres.
4. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau, alors $\mathcal{F}(\emptyset) = 1$ (recouvrement vide du vide).
5. Si E est un objet quelconque, alors le préfaisceau constant $U \mapsto E$ n'est *jamais* un faisceau sauf si $E = 1$.
6. Par contre, un gratte-ciel est toujours un faisceau.

Il revient au même de se donner un groupe abélien dans la catégorie des faisceaux d'ensembles ou un faisceau de groupes abéliens. Plus précisément, on a une équivalence de catégories

$$\mathbf{Ab}(\widetilde{\mathbf{Ens}(X)}) \simeq \widetilde{\mathbf{Ab}(X)}.$$

Et de même avec **Mon**, **Gr** et **Ann**. De manière analogue, si $\mathcal{O}$ est un faisceau d'anneaux sur X, on peut considérer la catégorie des $\mathcal{O}$-modules de la catégorie $\widetilde{\mathbf{Ens}(X)}$.

Et de même avec les $\widetilde{\mathcal{O}\text{-algèbres}}$ si $\mathcal{O}$ est commutatif. On notera respectivement $\mathcal{O}\text{-}\widetilde{\mathbf{Mod}}(X)$ et $\mathcal{O}\text{-}\widetilde{\mathbf{Alg}}(X)$ ces catégories. En pratique, on omet le tilde (pour indiquer qu'on considère les faisceaux et pas les préfaisceaux).

Exercice 2.10 Montrer qu'un préfaisceau $\mathcal{F}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ est un faisceau si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{A}$, le préfaisceau d'ensembles $U \mapsto \mathrm{Hom}(A, \mathcal{F}(U))$ est un faisceau.

Exercice 2.11 Soit $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ un recouvrement ouvert et $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur X. Montrer que $\mathcal{F}$ est un faisceau si et seulement si pour tout $i \in I$, $\mathcal{F}_{|X_i}$ est un faisceau sur X_i.

Exercice 2.12 Montrer que si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X, alors $\mathcal{F}(\emptyset) = 1$. Qu'est-ce qu'un préfaisceau (resp. un faisceau) sur l'espace $\emptyset$? sur un espace $\{x\}$ réduit à un point ?

Exercice 2.13 Montrer que le foncteur

$$\widetilde{\mathcal{A}(X)} \to \mathcal{A}^X, \quad \mathcal{F} \mapsto (\mathcal{F}_x)_{x\in X}$$

est fidèle. Le résultat analogue est-il valide pour les préfaisceaux ?

Rappel 2.2.2 Une application entre deux espaces topologiques est *ouverte* (resp. *fermée*) si l'image d'un ouvert (resp. d'un fermé) est toujours ouverte (resp. fermée). Attention, ces deux notions ne sont pas équivalentes. C'est un homéomorphisme si elle est continue, bijective et ouverte (ou fermée). De manière équivalente, c'est un isomorphisme dans la catégorie des espaces topologiques. Une application $p : F \to X$ entre deux espaces topologiques est un *homéomorphisme local* si tout point de F possède un voisinage ouvert V tel que $p(V)$ soit ouvert dans X et p induise un homéomorphisme $V \simeq p(V)$. On dit alors que F est un *espace étalé* au dessus de X. Un exemple typique est donné par l'application $\mathbb{R} \to S^1, \theta \mapsto e^{2i\pi\theta}$. Les espaces étalés sur X forment une sous-catégorie pleine $\mathbf{Et}_{/X}$ de $\mathbf{Top}_{/X}$.

Exercice 2.14 Définir un foncteur $\widehat{\mathbf{Ens}(X)} \to \mathbf{Et}_{/X}$ en envoyant $\mathcal{F}$ sur $\coprod \mathcal{F}_x$ muni de la topologie la plus fine rendant toutes les $s : x \mapsto s_x$ continues. Montrer que cela fournit un adjoint à $\mathbf{Top}_{/X} \to \widehat{\mathbf{Ens}(X)}$ et que ces deux foncteurs induisent une équivalence $\mathbf{Et}_{/X} \to \widetilde{\mathbf{Ens}(X)}$ [a].

a. Il s'agit d'une construction alternative du faisceau associé à un préfaisceau.

Proposition 2.2.3 Soit $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ un recouvrement ouvert, soit pour tout $i \in I$, $\mathcal{F}_i$ un faisceau sur X_i et soit pour tout $i, j \in I$, $\varphi_{i,j} : \mathcal{F}_{i|X_i\cap X_j} \to \mathcal{F}_{j|X_j\cap X_i}$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}$, et que pour tout $i, j, k \in I$, on ait

$$\varphi_{jk|X_i\cap X_j\cap X_k} \circ \varphi_{ij|X_i\cap X_j\cap X_k} = \varphi_{ik|X_i\cap X_j\cap X_k}$$

(*condition de cocyles*). Alors, il existe un faisceau $\mathcal{F}$ sur X et, pour tout $i \in I$, un isomorphisme $\varphi_i : \mathcal{F}_i \simeq \mathcal{F}_{|X_i}$ tel que pour tout $i, j \in I$, on ait $\varphi_{j|X_i \cap X_j} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{i|X_i \cap X_j}$.

Démonstration. Pour un ouvert V de X, on pose

$$\mathcal{F}(V) = \varprojlim \left\{ \begin{tikzcd} \mathcal{F}_i(V \cap X_i) \arrow[r] & \mathcal{F}_i(V \cap X_i \cap X_j) \arrow[d, "\varphi_{ij}"] \\ \mathcal{F}_j(V \cap X_i) \arrow[r] & \mathcal{F}_j(V \cap X_i \cap X_j) \end{tikzcd} \right\}.$$

On vérifie aisément (mais laborieusement) que c'est bien un faisceau et qu'il répond à la question. ∎

Proposition 2.2.4 Si $u : X \to Y$ est une application continue et $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X, alors $u_*\mathcal{F}$ est un faisceau sur Y.

Démonstration. Effectivement : si $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ est un recouvrement ouvert d'un ouvert de Y, alors $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i)$ est un recouvrement ouvert d'un ouvert de X. ∎

Proposition 2.2.5 Le foncteur d'inclusion des faisceaux dans les préfaisceaux possède un adjoint $\mathcal{F} \mapsto \widetilde{\mathcal{F}}$ qui est exact.

Démonstration. Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau sur X et U est un ouvert de X, on pose (provisoirement)

$$\mathcal{F}^+(U) := \varinjlim_{U = \cup_i U_i} \varprojlim \left\{ \begin{tikzcd} \mathcal{F}(U_i) \arrow[dr] & \\ & \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \\ \mathcal{F}(U_j) \arrow[ur] & \end{tikzcd} \right\}.$$

On montre que $\mathcal{F}^+(\emptyset) = 1$ [1] et que, si $\mathcal{F}(\emptyset) = 1$, alors $\mathcal{F}^+$ est un faisceau (exercice). On pose ensuite $\widetilde{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}^+)^+$ et on vérifie que cela défini bien un adjoint :

$$\mathrm{Hom}(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

si $\mathcal{G}$ est un faisceau. Enfin, l'exactitude à gauche résulte du fait que les colimites filtrantes sont exactes dans $\mathcal{A}$. ∎

Même si celui-ci n'est défini qu'à isomorphisme près, on dira que $\widetilde{\mathcal{F}}$ est le *faisceau associé* à $\mathcal{F}$.

1. On remarquera que cette condition est subrepticement incluse dans la définition d'un préfaisceau dans [Har77] et [Liu02].

Corollaire 2.2.6 Tout diagramme de faisceaux $(\mathcal{F}_i, f_\alpha)$ possède une limite et une colimite et on a

$$\varprojlim_{\widetilde{\mathcal{A}(X)}} (\mathcal{F}_i, f_\alpha) = \varprojlim_{\widehat{\mathcal{A}(X)}} (\mathcal{F}_i, f_\alpha) \quad \text{et} \quad \varinjlim_{\widetilde{\mathcal{A}(X)}} (\mathcal{F}_i, f_\alpha) = \varinjlim_{\widehat{\mathcal{A}(X)}} \widetilde{(\mathcal{F}_i, f_\alpha)}. \quad \blacksquare$$

En particulier, on a pour tout ouvert U de X,

$$\Gamma(U, \varprojlim \mathcal{F}_i) = \varprojlim \Gamma(U, \mathcal{F}_i)$$

mais le résultat analogue n'est *plus* valide pour les colimites.

Exercice 2.15 Montrer que si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau sur X et $x \in X$, alors $\widetilde{\mathcal{F}}_x = \mathcal{F}_x$ (utiliser le fait que E_x est un faisceau).

Exercice 2.16 Montrer que si E est un ensemble, alors $\widetilde{\underline{E}} \simeq \mathcal{C}_X^{E^{\text{disc}}}$ (on l'appelle le *faisceau constant* associé à E bien qu'il ne soit pas constant en tant que préfaisceau). Montrer que si U est un ouvert connexe non vide, alors $\widetilde{\underline{E}}(U) = E$.

Exercice 2.17 Montrer que si $\mathcal{F}$ est le faisceau des sections du fibré $\mathbb{R} \to S^1$ et $\mathcal{G} := \widetilde{\underline{\mathbb{Z}}}$, alors $\mathcal{F}_{|U}$ est isomorphe à $\mathcal{G}_{|U}$ lorsque $U \subsetneq S_1$ mais que $\Gamma(S^1, \mathcal{F}) = \emptyset$. Construire un épimorphisme de faisceaux $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ qui n'est pas un épimorphisme de préfaisceaux.

Exercice 2.18 Montrer que si A est un anneau, on a une équivalence de catégories

$$\widetilde{\underline{A}}\text{-}\widetilde{\mathbf{Mod}(X)} \simeq A\text{-}\widetilde{\mathbf{Mod}(X)}.$$

Même chose pour les k-algèbres.

Proposition 2.2.7 Si $u : X \to Y$ est une application continue, alors le foncteur u_* possède un adjoint u^{-1} qui est exact.

Démonstration. Il suffit de prendre pour $u^{-1}\mathcal{G}$ le faisceau associé au préfaisceau $\widehat{u}^{-1}\mathcal{G}$ (on compose ainsi trois adjoints exacts à gauche) :

$$\mathrm{Hom}_{\sim}(\widetilde{\widehat{u}^{-1}\mathcal{G}}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(\widehat{u}^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, u_*\mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{\sim}(\mathcal{G}, u_*\mathcal{F}). \quad \blacksquare$$

Remarque Tout ce qui précède s'applique aux catégories **E**ns, **M**on, **G**r, **A**b, **A**nn, G-**E**ns, A-**M**od, k-**A**lg, etc. De plus, toutes les constructions commutent aux foncteur d'oubli : il suffit en effet de remarquer qu'une structure algébrique est définie par des diagrammes commutatifs faisant intervenir des produits et que les foncteurs que nous avons construit sont tous exacts à gauche. Ce dernier argument fonctionne aussi pour les catégories $\mathcal{O}$-**M**od et $\mathcal{O}$-**A**lg, ce qui permet en fait de *définir* les notions d'images directe ou inverse ainsi que les fibres et les gratte-ciel dans ce contexte (mais pas les objets constants).

2.3 Espace annelé

Définition 2.3.1 Si k est un anneau commutatif, un *espace k-annelé* est un couple $(X, \mathcal{O}_X)$ ou X est un espace topologique et $\mathcal{O}_X$ est un faisceau de k-algèbres sur X. Un *morphisme d'espaces k-annelés* est un couple formé d'une application continue $u : X \to Y$ et d'un morphisme de faisceaux de k-algèbres $u^{-1} : \mathcal{O}_Y \to u_*\mathcal{O}_X$.

Exemple Si X est un espace topologique et k un anneau topologique (par exemple, $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors $(X, \mathcal{C}_X)$ est un espace k-annelé et toute application continue $u : X \to Y$ fournit par composition un morphisme d'espaces k-annelés $(X, \mathcal{C}_X) \to (Y, \mathcal{C}_Y)$.

En pratique, on dira que X est un espace k-annelé sans toujours mentionner explicitement $\mathcal{O}_X$ ou que $u : X \to Y$ est un morphisme d'espaces k-annelés sans mentionner u^{-1}. Aussi, on dira tout simplement *espace annelé* lorsque $k = \mathbb{Z}$ auquel cas une algèbre est la même chose qu'un anneau.

Les espaces k-annelés forment une catégorie : si on se donne $v : Y \to Z$, on aura

$$(v \circ u)^{-1} : \mathcal{O}_Z \xrightarrow{v^{-1}} v_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{v_*(u^{-1})} v_*u_*\mathcal{O}_X.$$

Remarquons que, par adjonction, il revient au même de se donner un morphisme $\mathcal{O}_Y \to u_*\mathcal{O}_X$ ou un morphisme $u^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ ou, plus prosaïquement, une famille compatible de morphismes $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U)$ lorsque $u(U) \subset V$. Si x est un point de X, alors u induit un morphisme sur les fibres

$$u_x^{-1} : \mathcal{O}_{Y,u(x)} = (u^{-1}\mathcal{O}_Y)_x \to \mathcal{O}_{X,x}.$$

Si U est un ouvert de X, on munira U de $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_{X|U}$. On aura donc tout simplement $\mathcal{O}_U(V) = \mathcal{O}_X(V)$ si V est un ouvert de U.

Rappel 2.3.2 On rappelle ci-dessous quelques notions sur les anneaux commutatifs (on renvoie plus généralement à [AM16]).

1. Un anneau commutatif A est *intègre* (resp. un *corps*) si $A \setminus \{0\}$ est un sous-monoïde (resp. un sous-groupe) de $(A, \times)$, c'est à dire, du monoïde multiplicatif sous-jacent. Cela signifie que $A \setminus \{0\}$ est stable par produit fini (resp. produit fini et inverse), et donc automatiquement non vide.
2. Un idéal $\mathfrak{a}$ d'un anneau commutatif A est *premier* (resp. *maximal*) si $A/\mathfrak{a}$ est un anneau intègre (resp. un corps). En particulier, un anneau commutatif A est intègre (resp. un corps) si et seulement si $\{0\}$ est un idéal premier (resp. maximal). Inversement, $\mathfrak{a}$ est premier si et seulement si $A \setminus \mathfrak{a}$ est un sous-monoïde de $(A, \times)$.
3. On utilisera souvent le fait que si $\varphi : A \to K$ est un homomorphisme (resp. un homomorphisme surjectif) d'un anneau commutatif A vers un corps K, alors $\ker \varphi$ est un idéal premier (resp. maximal)
4. Un anneau commutatif A est un anneau *local* s'il possède un unique idéal maximal $\mathfrak{m}_A$, ou de manière équivalente, un unique quotient $\kappa(A)$ (à isomorphisme près) qui est un corps. On a alors

$$\kappa(A) \simeq A/\mathfrak{m}_A \quad \text{et} \quad \mathfrak{m}_A = \ker(A \to \kappa(A)).$$

Nous disposons de la suite d'équivalences :
(a) A est un anneau local,
(b) $A \smallsetminus A^\times$ est un idéal (auquel cas $\mathfrak{m}_A = A \smallsetminus A^\times$),
(c) il existe un idéal $\mathfrak{a}$ tel que $A \smallsetminus \mathfrak{a}$ soit un sous-groupe de $(A, \times)$ (auquel cas $\mathfrak{m}_A = \mathfrak{a}$),
(d) il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ tel que $A \smallsetminus \mathfrak{p} \subset A^\times$ (auquel cas $\mathfrak{m}_A = \mathfrak{p}$ et $A \smallsetminus \mathfrak{p} = A^\times$).

5. Un morphisme d'anneaux locaux $\varphi : A \to B$ est *local* si $\varphi(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$, ou de manière équivalente, s'il induit une extension de corps $\kappa(A) \hookrightarrow \kappa(B)$. C'est aussi équivalent à dire que $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$ ou que $\varphi^{-1}(B^\times) = A^\times$. Dans le cas d'une inclusion d'anneaux locaux, on dira aussi que B *domine* A (ce qui signifie donc que $\mathfrak{m}_A \subset \mathfrak{m}_B$, ou encore $\mathfrak{m}_B \cap A = \mathfrak{m}_A$, ou bien que $B^\times \cap A = A^\times$).

Définition 2.3.3 Un *espace localement k-annelé* est un espace k-annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ tel que pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ soit un anneau local. Un *morphisme d'espaces localement k-annelés* est un morphisme d'espace k-annelés $u : X \to Y$ tel que, pour tout $x \in X$, le morphisme $u_x^{-1} : \mathcal{O}_{Y,u(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ soit un homomorphisme local.

Les espaces localement k-annelés forment une sous-catégorie de celle des espaces k-annelés, mais ce n'est *pas* une sous-catégorie pleine.

Exercice 2.19 Montrer que si X et Y sont des espaces k-annelés (resp. localement k-annelés), alors le préfaisceau d'ensembles $U \mapsto \mathrm{Hom}(U, Y)$ est un faisceau sur X. Ici, on désigne par Hom l'ensemble des morphismes d'espaces k-annelés (resp. localement k-annelés).

Rappel 2.3.4 On dispose d'un certain nombre d'axiomes de séparation plus ou moins forts pour un espace topologique X :

1. T_0 (Kolmogorov) : Si x et y sont deux points distincts, il existe un ouvert U qui contient l'un des points et pas l'autre ($\Leftrightarrow$ les fermés irréductibles possèdent au plus un point générique [a]),
2. T_1 (Fréchet) : Si x et y sont deux points distincts, il existe un ouvert U qui contient le premier point et pas l'autre ($\Leftrightarrow$ les points sont fermés),
3. T_2 (Hausdorff) : Si x et y sont deux points distincts, il existe des ouverts disjoints U et V qui contiennent chacun des points ($\Leftrightarrow$ la diagonale est fermée),
4. ...

Lorsque nous dirons simplement *séparé*, cela signifie toujours T_2, c'est à dire Hausdorff. Un espace *normal* est un espace séparé qui satisfait

T_4 : si F et G sont deux fermés disjoints, il existe des ouverts disjoints qui contiennent chacun des fermés (on a $T_4 + T_1 \Rightarrow T_2$).

Enfin, un espace *compact* est un espace séparé et *quasi-compact* [b]. Un espace compact est toujours normal.

a. Voir rappel 2.4.11 plus bas.
b. Voir rappel 2.4.11 encore.

Proposition 2.3.5 Soit k un corps topologique de Fréchet. Si X est un espace topologique, alors $(X, \mathcal{C}_X)$ est un espace localement k-annelé et on obtient ainsi un foncteur pleinement fidèle.

Démonstration. On sait déjà qu'on obtient ainsi un foncteur des espaces topologiques vers les espaces k-annelés. Si $x \in X$, le morphisme d'inclusion $x \hookrightarrow X$ induit un homomorphisme surjectif, car les constantes sont continues, sur les fibres

$$\mathcal{C}_{X,x} \to k, \quad f \mapsto f(x)$$

dont le noyau

$$\mathfrak{m}_{X,x} := \{f \in \mathcal{C}_{X,x} \ / \ f(x) = 0\}$$

est nécessairement un idéal maximal. Soit $f \in \mathcal{C}_{X,x}$ tel que $f(x) \neq 0$. On peut voir f comme une fonction continue sur un ouvert U contenant x et comme $\{0\}$ est fermé dans k, on peut supposer que f ne s'annule pas sur U (enlever le fermé $f^{-1}(0)$). Dans ce cas, puisque $k^\times$ est un groupe topologique, la fonction $1/f$ est continue sur U. Cela implique que $f \in \mathcal{C}_{X,x}^\times$ et il suit que $\mathcal{C}_{X,x}$ est un anneau local. On voit donc que $(X, \mathcal{C}_X)$ est un espace localement annelé. Toute application continue $u : X \to Y$ fournit un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{m}_{Y,u(x)} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathcal{C}_{Y,u(x)} \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{m}_{X,x} \arrow[r] & \mathcal{C}_{X,x} \arrow[r] & k \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

ce qui implique que l'on a bien un homomorphisme local au milieu. Réciproquement, il reste à montrer qu'un morphisme d'espaces localement k-annelés $(X, \mathcal{C}_X) \to (Y, \mathcal{C}_Y)$ est uniquement déterminé par l'application continue u. Un tel morphisme va fournir, pour tout $x \in X$, un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{m}_{Y,u(x)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}_{Y,u(x)} \arrow[r] \arrow[d, "u_x^{-1}"'] & k \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{m}_{X,x} \arrow[r] & \mathcal{C}_{X,x} \arrow[r] & k \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

On a automatiquement une égalité à droite car le seul morphisme de k-algèbre de k dans lui même est l'identité. En écrivant que le carré de droite commute, on en déduit que $u_x^{-1}(g)(x) = g(u(x))$ pour tout $g \in \mathcal{C}_{Y,u(x)}$. ∎

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace localement k-annelé, on désigne par $\mathfrak{m}_{X,x}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ et par $\kappa(x)$ son corps résiduel. Aussi, si $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ et $x \in U$, on désigne par $f(x)$ l'image de f (c'est à dire la classe de f_x) dans $\kappa(x)$.

Exercice 2.20 Montrer que si X est un espace k-annelé et $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, alors $U := \{x \in X \ / \ f_x \in \mathcal{O}_{X,x}^\times\}$ est ouvert dans X et que $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)^\times$. Montrer que, lorsque X est localement k-annelé, on a $U = \{x \in X \ / \ f(x) \neq 0\}$.

Définition 2.3.6 Soit k un corps topologique de Fréchet. Une *k-variété topologique (sans bord)* est un espace localement k-annelé X qui est localement isomorphe à $(k^n, \mathcal{C}_{k^n})$.

Alternativement, cela revient à se donner un espace topologique X et une *k-carte* sur X, c'est à dire un recouvrement ouvert $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ et, pour tout $i \in I$, un ouvert U_i de k^{n_i} et un homéomorphisme $\varphi_i : X_i \simeq U_i$ (grâce à la pleine fidélité du foncteur de la proposition 2.3.5).

Rappel 2.3.7 Une *pseudo-distance* (resp. une *distance*) sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que

1. $\forall x \in E, d(x,x) = 0 \quad$ (resp. $\forall x, y \in E, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$),
2. $\forall x, y \in E, d(x,y) = d(y,x)$,
3. $\forall x, y, z \in E, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

On dit alors que E, muni de d, est un *espace pseudo-métrique* (resp. un *espace métrique*). Les *boules ouvertes*

$$D(x, r^-) := \{y \in E \ / \ d(x,y) < r\}$$

forment une base d'ouvert pour une topologie sur E et d est une distance si et seulement si E est séparé. Une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est *convergente* (resp. *de Cauchy*) si

$$\exists x \in E, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x, x_n) \leq \epsilon$$

$$(\text{resp.} \quad \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, d(x_n, x_m) \leq \epsilon).$$

Un espace métrique est *complet* s'il est séparé et si toute suite de Cauchy est convergente. Le foncteur d'oubli des espaces complets vers les espaces pseudo-métriques possède un adjoint $E \mapsto \widehat{E}$. Ce dernier préserve les structures algébriques.

Rappel 2.3.8 Une *semi-norme* sur un groupe abélien M est une application

$$M \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto \|x\|,$$

telle que

1. $\forall x \in M, \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
2. $\forall x, y \in M, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

C'est une *norme* si

$$\forall x \in M, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

C'est une semi-norme *ultramétrique* si

$$\forall x, y \in M, \quad \|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$$

Un homomorphisme $\varphi : M \to N$ entre deux groupes abéliens semi-normés est *borné* s'il existe $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que

$$\forall x \in M, \quad \|\varphi(x)\| \leq C\|x\|.$$

Deux semi-normes sont *équivalentes* si l'identité est bornée dans les deux sens. Toute semi-norme définit une pseudo-distance sur M en posant

$$\forall x, y \in M, \quad d(x, y) = \|y - x\|$$

et cela munit M d'une topologie. C'est une distance si et seulement si la semi-norme est en fait une norme (si et seulement si M est séparé). On dit que M est *de Banach* s'il est complet pour une norme. Une application bornée est toujours continue mais la réciproque n'est pas vraie.
Une *semi-norme* sur un anneau A est une semi-norme de groupe abélien telle que, de plus,

1. $\|1\| = 1$,
2. $\forall a, b \in A, \quad \|ab\| \leq \|a\|\|b\|$.

Elle est *triviale* si

$$\forall a \in A, \quad \|a\| = 0 \text{ ou } \|a\| = 1.$$

C'est une semi-norme *multiplicative* si

$$\forall a, b \in A, \quad \|ab\| = \|a\|\|b\|.$$

Une *valeur absolue* $|-|$ sur un corps k est une norme multiplicative [a].
Si A est un anneau semi-normé, une *semi-norme* sur un A-module M est une semi-norme de groupe abélien telle que, de plus,

$$\forall a \in A, x \in M \quad \|ax\| \leq C\|a\|\|x\|.$$

Quitte à remplacer la semi-norme par une semi-norme équivalente, on peut toujours supposer que $C = 1$. D'autre part, la condition est automatiquement satisfaite si $A = \mathbb{Z}$ avec la semi-norme triviale. De plus, si k est un corps muni d'une valeur absolue et V un k-espace vectoriel semi-normé, on aura automatiquement

$$\forall a \in k, x \in V \quad \|ax\| = |a|\|x\|.$$

Si k est un anneau commutatif semi-normé, une semi-norme sur une k-algèbre A est une semi-norme de k-module *et* d'anneau.
Si k est un *complet* pour une valeur absolue (réelle), par exemple, $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{C}_p$ ou $\mathbb{C}((t))$ et V un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes et V est complet. De plus, tous les sous-espaces vectoriels de V sont fermés. Enfin, toute application linéaire $V \to W$ entre espaces vectoriels de dimension finie est alors continue.

a. On dira parfois valeur absolue *réelle*.

Rappel 2.3.9 Lorsque V est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k, l'*espace projectif* sur V est l'ensemble des droites vectorielles de V ou, de manière équivalente,

$$\mathbb{P}(V) := (V \setminus \{0\})/k^\times.$$

On écrira $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{P}(k^{n+1})$. Si l'on désigne par $(x_0 : \cdots : x_n)$ la classe d'un vecteur $(x_0, \ldots, x_n)$, on a pour tout $i = 1, \ldots, n$, une bijection

$$\begin{array}{ccc} \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \ / \ x_i \neq 0\} & \xrightarrow{\simeq} & k^n \\ (x_0 : \cdots : x_n) & \longmapsto & (x_0/x_i, \ldots, \widehat{1}, \ldots, x_n/x_i). \end{array}$$

On identifie en pratique $k \cup \{\infty\}$ avec $\mathbb{P}^1(k)$ en envoyant $a \in k$ sur $(a;1)$ et ∞ sur $(1;0)$.

Exemple Soit k un corps topologique de Fréchet.

1. Si V est un espace vectoriel de dimension finie sur k, le choix d'une base munit V d'une structure de variété topologique, qui ne dépend pas de la base si k est complet pour une valeur absolue (réelle).
2. Si on choisit une base et qu'on munit $\mathbb{P}(V)$ de la structure d'espace topologique quotient, celui-ci est muni d'une carte qui en fait une variété topologique. On a $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq S^1$ (resp. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$) qui est donc une variété topologique réelle (resp. complexe - et donc aussi réelle).
3. Si V est un espace vectoriel réel de dimension finie et $\Lambda \subset V$ un *réseau* (le sous-groupe engendré par *une* base de V), on considérera le *tore* $X := V/\Lambda$. On a la suite d'isomorphismes

$$X = V/\Lambda \simeq \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n \simeq (S^1)^n.$$

Par exemple, si Λ est un réseau dans l'espace vectoriel *réel* $\mathbb{C}$, on voit que $\mathbb{C}/\Lambda$ est isomorphe (comme variété topologique réelle) à $S^1 \times S^1$ (faire un dessin).

Rappel 2.3.10 Soit k un corps complet pour une valeur absolue (réelle), E et F des espaces vectoriels de dimension finie sur k et U, V des ouverts de E et F respectivement. Une application $f : U \to V$ est *différentiable* en $a \in U$ s'il existe une application k-linéaire $f'(a) : E \to F$ telle que

$$\|f(a+h) - f(a) - f'(a)(h)\|/\|h\| \to 0.$$

On dit que f est k-*différentiable* [a] si $f^{(k-1)}$ et différentiable en tout point de U (on pose $f^{(0)} = f$ et 0-différentiable signifie continue). On dit ∞-*différentiable* si f est k-différentiable pour tout $k \in \mathbb{N}$. On dit aussi que f est *analytique* en a s'il existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$, des bases u_i et v_j de E et F respectivement et des séries f_j convergentes pour $\|c\| \leq r$ telles que

$$f\left(a + \sum c_i u_i\right) = \sum f_j(c_1, \ldots, c_n) v_j.$$

Lorsque $K = \mathbb{C}$, on dit *holomorphe* au lieu de différentiable. Une application holomorphe est automatiquement analytique.

a. Attention : la lettre k désigne à la fois le corps et l'ordre.

On désignera par $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{C}^n}$ le sous-faisceau des fonctions *holomorphes*.

Exercice 2.21 On rappelle que le *rayon (de convergence)* $\mathrm{ray}(f)$ d'une série entière $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mathbb{C}[[z]]$ est le plus grand $r \in [0, +\infty]$ tel que la série converge pour $|z| < r$. Montrer que

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C},0} = \{f \in \mathbb{C}[[z]],\ \mathrm{ray}(f) > 0\}.$$

Définition 2.3.11 Une *variété complexe (holomorphe)* [a] est un espace localement $\mathbb{C}$-annelé qui est localement isomorphe à $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ pour un certain n.

a. *Complex manifold* en anglais.

Cela signifie qu'il existe une *carte holomorphe*, c'est à dire un recouvrement $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, ainsi que pour tout $i \in I$, un ouvert U_i de $\mathbb{C}^{n_i}$ et un isomorphisme d'espaces localement $\mathbb{C}$-annelés

$$(X_i, \mathcal{O}_{X_i}) \simeq (U_i, \mathcal{O}_{U_i}).$$

En fait, il revient au même de se donner une $\mathbb{C}$-carte (topologique) telle que, si on note U_{ij} l'image de $X_i \cap X_j$ dans U_i et qu'on désigne par $\varphi_{ij} : X_i \cap X_j \simeq U_{ij}$ l'application induite, alors pour tout $i, j \in I$, l'application $\varphi_{ji} \circ \varphi_{ij}^{-1} : U_{ij} \simeq U_{ji}$ soit holomorphe. Cela définit alors de manière unique le faisceau $\mathcal{O}_X$.

Exemples

1. Soit V un $\mathbb{C}$-vectoriel de dimension finie. Alors, V a une structure naturelle de variété complexe (indépendamment du choix de la base). De même, $\mathbb{P}^1(V)$ est une variété complexe : plus précisément, la variété topologique est munie d'une structure holomorphe en utilisant la carte affine décrite plus haut.
2. Si V est un $\mathbb{C}$-vectoriel de dimension finie et Λ est un réseau *réel* dans V, on peut utiliser l'homéomorphisme local $V \to V/\Lambda$ pour munir ce dernier d'une structure de variété complexe : c'est un *tore complexe*.
3. On appelle *groupe de Lie complexe* un groupe dans la catégorie des variétés complexes. On peut montrer que tout groupe de Lie complexe compact connexe est isomorphe à un tore complexe (utiliser l'exponentielle sur l'espace tangent à l'origine).

Exercice 2.22 Montrer que tout morphisme de variétés complexes $V_1/\Lambda_1 \to V_2/\Lambda_2$ se relève en une application *affine* $V_1 \to V_2$. En déduire que deux tores complexes de dimension 1, $\mathbb{C}/\Lambda_1$ et $\mathbb{C}/\Lambda_2$, sont isomorphes si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\alpha\Lambda_1 = \Lambda_2$.

Exercice 2.23 Définir de la même manière la notion de variété k-différentiable réelle ($k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) ainsi que celle de variété analytique différentiable réelle.

Définition 2.3.12 Une *variété analytique complexe* est un espace localement $\mathbb{C}$-annelé V qui est localement de la forme suivante. Il existe un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$ et

$f_1, \ldots, f_r \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ tels que

$$V = V(f_1, \ldots, f_r) = \{x \in U \ / \ f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0\}$$

et

$$\mathcal{O}_V = i^{-1}(\mathcal{O}_U/\mathcal{I}_V),$$

où $i : V \hookrightarrow U$ désigne l'inclusion et $\mathcal{I}_V$ désigne l'idéal engendré par $f_1, \ldots, f_r$.

Exercice 2.24 Montrer que $\mathbb{C}$ représente le foncteur $V \mapsto \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ dans la catégorie des variétés analytiques complexes.

Exercice 2.25 Montrer que l'équation de Legendre $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ définit une variété analytique complexe qui est holomorphe lorsque $\lambda \neq 0, 1$ (projeter sur un des axes au voisinage de chaque point pour obtenir une carte). Même question avec l'équation $y^2 z = x(x-z)(x-\lambda z)$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Montrer que c'est faux si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

2.4 Spectres maximal et premier

Définition 2.4.1 Le *spectre maximal* (resp. *premier*) d'un anneau commutatif A est l'ensemble $\mathrm{Spm}(A)$ (resp. $\mathrm{Spec}(A)$) des idéaux maximaux (resp premiers) de A.

On a bien sûr $\mathrm{Spm}(A) \subset \mathrm{Spec}(A)$.

Exemples

1. On a $\mathrm{Spec}(A) = \emptyset$ si et seulement si $\mathrm{Spm}(A) = \emptyset$ si et seulement si $A = \{0\}$.
2. On a $\mathrm{Spec}(A) = \{(0)\}$ si et seulement si $\mathrm{Spm}(A) = \{(0)\}$ si et seulement si A est un corps.
3. $\mathrm{Spm}(A)$ a un unique élément si et seulement si A est un anneau local mais alors $\mathrm{Spec}(A)$ peut être infini : prendre par exemple
$$A = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathbb{C}(x,y), \quad g(0,0) \neq 0 \right\}.$$
4. On a
$$\mathrm{Spm}(\mathbb{Z}) = \{(p), p \text{ premier}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(p), p \text{ premier ou } p = 0\}$$
(unicité avec $p \geq 0$).
5. Si k est un corps, on a
$$\mathrm{Spm}(k[t]) = \{(P) \ : \ P \text{ irréductible}\}$$
et
$$\mathrm{Spec}(k[t]) = \{(P) \ : \ \text{irréductible ou } P = 0\}$$
(unicité avec P unitaire).

6. Soit X un espace topologique et $A := \mathcal{C}(X, k)$ ou k est un corps topologique. Si $x \in X$, alors
$$I_x := \{f \in A \ / \ f(x) = 0\} \in \mathrm{Spm}(A).$$

Exercice 2.26 On désigne par $\mathbb{Z}_{(2)} \subset \mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels à dénominateur impair. Montrer que c'est un anneau local principal [a] qui n'est pas un corps. Combien d'éléments dans $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_{(2)})$? dans $\mathrm{Spm}(\mathbb{Z}_{(2)})$?

a. Voir rappel 3.3.9 plus bas.

Voici un dernier exemple qui mérite une démonstration directe :

Proposition 2.4.2 — Théorème des zéros sur $\mathbb{C}$. On a
$$\mathrm{Spm}(\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]) = \{(t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n) \ : \ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}\}.$$

Démonstration. Dans un sens, c'est clair car $(t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n)$ est le noyau de l'application d'évaluation
$$\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n] \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(a_1, \ldots, a_n),$$
qui est un homomorphisme surjectif à valeur dans un corps. On se donne maintenant un idéal maximal $\mathfrak{m}$ dans $\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]$ et on considère le morphisme d'anneaux composé
$$\varphi : \mathbb{C}[t_n] \hookrightarrow \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]/\mathfrak{m} := K.$$
Comme K est un corps, $\ker \varphi$ est un idéal premier. Si $\ker \varphi = \{0\}$, alors φ se prolonge en une extension de corps $\mathbb{C}(t_n) \hookrightarrow K$ et on trouve une contradiction car K est un espace vectoriel de type dénombrable (engendré par des monômes) mais pas $\mathbb{C}(t_n)$ (la famille $\{1/(t_n - a)\}_{a \in \mathbb{C}}$ est libre). Or tout idéal premier non nul de $\mathbb{C}[t_n]$ est engendré par $t_n - a_n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$ et on procède par récurrence : la projection $\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n] \twoheadrightarrow K$ se factorise à travers la projection
$$\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_{n-1}], \quad t_n \mapsto a_n$$
et on considère le noyau $\mathfrak{m}'$ de l'application induite $\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_{n-1}] \twoheadrightarrow K$. ■

Exercice 2.27 Établir une bijection entre
$$\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \ / \ \forall i = 1, \ldots, k, f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$$
et
$$\mathrm{Spm}(\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]/(f_1, \ldots, f_k))$$
lorsque $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]$.

Exercice 2.28 Établir une bijection entre $\mathrm{Spm}(\mathbb{R}[t])$ et l'ensemble $\{a \pm ib \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}$ des nombres complexes à conjugaison près (on identifie z et $\overline{z}$).

Exercice 2.29 Montrer que si X est un espace topologique normal (resp. compact) et $A := \mathcal{C}(X, k)$ avec $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'application

$$X \to \mathrm{Spm}(A), \quad x \mapsto I_x$$

est injective (resp. bijective). En fait, l'application est injective si et seulement si X est un *espace d'Uryshon* (par définition).

Pour la théorie, on se concentrera généralement sur le spectre premier, laissant au lecteur le soin d'énoncer et démontrer les résultats analogues pour le spectre maximal.

Si A est un anneau commutatif et $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, on désigne par $\kappa(\mathfrak{p})$ le corps de fraction de l'anneau intègre $A/\mathfrak{p}$. En particulier, on aura $\kappa(\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m}$ si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal. Si $f \in A$, on désignera par $f(\mathfrak{p})$ l'image de f dans $\kappa(\mathfrak{p})$) :

$$\begin{array}{ccccc} A & \twoheadrightarrow & A/\mathfrak{p} & \hookrightarrow & \kappa(\mathfrak{p}) \\ f & \longmapsto & \overline{f} & \longmapsto & f(\mathfrak{p}) \end{array}$$

On remarquera en particulier que $f(\mathfrak{p}) = 0 \Leftrightarrow f \in \mathfrak{p}$ (et on préfère toujours les égalités en mathématiques).

Exercice 2.30 Soit X un espace topologique et $A := \mathcal{C}(X, k)$ ou k est un corps topologique. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme $\kappa(I_x) \simeq k$ tel que pour tout $f \in A, f(I_x) \leftrightarrow f(x)$.

Exercice 2.31 Soit $A = \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]$ et $\mathfrak{m} := (t_1 - a_1, \ldots, t_n - a_n)$. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme $\kappa(\mathfrak{m}) \simeq \mathbb{C}$ tel que pour tout $f \in A, f(\mathfrak{m}) \leftrightarrow f(a_1, \ldots, a_n)$.

Exercice 2.32 Montrer que si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[t])$, alors $\kappa(\mathfrak{p}) \simeq \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}(t)$.

Exercice 2.33 Soit A un anneau commutatif. On considère la collection de tous les morphismes $A \to K$ ou K est un corps. Si $K \hookrightarrow L$ est une extension de corps, on dit que $A \to K$ est équivalent à $A \to K \hookrightarrow L$ et on considère la relation d'équivalence engendrée. Montrer que l'on a une bijection

$$\mathrm{Spec}(A) \simeq \{A \to K\}/\sim.$$

Si A est un anneau commutatif et $E \subset A$, on pose

$$V(E) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \;/\; \forall f \in E, f(\mathfrak{p}) = 0\}.$$

En d'autres termes, on a $\mathfrak{p} \in V(E) \Leftrightarrow E \subset \mathfrak{p}$.

Rappel 2.4.3 Si X est un G-ensemble, $E \subset G$ et $F \subset X$, on note

$$EF = \{gx \,:\, g \in E, x \in F\}.$$

Cela s'applique au cas $X = G$ et on peut alors définir E^n par récurrence si bien que

$$E^n := \{x_1 \ldots, x_n \ : \ x_i \in E\}.$$

Cela s'applique aussi au cas ou on s'est donné un morphisme $G \to H$ et que X est un H-ensemble (que l'on voit alors comme G-ensemble via $G \to H$). Si M est un A-module, $E \subset A$ et $F \subset M$, on désigne par $E \cdot F$ le sous-groupe engendré par EF. Cela s'applique en particulier au cas $M = A$ et on définit $E^{\cdot n}$ par récurrence si $E \subset A$. Attention : lorsque $E = \mathfrak{a}$ est un idéal et $F = N$ est un sous-module, on fait l'abus d'écrire $\mathfrak{a}N$ (qui est un sous-module) au lieu de $\mathfrak{a} \cdot N$ et $\mathfrak{a}^n$ (qui est un idéal) au lieu de $\mathfrak{a}^{\cdot n}$.

Exercice 2.34 Montrer qu'on a toujours $V(\emptyset) = \mathrm{Spec}(A)$, $V(A) = \emptyset$, $V(EF) = V(E) \cup V(F)$ et $V(\bigcup_{i \in I} E_i) = \bigcap_{i \in I} V(E_i)$.

Définition 2.4.4 La *topologie de Zariski* sur $\mathrm{Spec}(A)$ est la topologie pour laquelle les fermés sont les parties de la forme $V(E)$ avec $E \subset A$.

On munit $\mathrm{Spm}(A)$ de la topologie induite.

Exercice 2.35 Montrer que $\mathrm{Spm}(A)$ est l'ensemble des points fermés de $\mathrm{Spec}(A)$.

Exercice 2.36 Montrer que si k est un corps, les ouverts non vides de $\mathrm{Spm}(k[t])$ sont les complémentaires des parties finies. Est-ce que $\mathrm{Spm}(\mathbb{C}[t])$ (muni de la topologie de Zariski) est homéomorphe à $\mathbb{C}$ (muni de sa topologie usuelle) ?

Exercice 2.37 Décrire les ouverts et les fermés de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_{(2)})$. Est-ce que $\mathrm{Spm}(A)$ est dense dans $\mathrm{Spec}(A)$ en général ?

Exercice 2.38 Montrer que si X est un espace topologique normal (resp. compact) et $A := \mathcal{C}(X, k)$ avec $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'application

$$X \to \mathrm{Spm}(A), \quad x \mapsto I_x$$

est un homéomorphisme sur son image (resp. un homéomorphisme).

Rappel 2.4.5

1. Un anneau commutatif A est *réduit* si

$$\forall f \in A \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}, f^n \in A \setminus \{0\}.$$

On dira que $f \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$. Un anneau commutatif est donc réduit lorsque 0 est le seul élément nilpotent. Un idéal $\mathfrak{a} \subset A$ est dit *radical* si $A/\mathfrak{a}$ est réduit. On voit donc qu'un anneau commutatif A est réduit si et seulement si $\{0\}$ est un idéal radical. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, il existe un plus petit idéal radical $\sqrt{\mathfrak{a}}$ contenant A : c'est l'intersection des idéaux premiers qui le contiennent (théorème 2.4.6 ci-dessous). Alternativement, si A est un anneau commutatif, il existe un plus grand quotient réduit A_{red} de A.

2. Si A est un anneau commutatif et $E \subset A$, il existe un anneau qui est universel pour les morphismes $\varphi : A \to B$ tels que $\varphi(E) \subset B^\times$. C'est le *localisé de A en E*. Si on désigne par S le sous-monoïde multiplicatif de A engendré par E, il s'agit de $S^{-1}A = (A \times S)/\sim$ ou

$$(f, s) \simeq (g, t) \Leftrightarrow \exists u \in S, u(ft - gs) = 0$$

(il faut bien sûr préciser les lois). On désigne habituellement par a/s la classe de (a, s) dans $S^{-1}A$. On a

$$\ker(A \to S^{-1}A) = \{f \in A \ / \ \exists s \in S, sf = 0\}$$

et $S^{-1}A = \{0\}$ si et seulement si $\forall s \in S, \exists t \in S, st = 0$. Nous allons considérer maintenant deux cas particuliers.

(a) Si $f \in A$, le *localisé de A en f* se note $A_f := S^{-1}A$ où $S := \{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est le sous-monoïde engendré par f. On préférera utiliser

$$A[1/f] := A[s]/(1 - fs)$$

qui lui est naturellement isomorphe. On a

$$\ker(A \to A[1/f]) = \{g \in A \ : \ \exists n \in \mathbb{N}, f^n g = 0\}$$

et on voit que f est nilpotent si et seulement si $A[1/f] = \{0\}$.

(b) Si $\mathfrak{p} \subset A$ est un idéal premier et $S := A \setminus \mathfrak{p}$, alors le *localisé de A en $\mathfrak{p}$* est $A_\mathfrak{p} := S^{-1}A$. C'est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = S^{-1}\mathfrak{p}$ et de corps résiduel $k(\mathfrak{p}) = \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$. De plus, on a

$$A_\mathfrak{p} \simeq \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} A[1/f].$$

Proposition 2.4.6 — Théorème de Krull. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal d'un anneau commutatif A, alors $\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{p}$ parcours $\mathrm{Spec}(A)$.

Démonstration. Puisqu'un idéal premier est radical et qu'une intersection d'idéaux radicaux est un idéal radical, seule l'inclusion réciproque mérite une démonstration. Et il suffit bien sûr de considérer le cas $\mathfrak{a} = 0$ puisque les idéaux (premiers, radicaux) de A contenant $\mathfrak{a}$ sont en bijection avec ceux de $A/\mathfrak{a}$. Or, si $f \in A$ n'est pas nilpotent, l'anneau $A[1/f]$ n'est pas nul et possède donc un idéal maximal $\mathfrak{m}$. Si $\varphi : A \to A[1/f]$ désigne le morphisme canonique, on voit que $f \notin \mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ qui est un idéal premier de A (comme image inverse d'un idéal premier). ∎

Exercice 2.39 Si $X \subset \mathrm{Spec}(A)$, on pose

$$I(X) := \{f \in A \ / \ \forall \mathfrak{p} \in X, f(\mathfrak{p}) = 0\}.$$

Montrer que $I(X)$ est un idéal radical de A et que les applications $E \mapsto V(E)$ et $X \mapsto I(X)$ induisent des bijections réciproques entre l'ensemble des idéaux radicaux de A et les fermés de $\mathrm{Spec}(A)$. En d'autres termes, montrez que l'on a toujours $I(V(E)) = \sqrt{(E)}$ et $V(I(X)) = \overline{X}$ (adhérence).

Définition 2.4.7 Si A est un anneau commutatif et $f \in A$, alors

$$D(f) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \ / \ f(\mathfrak{p}) \neq 0\}$$

est un *domaine spécial* de $\mathrm{Spec}(A)$.

Exercice 2.40 Soit A un anneau commutatif.

1. Montrer que si $f \in A$, alors

$$D(f) = \emptyset \Leftrightarrow f \text{ nilpotent} \quad \text{et}$$

$$D(f) = \mathrm{Spec}(A) \Leftrightarrow f \text{ inversible.}$$

2. Montrer que si $f, g \in A$, alors

$$D(g) \subset D(f) \Leftrightarrow \exists h \in A, \exists k \in \mathbb{Z}_{>0}, g^k = hf \Leftrightarrow f/1 \in A[1/g]^\times.$$

En déduire une application canonique $A[1/f] \to A[1/g]$.

3. Montrer que si $f_1, \ldots, f_r \in A$, alors

$$\mathrm{Spec}(A) = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_r) \Leftrightarrow \exists h_1, \ldots, h_r \in A, h_1 f_1 + \cdots + h_r f_r = 1.$$

Lemme 2.4.8 Si A est un anneau commutatif, les domaines spéciaux forment une base d'ouverts pour la topologie de $\mathrm{Spec}(A)$. ■

Démonstration. En effet, U est ouvert dans A et son complémentaire est $V(E) = \bigcap_{f \in E} V(f)$, alors $U = \bigcup_{f \in E} D(f)$. ■

Exercice 2.41 Montrer que si S est la partie multiplicative engendrée par E dans un anneau commutatif A, alors les idéaux premiers de A ne rencontrant pas E sont en bijection avec les idéaux premiers de $S^{-1}A$, mais que c'est faux pour les idéaux maximaux.

Proposition 2.4.9

1. Si $\varphi : A \to B$ est un morphisme d'anneaux commutatifs, alors l'application

$$u := \varphi^{-1} : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$$

est (bien définie et) continue.

2. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal d'un anneau commutatif A, alors l'application canonique $A \to A/\mathfrak{a}$ induit un homéomorphisme

$$\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \simeq V(\mathfrak{a}).$$

3. Si A est un anneau commutatif et $f \in A$, alors l'application canonique

$\varphi : A \mapsto A[1/f]$ induit un homéomorphisme

$$\operatorname{Spec}(A[1/f]) \simeq D(f).$$

Démonstration. 1. Si $\mathfrak{q}$ est un idéal de B, on dispose du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A/\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \arrow[r, hook] & B/\mathfrak{q} \end{tikzcd}$$

Si $\mathfrak{q}$ est premier, alors $B/\mathfrak{q}$ est intègre si bien que $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ est nécessairement intègre aussi et $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ est donc premier dans A. Maintenant, si $f \in A$, on a la suite d'équivalences

$$\mathfrak{q} \in D(\varphi(f)) \Leftrightarrow \varphi(f)(\mathfrak{q}) \neq 0 \Leftrightarrow \varphi(f) \notin \mathfrak{q} \Leftrightarrow f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{q})(= u(\mathfrak{q}))$$

$$\Leftrightarrow f(u(\mathfrak{q})) \neq 0 \Leftrightarrow u(\mathfrak{q}) \in D(f) \Leftrightarrow \mathfrak{q} \in u^{-1}(D(f))$$

si bien que

$$u^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f)).$$

Cela montre en particulier que u est continue.

2. Résulte immédiatement du fait que les idéaux premiers ou radicaux de A contenant $\mathfrak{a}$ sont en bijection avec les idéaux premiers ou radicaux de $A/\mathfrak{a}$.
3. Le fait qu'on ait une bijection résulte du fait que les idéaux premiers de A ne contenant pas f sont en bijection avec les idéaux premiers de $A[1/f]$. Enfin, c'est une application ouverte car $D(g/f^n) = D(g/1)$ est envoyé sur $D(g) \cap D(f)$. ■

Exercice 2.42 Montrer que si X est un espace topologique normal, Y est un espace topologique compact et $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a une bijection

$$\mathcal{C}(X, Y) \simeq \operatorname{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathcal{C}(Y, k), \mathcal{C}(X, k)).$$

En, déduire que le foncteur $X \mapsto \mathcal{C}(X, k)$ est pleinement fidèle sur les espaces topologiques compacts.

Rappel 2.4.10 Une k-algèbre A est *de type fini* si elle est isomorphe à un quotient d'une algèbre de polynômes sur k :

$$A \simeq k[t_1, \ldots, t_n]/\mathfrak{a}.$$

Le *théorème des zéros de Hilbert* énonce que si k est un corps, alors une k-algèbre de type fini qui est un corps est nécessairement une extension finie de k ([AM16], exercice 18, page 70).

Exercice 2.43 Montrer que si k est un corps, si $\varphi : A \to B$ est un morphisme de k-algèbres avec B de type fini et si $\mathfrak{m} \subset B$ est un idéal maximal, alors $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ est un idéal maximal. En déduire que le radical d'un idéal d'une algèbre de type fini est l'intersection des idéaux *maximaux* qui le contiennent (c'est ce qu'on appelle un *anneau de Jacobson*).

Exercice 2.44 Montrer que si A est une k-algèbre de type fini, on a une bijection

$$\mathrm{Ouv}(\mathrm{Spec}(A)) \simeq \mathrm{Ouv}(\mathrm{Spm}(A)).$$

En déduire que $\mathrm{Spm}(A)$ est dense dans $\mathrm{Spec}(A)$.

Rappel 2.4.11 Soit X un espace topologique.

1. X est *quasi-compact* si tout recouvrement ouvert $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ admet un sous-recouvrement fini $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_r}$.
2. X est *quasi-séparé* si toute intersection finie d'ouverts quasi-compacts est quasi-compact.
3. X est *cohérent* s'il est quasi-compact, quasi-séparé et possède une base d'ouverts quasi-compacts.
4. X est *irréductible* s'il est non vide et si tout ouvert non vide est dense.
5. Un point $x \in X$ est *générique* si x est dense dans X ($\Rightarrow X$ irréductible).
6. X est *sobre* si tout fermé irréductible possède un unique point générique.
7. X est *spectral* s'il est cohérent et sobre.

Exercice 2.45 Soit k un corps. Montrer que $\mathrm{Spec}(k[t])$ possède un point générique mais pas $\mathrm{Spm}(k[t])$. Montrer qu'ils sont tous les deux irréductibles. Qu'en est-il de $\mathrm{Spec}(k[t,s]/ts)$ et $\mathrm{Spm}(k[t,s]/ts)$?

Exercice 2.46 Montrer qu'un espace topologique non vide X est irréductible si et seulement si pour tous fermés $Y, Z \subset X$ tels que $X = Y \cup Z$, on a nécessairement $Y = X$ ou $Z = X$. Montrer que X est irréductible si et seulement si on ne peut pas écrire $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ avec les X_i fermés et $X_i \subsetneq X$ (c'est la notion intuitive d'irréductibilité).

Exercice 2.47 Montrer qu'un espace quasi-compact X est cohérent si et seulement s'il possède une base d'ouverts quasi-compacts qui est stable par intersection finie.

Lemme 2.4.12 Soit A un anneau commutatif réduit. Alors, $\mathrm{Spec}(A)$ est irréductible si et seulement si A est intègre.

Démonstration. En effet, dire que $\mathrm{Spec}(A)$ est irréductible signifie que pour tout $f, g \in A$, on a

$$(D(f) \neq \emptyset \text{ et } D(g) \neq \emptyset) \Rightarrow D(fg) \neq \emptyset.$$

Comme A est réduit, c'est équivalent à dire que

$$fg = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ ou } g = 0.$$ ∎

Proposition 2.4.13 Si A est un anneau commutatif, alors $\mathrm{Spec}(A)$ est un espace spectral.

Démonstration. Rappelons que les domaines spéciaux $D(f)$ avec $f \in A$ forment une base d'ouverts et que $D(f) \simeq \mathrm{Spec}(A[1/f])$. De plus, pour $f, g \in A$, on a $D(f) \cap D(g) = D(fg)$. Pour montrer que $\mathrm{Spec}(A)$ est toujours cohérent, on est donc ramenés à montrer qu'il est toujours quasi-compact. Or, si on se donne une famille $\{f_i\}_{i\in I}$ d'éléments de A, on a

$$\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{i\in I} D(f_i) \Leftrightarrow \emptyset = V(\{f_i\}_{i\in I}) \Leftrightarrow A = (f_i)_{i\in I}$$

puisque A est l'unique idéal dont le radical est A. Cette dernière condition exprime qu'on peut écrire $1 = g_1 f_{i_1} + \cdots + g_r f_{i_r}$ dans A, ce qui signifie que $\mathrm{Spec}(A) = D(f_{i_1}) \cup \cdots \cup D(f_{i_r})$.

Pour montrer que $\mathrm{Spec}(A)$ est sobre, on rappelle que tout fermé est homéomorphe à $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ avec $\mathfrak{a}$ radical. Il suffit donc de montrer que si A est réduit et $\mathrm{Spec}(A)$ est irréductible, c'est à dire A intègre, alors (0) est l'unique point générique. Dire qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ est générique signifie que

$$\forall f \in A, \quad D(f) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in D(f).$$

Comme A est réduit, on a $D(f) = \emptyset \Leftrightarrow f = 0$. On voit donc que $\mathfrak{p}$ est générique si et seulement si $\mathfrak{p} = (0)$ (qui est bien un idéal premier puisque A est intègre). ■

La réciproque de cette proposition est un théorème difficile de Hochster ([Hoc69]).

Rappel 2.4.14 La *dimension* d'un anneau commutatif A est la longueur maximale d (éventuellement infinie) d'une suite strictement croissante d'idéaux premiers

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_d.$$

Par exemple, la dimension d'un corps est 0, celle d'un anneau principal est 1 et celle de $k[t_1, \ldots, t_d]$ est d si k est un corps quelconque.

2.5 Schéma

La théorie des schémas est présentée par Dieudonné et Grothendieck dans [GD71] (voir aussi [Har77] et [Liu02]).

Lemme 2.5.1 Si A est un anneau commutatif, le préfaisceau

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} : U \mapsto \varprojlim_{D(f)\subset U} A[1/f]$$

est un faisceau sur $\mathrm{Spec}(A)$.

Démonstration. Si l'on désigne tout simplement par $\mathcal{O}$ ce préfaisceau, il s'agit de montrer que si $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ est un recouvrement ouvert d'un ouvert de $\mathrm{Spec}(A)$, on a

$$\mathcal{O}(U) = \varprojlim \left\{ \begin{tikzcd}[column sep=small] \mathcal{O}(U_i) \arrow[dr] & \\ & \mathcal{O}(U_i \cap U_j) \\ \mathcal{O}(U_j) \arrow[ur] & \end{tikzcd} \right\}$$

En utilisant le fait que les limites commutent entres elles, on se ramène immédiatement au cas $U = D(f)$ et $U_i = D(f_i)$. Aussi, par quasi-compacité, on peut supposer que $I = \{1, \ldots, r\}$ est fini. Enfin, quitte à remplacer A par $A[1/f]$, on peut supposer que $f = 1$. L'égalité $\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{i=1}^{r} D(f_i)$ se traduit par l'équation $\sum_{i=1}^{r} h_i f_i = 1$ et il faut montrer que la suite

$$A \to \prod_{i=1}^{r} A[1/f_i] \rightrightarrows \prod_{i,j=1}^{r} A[1/f_i f_i]$$

est exacte à gauche. Par fonctorialité, les deux composés sont identiques. Vérifions que la première flèche est injective : si l'image de $g \in A$ est nulle dans $A[1/f_i]$, cela signifie qu'il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $f_i^{n_i} g = 0$. Quitte à remplacer f_i par $f_i^{n_i}$ (on a toujours $A[1/f^n] = A[1/f]$ si $n \neq 0$), on peut supposer que $f_i g = 0$ et on aura donc

$$g = 1g = \sum_{i=1}^{r} h_i f_i g = 0.$$

On se donne ensuite $g_i / f_i^{n_i} \in A[1/f_i]$ pour $i = 1, \ldots, r$ ayant mêmes images dans $A[1/f_i f_j]$ et il faut trouver $g \in A$ tel que g ait pour image $g_i / f_i^{n_i}$ dans $A[1/f_i]$ pour $i = 1, \ldots, r$. On peut encore supposer que $n_i = 1$ pour $i = 1, \ldots, r$ et notre hypothèse signifie que l'on a $(f_i f_j)^{m_{ij}} (f_i g_j - f_j g_i) = 0$ pour certains entiers naturels m_{ij}, que l'on peut en fait supposer tous égaux au même m (prendre le max). En fait, quitte à remplacer f_i par f_i^{m+1} et g_i par $f_i^m g_i$ pour tout $i = 1, \ldots, r$, ce qui ne change pas g_i / f_i, on peut supposer que $f_i g_j - f_j g_i = 0$. Il suffit alors de poser $g := \sum_{i=1}^{r} h_i g_i$. On aura bien

$$f_j g = \sum_{i=1}^{r} h_i g_i f_j = \sum_{i=1}^{r} h_i f_i g_j = g_j. \qquad \blacksquare$$

On considérera aussi le faisceau analogue $\mathcal{O}_{\mathrm{Spm}(A)}$ mais uniquement lorsque A est une algèbre de type fini sur un corps k.

Théoreme 2.5.2 Le foncteur (contravariant)

$$(X, \mathcal{O}_X) \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

de la catégorie des espaces localement annelés vers celle des anneaux commutatifs est adjoint au foncteur

$$A \mapsto (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}).$$

Démonstration. On commence par montrer que si A est un anneau commutatif, alors l'espace $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ est localement annelé : en effet, on a

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),\mathfrak{p}} = \varinjlim_{\mathfrak{p}\in D(f)} \Gamma\left(D(f), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}\right) = \varinjlim_{f\notin\mathfrak{p}} A[1/f] = A_{\mathfrak{p}}.$$

On remarque ensuite que tout morphisme d'espaces localement annelés

$$(u, u^{-1}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$$

fournit un morphisme d'anneaux

$$\varphi := u^{-1}_{\mathrm{Spec}(A)} : A = \Gamma(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X).$$

On va montrer que l'on obtient ainsi une bijection

$$\mathrm{Hom}((X, \mathcal{O}_X) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})) \simeq \mathrm{Hom}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)).$$

Pour la surjectivité, on se donne un morphisme d'anneaux $\varphi : A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et on pose tout d'abord pour $x \in X$,

$$u(x) := \ker(A \xrightarrow{\varphi} \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_{X,x} \to \kappa(x)).$$

L'application u est continue puisque

$$u^{-1}(D(f)) = \{x \in X \ / \ \varphi(f)(x) \neq 0\}$$

est toujours ouvert. De plus, $\varphi(f)$ est inversible sur cet ouvert. Il suit que φ se prolonge de manière unique en

$$\varphi_f : \Gamma(D(f), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}) = A[1/f] \to \Gamma(u^{-1}(D(f)), \mathcal{O}_X) = \Gamma(D(f), u_*\mathcal{O}_X)$$

et, en passant à la limite sur les ouverts de $\mathrm{Spec}(A)$, on obtient un morphisme de faisceaux d'anneaux $u^{-1} : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} \to u_*\mathcal{O}_X$. Par construction, si on écrit $\mathfrak{p} := u(x)$ on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \arrow[d] \\ A_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "u_x^{-1}"] & \mathcal{O}_{X,x} \end{tikzcd}$$

et $\mathfrak{p}$ est envoyé dans $\mathfrak{m}_{X,x}$ si bien que le morphisme du bas est bien local. On remarque au passage que la construction de $\mathrm{Spec}(A)$ est fonctorielle : il suffit de considérer le cas $X = (\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)})$. Pour l'injectivité, il faut s'assurer que u et u^{-1} sont uniquement déterminé par φ. Or si $u(x) = \mathfrak{p}$, alors nécessairement $u_x^{-1}(\mathfrak{m}_{X,x}) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ et la définition donnée ci-dessus pour u s'impose (considérer le dernier diagramme commutatif). Il en va de même pour u^{-1} puisqu'on on a nécessairement (propriété universelle de la localisation) $u^{-1}_{D(f)} = \varphi_f$ lorsque $f \in A$. ■

Exercice 2.48 Montrer que le foncteur $A \mapsto \text{Spec}(A)$ est un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des anneaux commutatifs vers les espaces localement annelés.

Exercice 2.49 Montrer que si k est un anneau commutatif, alors la catégorie des espaces localement k-annelés est équivalente à la catégorie des espaces localement annelés au dessus de $\text{Spec}(k)$.

On pourra toujours voir un espace localement k-annelé comme étant un espace localement annelé au dessus de $\text{Spec}(k)$.

Définition 2.5.3 Un *schéma affine* (resp. un *schéma*) est un espace localement annelé isomorphe à (resp. localement isomorphe) à $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ ou A est un anneau commutatif.

Exemple Si k est un anneau commutatif, alors l'*espace affine* sur k est

$$\mathbb{A}_k^n := \text{Spec}(k[t_1, \ldots, t_n]).$$

Lorsque k est un corps, on dit que $O := (t_1, \ldots, t_n)$ est l'*origine* de l'espace affine. On écrira plus simplement $\mathbb{A}^n$ lorsque $k = \mathbb{Z}$ et plus généralement $\mathbb{A}_S^n := \mathbb{A}^n \times S$ si S est un schéma (voir plus bas pour les produits de schémas).

Remarque On dit *variété affine* (resp. *variété algébrique*) si A est de type fini sur un corps k. On désigne alors par X_0 l'ensemble des points fermés de X et il y a une bijection entre les ouverts de X et ceux de X_0. On a donc une équivalence entre les faisceaux sur X et les faisceaux sur X_0 et on munit X_0 du faisceau $\mathcal{O}_{X_0}$ correspondant à $\mathcal{O}_X$. En d'autres termes, $(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ est isomorphe (resp. localement isomorphe) à $(\text{Spm}(A), \mathcal{O}_{\text{Spm}(A)})$.

Exercice 2.50 Montrer que $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ est l'objet final et que $\emptyset$ est l'objet initial dans la catégorie des schémas. Montrer que les limites finies existent dans la catégorie des schémas et que

$$\text{Spec}(A) \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(B) \simeq \text{Spec}(A \otimes_R B).$$

Exercice 2.51 Montrer que $\mathbb{A}_k^n \simeq \mathbb{A}_{\text{Spec}(k)}^n$ et que $\mathbb{A}_S^n \simeq \underbrace{\mathbb{A}_S^1 \times_S \cdots \times_S \mathbb{A}_S^1}_{n \text{ fois}}$.

Exercice 2.52 Montrer que les coproduits existent dans la catégorie des schémas et que si $\{A_i\}_{i \in I}$ est une famille d'anneaux commutatifs, on a un isomorphisme

$$\coprod_{i \in I} \text{Spec}(A_i) \simeq \text{Spec}\left(\prod_{i \in I} A_i\right).$$

Exercice 2.53 Montrer que

$$\text{Spec}(\mathbb{C}) \times_{\text{Spec}(\mathbb{R})} \text{Spec}(\mathbb{C}) \simeq \text{Spec}(\mathbb{C}) \coprod \text{Spec}(\mathbb{C}).$$

L'ensemble sous-jacent à un produit de $\mathbb{R}$-schémas est-il le produit des ensembles sous-jacents ?

Définition 2.5.4 Un morphisme de schémas $\iota : Y \hookrightarrow X$ est une *immersion ouverte (resp. fermée)* s'il induit un homéomorphisme entre Y et un ouvert (resp. un fermé) de X ainsi qu'un isomorphisme $\iota^{-1}\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Y$ (resp. un épimorphisme $\mathcal{O}_X \twoheadrightarrow \iota_*\mathcal{O}_Y$). Lorsque ι est l'inclusion d'une partie Y de X, on dit *sous-schéma ouvert (resp. fermé)*.

Attention : tout sous-schéma ouvert (resp. fermé) est bien un sous-objet mais la réciproque est fausse.

Exercice 2.54 Montrer que si A est un anneau commutatif et $f \in A$ (resp. et $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal), alors le morphismes $\mathrm{Spec}(A[1/f]) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ (resp. $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est une immersion ouverte (resp. fermée).

Exercice 2.55 Montrer que si Y est un ouvert de X, il existe à (unique) isomorphisme près une unique structure de sous-schéma ouvert sur Y. Montrer que ce n'est pas le cas lorsque Y est fermé : prendre par exemple $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ et $Y = \{O\}$.

Exercice 2.56 Montrer que le sous-schéma ouvert $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \smallsetminus O$ n'est pas affine. On pourra montrer d'abord que $\Gamma(\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \smallsetminus O, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}}) = \mathbb{C}[t, s]$.

Rappel 2.5.5 Un *anneau gradué* (ou $\mathbb{N}$-gradué) est un anneau A muni de sous-groupes A_d pour $d \in \mathbb{N}$ tels que $A = \oplus_{d\in\mathbb{N}} A_d$ et que $\forall d, e \in \mathbb{N}, A_d A_e \subset A_{d+e}$ (penser aux polynômes). On définit de la même façon un anneau $\mathbb{Z}$-gradué (penser aux fonctions rationnelles). Un élément $f \in A_d$ est dit *homogène* de degré d. Si A est un anneau gradué, alors A_0 est un sous-anneau de A et $A_{>0} = \oplus_{d>0} A_d$ est un idéal de A. Si A est un anneau commutatif gradué et $f \in A$ homogène, alors $A[1/f]$ est seulement un anneau $\mathbb{Z}$-gradué. Un idéal $\mathfrak{a} \subset A$ est *homogène* si $\mathfrak{a} = \oplus_{d\in\mathbb{N}}(\mathfrak{a} \cap A_d)$ ou, de manière équivalente, s'il est engendré par des éléments homogènes. Dans ce cas, $A/\mathfrak{a}$ est naturellement un anneau gradué.

Soit A un anneau commutatif gradué. On désigne par

$$\mathrm{Proj}(A) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \smallsetminus V(A_{>0}) \ / \ \mathfrak{p} \text{ homogène}\}.$$

Exemple $\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[s, t]) = \{(ax+by), a, b \in \mathbb{C}\} \simeq \{\xi\} \cup \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en envoyant $(ax+by)$ sur ξ si $a = b = 0$, sur $-b/a$ si $a \neq 0$ et sur ∞ sinon.

On munit $\mathrm{Proj}(A)$ de la topologie induite. On note $V^+(E) = V(E) \cap \mathrm{Proj}(A)$ si $E \subset A$ et $D^+(f) = D(f) \cap \mathrm{Proj}(A)$ si $f \in A$ est *homogène*. On munit $\mathrm{Proj}(A)$ du (pré-) faisceau

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)} : U \mapsto \varprojlim_{D^+(f) \subset U} A[1/f]_0.$$

Exercice 2.57 Montrer que si A est une k-algèbre graduée, alors $\mathrm{Proj}(A)$ est un k-schéma et que si f est homogène, alors $D^+(f) \simeq \mathrm{Spec}(A[1/f]_0)$.

Définition 2.5.6 Un *schéma projectif* est un schéma isomorphe à $(\mathrm{Proj}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)})$ ou A est un anneau commutatif gradué.

Exemple Si k est un anneau commutatif, alors $\mathbb{P}^n_k := \mathrm{Proj}(k[t_0, \ldots, t_n])$ est l'*espace projectif* sur k. On écrira plus simplement $\mathbb{P}^n$ lorsque $k = \mathbb{Z}$ et on posera $\mathbb{P}^n_S := \mathbb{P}^n \times S$.

Exercice 2.58 Montrer que $\mathbb{P}^n_k \simeq \mathbb{P}^n_{\mathrm{Spec}(k)}$.

Exercice 2.59 Monter que si A est un anneau gradué et $f \in A$ (resp. et $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal) homogène, alors $\mathrm{Spec}(A[1/f]_0)$ (resp. $\mathrm{Proj}(A/\mathfrak{a})$) est un sous-schéma ouvert (resp. fermé) de $\mathrm{Proj}(A)$.

Exercice 2.60 Montrer que $\mathbb{P}^n_S$ peut être recouvert par $n+1$ ouvert tous isomorphes à $\mathbb{A}^n_S$.

Exercice 2.61 Quels sont les ouverts de $\mathbb{P}^1_k$ si k est un corps ?

Exercice 2.62 Montrer que, si k est un corps, alors $\Gamma(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}) = k$. En déduire que $\mathbb{P}^1_k$ n'est pas affine. Généralisation.

Exercice 2.63 En utilisant le théorème de Bézout, montrer qu'il n'existe pas de morphisme non constant $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. En déduire que $\mathbb{P}^2 \not\simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Exercice 2.64 Établir une bijection entre naturelle entre $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et l'ensemble des points fermés de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Théoreme 2.5.7 Si X est une variété algébrique sur $\mathbb{C}$, il existe une variété analytique X^{an} qui est universelle pour les morphismes d'espaces (localement) annelés vers X (au dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$).

Démonstration. Si V est une variété analytique complexe, on dispose de la suite d'isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}(V, \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{C}[t], \Gamma(V, \mathcal{O}_V)) \simeq \Gamma(V, \mathcal{O}_V) \simeq \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}),$$

où $\mathbb{C}$ est munie de sa structure holomorphe. On voit donc que $\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ et on en déduit aisément que $\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$. On montre ensuite que si I est l'idéal de $\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]$ engendré par $f_1, \ldots, f_n$, $A := \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]/I$ et $X = \mathrm{Spec}(A)$, alors X^{an} est la sous-variété analytique de $\mathbb{C}^n$ définie par $f_1, \ldots, f_n$. On montre enfin que si $U \subset X$ est un ouvert quelconque, alors U^{an} est l'ouvert induit sur X^{an}. Le cas général s'en déduit par recollement. ■

On remarquera que, par construction, l'ensemble sous-jacent à X^{an} peut s'identifier à l'ensemble X_0 des points fermés de X.

3. Valuations

Pour la théorie des valuations, une référence classique mais toujours d'actualité est la section 3 du chapitre 6 de [Bou64]. On pourra aussi considérer le chapitre 10 de [Mat89].

3.1 Groupe ordonné

Exercice 3.1
1. Montrer que les ensembles ordonnés et les applications croissantes forment une catégorie **O**rd (voir [Bon71]).
2. Montrer que le foncteur d'inclusion **O**rd $\hookrightarrow$ **C**at possède un adjoint que l'on déterminera.
3. Montrer que le foncteur d'oubli **O**rd $\to$ **E**ns possède un adjoint que l'on déterminera.
4. La catégorie **O**rd a-t-elle un objet final ? des produits finis ? des sous-objets ? Expliciter.

Remarque Si E est un ensemble ordonné par $\leq$, alors E^{op} est le même ensemble ordonné par l'ordre inverse $\geq$. On écrit $x < y$ (ou $y > x$) pour dire que $x \leq y$ et $x \neq y$. Si E est totalement ordonné, alors $x > y$ est la négation de $x \leq y$ (mais ce n'est pas vrai en général). En particulier, une application $\varphi : E \to F$ avec E, F *totalement* ordonnés est croissante si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \varphi(x) < \varphi(y) \Rightarrow x < y.$$

Définition 3.1.1 Un *monoïde ordonné* est un monoïde $(G, \leq)$ de la catégorie des ensembles ordonnés. Si le monoïde (ensembliste) G est un groupe (resp. un groupe abélien), on dit *groupe (resp. groupe abélien) ordonné*. Si l'ordre est total, on dit *totalement ordonné*.

Attention : un groupe ordonné n'est pas un groupe dans la catégorie des ensembles ordonnés (l'inversion n'est pas croissante). Et un monoïde totalement ordonné n'est pas un monoïde de la catégorie des ensembles totalement ordonnés (cette catégorie n'a pas de produits).

On va s'intéresser tout particulièrement aux groupes abéliens totalement ordonnés (que l'on notera généralement additivement).

Remarque On jongle aisément entre notation multiplicative et notation additive avec l'artifice suivant. Si G est un groupe abélien ordonné *additif*, on munit l'ensemble

$$\Gamma := \{\exp(-g) \ : \ g \in G\}$$

de la loi

$$\forall g, h \in G, \quad \exp(-g)\exp(-h) = \exp(-(g+h))$$

et de la relation

$$\forall g, h \in G, \quad \exp(-h) \leq \exp(-g) \Leftrightarrow g \leq h.$$

On obtient ainsi un groupe ordonné multiplicatif et un isomorphisme (avec le groupe ordonné *opposé*)

$$G^{\mathrm{op}} \simeq \Gamma, \quad g \mapsto \exp(-g)$$

de groupes ordonnés. L'opération inverse consiste à poser si Γ est un groupe *multiplicatif*,

$$G := \{-\ln(\gamma) \ : \ \gamma \in \Gamma\},$$

puis

$$\forall \gamma, \delta \in \Gamma, \quad -\ln(\gamma) + (-\ln(\delta)) = -\ln(\gamma+\delta)$$

et enfin

$$\forall \gamma, \delta \in \Gamma, -\ln(\gamma) \leq -\ln(\delta) \Leftrightarrow \delta \leq \gamma.$$

afin d'obtenir l'isomorphisme inverse

$$\Gamma^{\mathrm{op}} \simeq G, \quad \gamma \to -\ln(\gamma).$$

Exercice 3.2 Montrer qu'un groupe abélien G muni d'un ordre $\leq$ est un groupe ordonné si et seulement si

$$\forall g, h, k \in G, \quad g \leq h \Rightarrow g + k \leq h + k,$$

et qu'un morphisme de groupes abéliens ordonnés est un homomorphisme croissant. Plus précisément, montrer que le foncteur d'oublis des groupes abéliens ordonnés vers les couples formés d'un groupe abélien et d'un ensemble ordonné est pleinement fidèle et que la propriété ci-dessus caractérise son image.

Rappel 3.1.2 Si G est un groupe abélien, alors

$$G_{\text{tors}} := \{g \in G \ / \ \exists n \in \mathbb{Z}_{>0}, ng = 0\}$$

est un sous-groupe de G : c'est le noyau de l'application canonique $G \to \mathbb{Q} \otimes G$. On dit que G est *sans torsion* si $G_{\text{tors}} = \{0\}$. C'est équivalent à dire que G s'injecte dans $\mathbb{Q} \otimes G$. Notons qu'un groupe de type fini est sans torsion si et seulement s'il est libre (c'est à dire isomorphe à $\mathbb{Z}^h$).

Exercice 3.3 Montrer que si G est un groupe abélien ordonné (resp. totalement ordonné), alors

$$\forall g, h \in G, \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad g \leq h \Rightarrow \text{(resp. } \Leftrightarrow) \ ng \leq nh.$$

En déduire qu'un groupe abélien totalement ordonné est *sans torsion*.

Exercice 3.4 Montrer que si G est un groupe abélien ordonné (resp. totalement ordonné), alors $G^+ := \{g \in G \ / \ g \geq 0\}$ est un sous-monoïde de G et que, si on pose $G^- := \{-g \ : \ g \in G^+\}$, on a

$$G^+ \cap G^- = \{0\} \quad \text{(resp. et } G^+ \cup G^- = G).$$

Inversement, montrer que si G^+ est un sous-monoïde d'un groupe abélien G satisfaisant ces propriétés, c'est l'ensemble des éléments positifs pour une unique structure de groupe (totalement) ordonné. Montrer qu'un homomorphisme $\varphi : G \to H$ est un morphisme de groupes ordonnés si et seulement si $\varphi(G^+) \subset H^+$. Montrer que si G et H sont totalement ordonnés, alors

$$\varphi^{-1}(H^+) = G^+ + \ker \varphi.$$

L'analogue multiplicatif de G^+ est le disque unité fermé épointé $\{\gamma \in \Gamma \ / \ \gamma \leq 1\}$.

Exercice 3.5 Montrer que la relation définie sur un produit d'ensembles ordonnés $E_1 \times E_2$ par

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < y_1 \text{ ou } (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2)$$

est une relation d'ordre (dite *lexicographique*) et que $E_1 \times E_2$ est totalement ordonné si E_1 et E_2 le sont. Montrer que la projection sur E_1 est croissante mais pas celle sur E_2 (en général).

Exemples
1. Les groupe $(\mathbb{Z}, +, \leq)$,$(\mathbb{R}, +, \leq)$ et $(\mathbb{R}_{>0}, \times, \geq)$ sont des groupes abéliens totalement ordonnés. Les deux derniers sont isomorphes.
2. Si G_1 et G_2 sont deux groupes abéliens totalement ordonnés, alors le groupe $G_1 \times G_2$ est un groupe abélien totalement ordonné pour l'ordre lexicographique. Ce n'est plus vrai pour l'ordre produit.

Exercice 3.6 Montrer que le foncteur d'oubli de la catégorie des groupes abéliens ordonnés vers celle des groupes abéliens possède un adjoint que l'on déterminera. En déduire que cette catégorie possède un objet final, des produits finis et des sous-objets. Expliciter.

Exercice 3.7 Montrer que l'identité est le seul automorphisme des groupes ordonnés $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ (pour l'addition). Montrer que ce n'est pas le cas pour $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec l'ordre lexicographique (considérer par exemple $(m, n) \mapsto (m, m + n)$).

Rappel 3.1.3 Si E est un ensemble ordonné et $x, y \in E$, alors

$$[x, y]_E := \{z \in E \ / \ x \leq z \leq y\}$$

est le *segment* (ou intervalle fermé) d'extrémités x et y dans E. Une partie F de E est *convexe* dans E si

$$\forall x, y \in F, \quad [x, y]_E \subset F.$$

On peut bien sûr utiliser tout aussi bien les intervalles ouverts. Toute intersection de parties convexes est convexe et tout sous-ensemble de E possède donc une *enveloppe convexe*. De plus, si $\varphi : E \to F$ est une application croissante, et B est une partie convexe de F, alors $\varphi^{-1}(B)$ est automatiquement une partie convexe de E.

Exercice 3.8 Montrer qu'un sous-groupe $H \subset G$ d'un groupe abélien totalement ordonné est convexe si et seulement si

$$\forall g_1, g_2 \geq 0, \quad g_1 + g_2 \in H \Leftrightarrow g_1, g_2 \in H$$

(ceci est à rapprocher de la définition d'un idéal premier).

Proposition 3.1.4 Soit E un ensemble totalement ordonné et $\varphi : E \twoheadrightarrow F$ une application surjective. Alors, il existe un ordre sur F rendant φ croissante si et seulement si φ est à fibres convexes. L'ordre est alors unique et total.

Démonstration. Si $x, y \in F$, il existe $x_1, y_1 \in E$ tels que $\varphi(x_1) = x$ et $\varphi(y_1) = y$. Supposons que φ soit croissante pour un certain ordre sur F. Si $x_1 \leq y_1$, alors $x \leq y$ et sinon, comme l'ordre sur E est total, on a $y_1 \leq x_1$ si bien que $y \leq x$. Cela montre que l'ordre est unique et total sur F. Et nous savons que les fibres sont convexes. Inversement, pour définir un ordre sur F, on peut supposer que $x \neq y$ et il suffit alors de montrer que la condition $x_1 \leq y_1$ ne dépend pas du choix de x_1 ou de y_1. Supposons en effet que l'on ait aussi $\varphi(x_2) = x$ mais que $x_2 > y_1$. On aurait alors $x_1 \leq y_1 \leq x_2$, et par convexité, $y = \varphi(y_1) = x$. Contradiction. On fait la même chose de l'autre coté. Pour conclure, on vérifie que c'est bien un ordre. ■

Exercice 3.9 Montrer que si H est un sous-groupe d'un groupe abélien totalement ordonné G, alors il existe une structure de groupe ordonné sur G/H qui fasse de la projection un morphisme de groupes ordonnés si et seulement si H est convexe dans G. De plus, cette structure est unique et l'ordre est total.

Lemme 3.1.5 Si G est un groupe abélien totalement ordonné, alors l'ensemble des sous-groupes convexes de G est totalement ordonné par inclusion.

Démonstration. Supposons que H_1 et H_2 sont deux sous-groupes convexes de G avec $H_2 \not\subset H_1$ et $H_1 \not\subset H_2$. On peut donc trouver $x_1 \in H_1$ et $x_2 \in H_2$ tels que $x_1 \notin H_2$ et $x_2 \notin H_1$. Quitte à prendre les opposés, on peut supposer que $x_1, x_2 \geq 0$ et par symétrie que $x_1 \leq x_2$. On aura donc $0 \leq x_1 \leq x_2$ si bien que $x_1 \in H_2$. Contradiction. ∎

Définition 3.1.6 La *hauteur* d'un groupe abélien ordonné G est la longueur maximale h (éventuellement infinie) d'une suite strictement croissante de sous-groupes convexes

$$G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \cdots \subsetneq G_h.$$

On ne considérera que des groupes totalement ordonnés (y compris dans les exemples).

Exemples 1. La hauteur de $\{0\}$ est 0.
2. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_{>0}$ sont de hauteur 1.
3. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec l'ordre lexicographique est de hauteur 2.
4. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec l'ordre (total) $(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow a + b\sqrt{2} \leq c + d\sqrt{2}$ est de hauteur 1.

Exercice 3.10 Montrer que si $\varphi : E \to F$ est une application croissante surjective d'ensembles *totalement* ordonnés et A une partie convexe de E, alors $\varphi(A)$ est une partie convexe de F. En déduire que si $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ est une suite exacte de groupes abéliens totalement ordonnés, alors $\mathrm{haut}(G) = \mathrm{haut}(G') + \mathrm{haut}(G'')$.

Exercice 3.11 Montrer que si G est un groupe totalement ordonné, alors le sous-groupe convexe engendré par $g \in G$ est

$$H := \{h \in G \ / \ \exists m, n \in \mathbb{Z}, \quad mg \leq h \leq ng\}.$$

Théoreme 3.1.7 — Hölder. Pour un groupe totalement ordonné non nul G, les conditions suivantes sont équivalentes :
1. $\mathrm{haut}(G) = 1$,
2. $\forall g > 0, \forall h \in G, \exists n \in \mathbb{N}, h \leq ng$ (propriété d'Archimède),
3. G est isomorphe à un sous-groupe ordonné de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Pour que G soit de hauteur 1, il faut et suffit que pour tout $g \neq 0$, le sous-groupe convexe engendré par g soit égal à G et on peut supposer $g > 0$ (quitte à le remplacer par $-g$). Ceci est clairement équivalent à la propriété d'Archimède (appliquée à h et $-h$). Il est aussi clair que toute partie de $\mathbb{R}$ satisfait cette propriété. Supposons pour finir qu'elle est satisfaite. On montre alors que, si on fixe $g > 0$, l'application

$$\varphi : G \to \mathbb{R}, \quad h \mapsto \sup\left\{\frac{m}{n} \ : \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_{>0}, mg \leq nh\right\}$$

est bien définie. En effet : pour h fixé, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $h \leq Mg$ et il en résulte que si $mg \leq nh$, on aura $m/n \leq M$ (dans $\mathbb{R}$). On vérifie aisément que φ est un homomorphisme strictement croissant et donc un isomorphisme sur son image qui est un sous-groupe ordonné de $\mathbb{R}$. ■

Exercice 3.12

1. Montrer que (si η est une indéterminée), l'ensemble des monômes à coefficient positif
$$\mathbb{R}_{>0}\eta^{\mathbb{Z}} := \{c\eta^k \ : \ c \in \mathbb{R}_{>0}, k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}[\eta, \eta^{-1}]$$
est un (sous-) groupe pour la multiplication.
2. Montrer qu'il existe une unique structure de groupe ordonné sur $\mathbb{R}_{>0}\eta^{\mathbb{Z}}$ qui prolonge l'ordre de $\mathbb{R}_{>0}$ et tel que
$$\forall c \in \mathbb{R}_{>0}, \quad c < 1 \Rightarrow c < \eta < 1.$$
3. Montrer que $\mathrm{haut}(\mathbb{R}_{>0}\eta^{\mathbb{Z}}) = 2$.

Exercice 3.13 Montrer que tout groupe abélien totalement ordonné de hauteur finie est isomorphe à un sous-groupe ordonné de $\mathbb{R}^n$ muni de l'ordre lexicographique.

Le *spectre (complet)* d'un groupe abélien totalement ordonné est l'ensemble $\mathrm{Sp}(G)$ des sous-groupe convexes de G.

Exercice 3.14 Montrer que l'on obtient une topologie (dite de Zariski) sur $\mathrm{Sp}(G)$ en décrétant comme fermés les ensembles $\{H \ : \ E \subset H\}$ avec $E \subset G$. Montrer que $\mathrm{Sp}(G)$ est un espace topologique irréductible avec un unique point fermé.

3.2 Valuation

Exercice 3.15 Montrer que si G est un groupe abélien (totalement) ordonné et qu'on pose
$$\forall g \in G \cup \{+\infty\}, \quad g + (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad g \leq +\infty,$$
on fait de $G \cup \{+\infty\}$ un monoïde abélien totalement ordonné ayant un plus grand élément. Montrer que si $\varphi : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes abéliens totalement ordonnés, et qu'on le prolonge à l'infini en posant $\varphi(+\infty) = +\infty$, on obtient un morphisme de monoïdes ordonnés.

L'analogue multiplicatif est $\{0\} \cup \Gamma$ (en adjoignant un plus petit élément).

Exercice 3.16 Montrer que si G est un groupe abélien totalement ordonné, les $U \subset G \cup \{+\infty\}$ tels que
$$+\infty \notin U \quad \text{ou} \quad \exists g \in G,]g, +\infty] \subset U$$
sont les ouverts d'une topologie sur $G \cup \{+\infty\}$.

Définition 3.2.1 Une *valuation* sur un anneau commutatif A est une application

$$v : A \to G \cup \{+\infty\}$$

ou G est un groupe abélien totalement ordonné, telle que

1. $v(1) = 0$ et $v(0) = +\infty$,
2. $\forall f, g \in A, \quad v(f+g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$,
3. $\forall f, g \in A, \quad v(fg) = v(f) + v(g)$.

On dira valuation *réelle* lorsque $G = \mathbb{R}$. À la notation additive près, c'est exactement la même chose qu'une *semi-norme ultramétrique multiplicative*.

Exercice 3.17 Montrer que si $f \in A$, alors $v(-f) = v(f)$. Montrer que si $f, g \in A$ satisfont $v(f) > v(g)$, alors $v(f+g) = v(g)$.

Exercice 3.18 Montrer qu'on a toujours $v(n1_A) \geq 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et plus généralement que $v(nf) \geq v(f)$ si $f \in A$.

Rappel 3.2.2 Un élément p d'un anneau intègre A est *premier* si l'idéal (p) est premier non nul. Un anneau intègre A est *factoriel* si tout élément non nul non inversible est produit d'éléments premiers. Alternativement, cela signifie qu'il existe un sous-ensemble $P \subset A$ tel que l'application

$$\mathbb{N}^{(P)} \to (A \smallsetminus \{0\})/A^{\times}, \quad (v_p)_{p \in P} \mapsto \overline{\prod_{p \in P} p^{v_p}}$$

soit bijective (les éléments de P sont alors les éléments irréductibles/premiers de A à multiplication près par un inversible). Notons que la bijection inverse induit pour tout p irréductible, une application

$$v_p : A \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{N}, \quad f \mapsto v_p(f)$$

donnant l'exposant en p.

Exemples

1. Si A est un anneau factoriel et p un élément irréductible de A, on peut prolonger l'application v_p donnant l'exposant en p, en posant $v_p(0) = +\infty$ pour obtenir une valuation v_p, dite *valuation p-adique* sur A (avec $G = \mathbb{Z}$). Celle-ci se prolonge de manière unique au corps de fractions K de A (encore appelée *valuation p-adique*).
2. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier d'un anneau commutatif A, on pose

$$\mathfrak{p}(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f \notin \mathfrak{p} \\ +\infty & \text{si } f \in \mathfrak{p} \end{cases}$$

pour obtenir une valuation sur A (avec n'importe quel groupe G) dite *triviale*. Lorsque $\mathfrak{p} = (p)$ est principal, on écrira $p(f)$.
3. Si A est un anneau commutatif fini (ayant un nombre fini d'éléments), les valuations triviales sont les seules valuations sur A.
4. Si v est une valuation à valeurs dans $G \cup \{+\infty\}$ sur un anneau commutatif A, on obtient une valuation (*de Gauss*) sur $A[t]$ en posant pour un polynôme non

nul $F = \sum_{i=0}^{d} f_i t^i \in A[t]$,

$$v(F) = \min_{i=0}^{d} v(f_i).$$

5. Dans la même situation, en posant

$$v^-(F) = \left(v(F), \min_{v(F)=v(f_i)} i\right) \quad \text{ou} \quad v^+(F) = \left(v(F), -\max_{v(F)=v(f_i)} i\right),$$

on obtient une valuation à valeurs dans $(G \times \mathbb{Z}) \cup \{+\infty\}$ (avec l'ordre lexicographique).

6. On peut mélanger ces différents exemples.
   (a) Si A est un anneau intègre, on dispose de la valuation nulle

$$0(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f \neq 0 \\ +\infty & \text{si } f = 0 \end{cases}.$$

   Si $F \in A[t]$, on aura $0^+(F) = -\deg F$ et $0^-(F) = \operatorname{val} F$ est l'ordre d'annulation de F à l'origine.

   (b) Il existe des valuations sur $\mathbb{Z}[t]$ (resp. sur $k[x, y]$, k un corps) à valeur dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec l'ordre lexicographique : il suffit de prendre un $v_p^\pm$ ou p est un nombre premier (resp. $p = x - a$ avec $a \in k$ et $t = y$).

Rappel 3.2.3 Un anneau intègre A est *euclidien* s'il existe un *stathme euclidien* $N : A \to \{-\infty\} \cup \mathbb{N}$, c'est à dire une application telle que

1. $\forall f \in A, \quad N(f) = -\infty \Leftrightarrow f = 0$,
2. $\forall f, g \in A, \quad N(fg) \leq N(f)$,
3. $\forall f \in A \setminus \{0\}, \forall g \in A, \exists q, r \in A, \quad g = fq + r$ et $N(r) < N(f)$.

Un anneau euclidien est toujours principal (et un anneau principal est toujours factoriel). Par exemple, $N(z) := z\bar{z}$ définit un stathme euclidien sur $\mathbb{Z}[i]$ (attention cependant que les anneaux d'entiers algébriques - même quadratiques - ne sont pas factoriels en général).

Exercice 3.19 Il s'agit d'étudier les prolongements éventuels à $\mathbb{Q}(i)$ des valuations p-adiques de $\mathbb{Q}$.

1. (inerte) Montrer que 3 est premier dans $\mathbb{Z}[i]$. En déduire que v_3 se prolonge à $\mathbb{Q}(i)$.
2. (décomposé) Montrer que $2 + i$ et $2 - i$ sont premiers dans $\mathbb{Z}[i]$. En déduire que v_5 se prolonge de deux manières (au moins) à $\mathbb{Q}(i)$.
3. (ramifié) Montrer que $1 + i$ est premier dans $\mathbb{Z}[i]$. En déduire que v_2 se prolonge à $\mathbb{Q}(i)$.

Exercice 3.20 Soit v une valuation à valeurs dans $G \cup \{+\infty\}$ sur un anneau commutatif A.

1. (valuation de Berkovich) Montrer que si $\rho \in G$, on obtient une valuation sur $A[t]$ en posant pour un polynôme non nul $F = \sum_{i=0}^{d} f_i t^i \in A[t]$,

$$v_\rho(F) = \min_{i=0}^{d}(v(f_i) + i\rho).$$

2. (valuation de Huber) Montrer que si on prolonge v en $\widetilde{v}$ en composant avec l'inclusion $G \hookrightarrow G \times \mathbb{Z}$, alors
$$\widetilde{v}_{(0,1)} = v^- \quad \text{et} \quad \widetilde{v}_{(0,-1)} = v^+.$$
On pourra poser plus généralement $v_\rho^- := \widetilde{v}_{(\rho,1)}$ et $v_\rho^+ := \widetilde{v}_{(\rho,-1)}$. En composant avec une translation $t \mapsto t - c$ à gauche, on obtient de nouvelles valuations $v_{c,\rho}$, $v_{c,\rho}^-$ et $v_{c,\rho}^+$ (et ceci pour tout v sur A).

Définition 3.2.4 Soit $v : A \to G \cup \{+\infty\}$ une valuation.
1. Le *groupe* de la valuation v est le sous-groupe G_v de G engendré par $v(A) \setminus \{+\infty\}$.
2. La *hauteur* de v est la hauteur de G_v.
3. v est *discrète* si $G_v \simeq \mathbb{Z}$ et *triviale* si $G_v = \{0\}$.
4. Le *support* de v est $\operatorname{supp} v := \{f \in A \ / \ v(f) = +\infty\}$.

Remarquons que, comme v est un homomorphisme de monoïdes, $v(A) \setminus \{+\infty\}$ est un sous-monoïde de G et tout élément de G_v s'écrit donc sous la forme $v(f) - v(g)$ avec $f, g \in A$.

Proposition 3.2.5 Si v est une valuation sur A, alors
1. $\operatorname{supp} v$ est un idéal premier de A,
2. si $\mathfrak{a}$ est un idéal contenu dans $\operatorname{supp} v$, alors v se factorise (de manière unique) par $A/\mathfrak{a}$ (et l'application induite est une valuation),
3. si une partie $S \subset A$ ne rencontre pas $\operatorname{supp} v$, alors v se prolonge de manière unique en une valuation sur $S^{-1}A$.

Démonstration. Résulte immédiatement des définitions. ■

On remarquera aussi que la restriction d'une valuation à un sous-anneau est automatiquement une valuation.

Exemples
1. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, la valuation triviale encore notée $\mathfrak{p}$ sur A se factorise par la valuation nulle sur l'anneau intègre $A/\mathfrak{p}$.
2. Les valuations p-adiques sur $\mathbb{Z}$ (dont le support est nul) se prolongent de manière unique à $\mathbb{Q}$. Ce n'est pas le cas des valuations triviales.
3. Si $a \in k$, k un corps, on dispose de la valuation $(t-a)$-adique sur $k[t]$. On la notera v_a et on l'appellera plutôt *valuation a-adique*. On dispose aussi de la valuation définie par $0^+(f) = -\deg f$. On l'appellera *valuation ∞-adique* et on la notera v_∞. Pour $a \in \mathbb{P}^1(k) := k \cup \{\infty\}$, v_a se prolonge de manière unique en une valuation sur $k(t)$.

Si v est une valuation sur A et $\mathfrak{p} := \operatorname{supp} v$, alors v se factorise par $A/\mathfrak{p}$ (resp. se prolonge de manière unique à $A_\mathfrak{p}$), puis se prolonge à (resp. se factorise par) $\kappa(\mathfrak{p})$ qui est simultanément le corps de fractions de l'anneau intègre $A/\mathfrak{p}$ et le corps résiduel de l'anneau local $A_\mathfrak{p}$. On écrira $\kappa(v) := \kappa(\mathfrak{p})$ ainsi que $f(v) := f(\mathfrak{p})$ lorsque $f \in A$. On voit ainsi que $\kappa(v)$ est naturellement muni d'une valuation que l'on préférera voir comme une valeur absolue en utilisant une notation multiplicative (voir plus bas).

3.3 Valeur absolue

Définition 3.3.1 Une *valeur absolue ultramétrique* sur un corps K est une application

$$K \to \{0\} \cup \Gamma, \quad a \mapsto |a|,$$

ou Γ est un groupe abélien totalement ordonné noté multiplicativement, telle que
1. $\forall a \in K, \quad |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
2. $\forall a, b \in K, \quad |a + b| \leq \max\{|a|, |b|\}$ (inégalité ultramétrique),
3. $\forall a, b \in K, \quad |ab| = |a||b|$.

Un corps K muni d'une valeur absolue ultramétrique est un *corps valué.*

Remarques 1. Il revient au même de se donner une valeur absolue *ultramétrique* ou une valuation sur K. L'unique différence est la notation multiplicative ou additive et on peut utiliser le dictionnaire

$$|a| = \exp(-v(a)) \quad \text{et} \quad v(a) = -\ln(|a|).$$

Tout le vocabulaire des valuations s'appliquera.
2. La plupart des auteurs réservent le terme de valeur absolue aux valeurs absolues réelles ($\Gamma = \mathbb{R}_{>0}$) et appellent toujours valuation ce que nous avons appelé valeur absolue ultramétrique – malgré la notation multiplicative.
3. Toute valeur absolue ultramétrique de hauteur au plus 1 est équivalente (voir plus bas) à une valeur absolue réelle.
4. Il revient au même de se donner une valeur absolue ultramétrique ou un homomorphisme de groupes $|-| : K^\times \to \Gamma$ satisfaisant l'inégalité ultramétrique (lorsque $a, b, a + b \neq 0$).

Exemples 1. La *valeur absolue triviale* sur K (avec n'importe quel Γ) est donnée par

$$|a| = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{array} \right. .$$

2. Si A est un anneau intègre de corps de fraction K et v est une valuation sur A, on obtient une valeur absolue sur K en posant

$$\left|\frac{a}{b}\right| := \exp(v(b) - v(a)).$$

Proposition 3.3.2 Si v est une valuation sur un anneau commutatif A, il existe une unique valeur absolue ultramétrique sur $\kappa(v)$ telle que

$$\forall f \in A, \quad |f(v)| = \exp(-v(f)).$$

Démonstration. En effet, on sait que si $\mathfrak{p} := \operatorname{supp} v$, alors v s'étend de manière unique à $A_\mathfrak{p}$ puis se factorise par $k(v)$ et on considère la valeur absolue correspondante. ■

Ainsi $(\kappa(v), |-|)$ est naturellement un corps valué.

Exercice 3.21 Si K est un corps valué, on le munit de la topologie la moins fine rendant la valeur absolue et les translations continues. Montrer que K devient alors un corps topologique et que les *disques ouverts*

$$D(c, \gamma^-) = \{a \in K \ / \ |c - a| < \gamma\}$$

forment une base d'ouverts. Montrer que les *disques fermés*

$$D(c, \gamma^+) = \{a \in K \ / \ |c - a| \leq \gamma\}$$

sont à la fois ouverts et fermés.

Exercice 3.22 Montrer que si K est un corps et $A \subset K$ un sous-anneau, alors la relation de divisibilité $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow ab^{-1} \in A$ (on écrit en fait $b \mid a$) est une relation de préordre sur $K^\times$ et que $K^\times/A^\times$ est un groupe ordonné.

Proposition 3.3.3 Si K est un corps valué, alors $\mathcal{V} := \{a \in K \ / \ |a| \leq 1\}$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m} := \{a \in K \ / \ |a| < 1\}$ et $| - |$ induit un isomorphisme de groupes ordonnés

$$K^\times/\mathcal{V}^\times \simeq \Gamma_{|-|}.$$

Démonstration. Résulte immédiatement des définitions. ∎

Remarquons que l'on a aussi un isomorphisme de monoïdes ordonnés

$$(\mathcal{V} \setminus 0)/\mathcal{V}^\times \simeq \Gamma^+_{|-|}.$$

Définition 3.3.4 On dit que $\mathcal{V}$ est l'*anneau de valuation* du corps valué $(K, | - |)$.

On écrit parfois $K^+ := \mathcal{V}$, $K^{++} := \mathfrak{m}$ et $\overline{K} := K^+/K^{++}$ (noté sinon k).

Exemple Si $\mathbb{Q}$ est muni de la valeur absolue p-adique, son anneau de valuation est

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \{m/n : \quad p \nmid n\},$$

son idéal maximal est

$$p\mathbb{Z}_{(p)} := \{m/n : \ p \mid m, p \nmid n\}$$

et son corps résiduel est (isomorphe à) $\mathbb{F}_p$.

Exercice 3.23 Décrire l'anneau de valuation de $\mathbb{C}(t)$ muni de la valuation a-adique lorsque $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Exercice 3.24 Déterminer l'anneau de valuation de $\mathbb{Q}(t)$ pour l'unique valeur absolue définie pour $f = \sum_{i=0}^d a_i t^i \in \mathbb{Z}[t]$ par

1. $|f|_p = \max_{i=0}^d |a_i|_p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ou
2. $|f|_p^- = \max_{i=0}^d |a_i|_p \eta^i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\eta^{\mathbb{Z}}$ avec $c < \eta < 1$ si $c < 1$.

Exercice 3.25 Si K est un corps, on muni $\mathbb{P}^1(K) := K \cup \{\infty\}$ des lois commutatives *partielles* ($\forall a \neq \infty, a + \infty = \infty$ et $\forall a \neq 0, a \times \infty = \infty$). Une *place* sur K est un homomorphisme *partiel* $\varphi : \mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{P}^1(k)$ ou k est un autre corps ($\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ lorsque le membre de *droite* est défini).

1. Montrer que si $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation de K de corps résiduel k, alors l'application $\varphi : \mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{P}^1(k)$ définie par $\varphi(a) = \overline{a}$ si $a \in \mathcal{V}$ et $\varphi(a) = \infty$ sinon est une place de K.
2. Montrer que, réciproquement, si φ est une place de K, alors $\mathcal{V} := \varphi^{-1}(k)$ est un anneau de valuation de K (et que ces deux constructions sont réciproques l'une de l'autre).

Proposition 3.3.5 Pour un sous-anneau $\mathcal{V}$ d'un corps K, les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation de K,
2. si $a \in K$, on a $a \in \mathcal{V}$ ou $a^{-1} \in \mathcal{V}$,
3. l'ordre est total sur $K^\times/\mathcal{V}^\times$.

Démonstration. Si on se donne une valeur absolue ultramétrique sur K d'anneau de valuation $\mathcal{V}$, on aura toujours $|a| \leq 1$ ou $|a| \geq 1$, c'est à dire $a \in \mathcal{V}$ ou $a^{-1} \in \mathcal{V}$. Supposons maintenant cette condition est satisfaite. Alors si $a, b \in K^\times$ et $ab^{-1} \notin \mathcal{V}$ on aura nécessairement $ba^{-1} = (ab^{-1})^{-1} \in \mathcal{V}$. Cela montre que le préordre correspondant est total sur $K^\times$ et donc que l'ordre est total sur le quotient. Enfin, si l'ordre est total sur $\Gamma := K^\times/\mathcal{V}^\times$, on montre que l'application quotient induit une valeur absolue ultramétrique $|-| : K \to \{0\} \cup \Gamma$ d'anneau de valuation $\mathcal{V}$. C'est un homomorphisme de groupes et il suffit donc de vérifier l'inégalité ultramétrique, c'est à dire que si $ab^{-1} \in \mathcal{V}$, on a bien $(a+b)b^{-1} = ab^{-1} + 1 \in \mathcal{V}$. ■

Corollaire 3.3.6 Si un sous-anneau d'un corps K contient un anneau de valuation de K, c'est lui même un anneau de valuation de K.

Démonstration. Utiliser la seconde condition. ■

Proposition 3.3.7 Soit K un corps valué d'anneau de valuation $\mathcal{V}$ et d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Si on désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-anneaux de K contenant $\mathcal{V}$, on a deux bijections décroissantes

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{V}) \simeq \mathcal{A}, \quad \mathfrak{p} \mapsto \mathcal{V}_{\mathfrak{p}} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} \simeq \mathrm{Sp}(\Gamma_{|-|}), \quad A \mapsto |A^\times|$$

On rappelle qu'on utilise Sp pour désigner l'ensemble des sous-groupes convexes.

Démonstration. On peut bien sûr supposer que $\Gamma_{|-|} = \Gamma$. Si $A \in \mathcal{A}$, et qu'on pose $\Delta := |A^\times|$, on dispose d'un isomorphisme de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A^\times/\mathcal{V}^\times & \longrightarrow & K^\times/\mathcal{V}^\times & \longrightarrow & K^\times/A^\times & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\
0 & \longrightarrow & \Delta & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & \Gamma/\Delta & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

de groupes ordonnés. En particulier, Δ est bien un sous-groupe convexe et la seconde application de la proposition est bien définie. Désignons maintenant par $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de A (qui est un anneau de valuation puisqu'il contient $\mathcal{V}$). On a nécessairement $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$: en effet, dire que $a \in \mathfrak{p}$ signifie que $a^{-1} \notin A$ (ou $a = 0$), ce qui implique que $a^{-1} \notin \mathcal{V}$, qui signifie à son tour que $a \in \mathfrak{m}$. En particulier, on voit que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \cap \mathcal{V}$ est un idéal premier de $\mathcal{V}$. Montrons que $\mathcal{V}_\mathfrak{p} = A$. Par définition, on a $\mathcal{V}_\mathfrak{p} = S^{-1}\mathcal{V}$ avec $S := \mathcal{V} \setminus \mathfrak{p} \subset A \setminus \mathfrak{p} = A^\times$ si bien que $\mathcal{V}_\mathfrak{p} \subset A$. Réciproquement, dire que $a \in A$ signifie que $a^{-1} \notin \mathfrak{p}$ (ou $a = 0$). Mais alors, on a soit $a \in \mathcal{V}$ et on a fini, ou alors $a^{-1} \in \mathcal{V}$ si bien que $a^{-1} \in \mathcal{V} \setminus \mathfrak{p} = S$ et donc $a \in \mathcal{V}_\mathfrak{p}$. Cela montre que la première application est surjective et elle est donc en fait bijective car on a toujours $\mathfrak{p} = \mathcal{V} \cap \mathfrak{p}\mathcal{V}_\mathfrak{p}$ (quel que soit l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{V}$). Désignons maintenant par A' l'anneau de valuation de la valeur absolue composée

$$K \to \{0\} \cup \Gamma \xrightarrow{\pi} \{0\} \cup \Gamma/\Delta.$$

Nous allons montrer que $A = A'$. Puisque $A^\times$ est le noyau de l'application composée $K^\times \to \Gamma \to \Gamma/\Delta$, on a nécessairement $A^\times \subset A'$. Et nous savons aussi que $\mathfrak{p} \subset \mathcal{V} \subset A'$. Il suit que $A \subset A'$. Maintenant, dire que $a \in A'$ signifie que $\pi(|a|) \leq 1$, si bien que soit $\pi(|a|) = 1$ et donc $a \in A^\times$ ou alors $\pi(|a|) < 1$, ce qui implique $|a| < 1$ et donc que $a \in \mathfrak{m}$. Nous avons donc aussi $A' \subset A$. Cela montre que A est uniquement déterminé par Δ et on en déduit que la seconde application est injective. Elle est bien sûr aussi surjective car tout sous-groupe convexe donnera naissance à nouvelle valeur absolue dont il suffit de considérer l'anneau de valuation. ■

Comme conséquence de la proposition, on voit que $\mathrm{Spec}(\mathcal{V})$ est totalement ordonné (par inclusion inverse) avec plus grand élément (0) (que l'on note souvent η) qui est l'unique point générique et plus petit élément $\mathfrak{m}$ qui est l'unique point fermé (que l'on note alors s).

Corollaire 3.3.8 On dispose d'un homéomorphisme

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{V}) \simeq \mathrm{Sp}(\Gamma_{|-|}), \quad \mathfrak{p} \mapsto |\mathcal{V}_\mathfrak{p}^\times|. \quad ■$$

Exercice 3.26 Montrer que si K est un corps valué d'anneau de valuation $\mathcal{V}$, alors la valeur absolue établit une bijection entre les idéaux $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{V}$ et les parties U de $\{0\} \cup \Gamma_{|-|}^+$ qui sont *étoilées* à l'origine (ce qui signifie que

$$\forall \gamma \in U, \quad [0, \gamma] \subset U).$$

Rappel 3.3.9 Un idéal d'un anneau commutatif A est *principal* (resp. *de type fini*) s'il peut être engendré par un seul élément (resp. un nombre fini d'éléments). Un anneau A est *principal* (resp. *noethérien*) si tout idéal est principal (resp. de type fini). Un corps est toujours principal et un anneau principal est toujours noethérien. De plus, le théorème de la base de Hilbert stipule que si k est un anneau noethérien, alors toute k-algèbre commutative de type fini est automatiquement noethérienne. Enfin, si tout idéal de type fini de A est principal, on dit que A est *de Bézout* (cela signifie que

$$\forall a, b \in A, \exists d, u, v \in A, \quad d \mid a, d \mid b \text{ et } d = au + bv).$$

En pratique, on réserve les qualificatifs d'anneaux principaux et de Bézout aux anneaux qui sont *intègres*.

Exercice 3.27 Montrer que $k[\{T_i\}_{i=0}^{\infty}]$ n'est pas noethérien. Montrer que le sous-anneau $\mathbb{Z}^{\mathrm{alg}} \subset \mathbb{C}$ de tous les entiers algébriques (racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers) n'est pas noethérien.

Exercice 3.28 Montrer qu'un idéal $\mathfrak{a}$ d'un anneau de valuation $\mathcal{V}$ est de type fini si et seulement s'il est principal si et seulement si $\mathfrak{a} = D(0, \gamma^+)$ avec $\gamma \in \{0\} \cup \Gamma_{|-|}^+$. En particulier, $\mathcal{V}$ est un *anneau de Bézout* .

Exercice 3.29 Montrer qu'un anneau intègre $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation si et seulement si l'ensemble de ses idéaux (ou même seulement de ses idéaux principaux) est totalement ordonné (par inclusion).

Rappelons que si une inclusion d'anneaux locaux $A \subset B$ est un homomorphisme local, on dit que B *domine* A (ça signifie tout simplement que $\mathfrak{m}_A \subset \mathfrak{m}_B$).

Rappel 3.3.10 Si $A \subset B$ est une inclusion d'anneau et $S \subset B$ une partie de B, on notera $A[S]$ le plus petit sous-anneau de B contenant A et S. Ne pas confondre avec un anneau de polynômes : on dispose d'un homomorphisme surjectif $A[\{T_s\}_{s\in S}] \twoheadrightarrow A[S] \subset B$ (qui n'est pas bijectif en général).

Proposition 3.3.11 Tout sous-anneau local A d'un corps K est dominé par un anneau de valuation de K.

Démonstration. Le lemme de Zorn nous assure de l'existence d'un sous-anneau B de K contenant A et qui est maximal pour la propriété $\mathfrak{m}_A B \neq B$. Il existe alors un idéal maximal $\mathfrak{m}$ dans B qui contient $\mathfrak{m}_A B$. Par maximalité de B, on doit avoir $B = B_{\mathfrak{m}}$, et on voit donc que B est un anneau local qui domine A. On peut en fait supposer que A lui même est maximal pour la propriété $\mathfrak{m}_A B \neq B$ et il suffit de montrer que c'est un anneau de valuation de K. Supposons donc qu'il existe $a \in K^\times$ avec $a, a^{-1} \notin A$. Par maximalité, on a $\mathfrak{m}_A A[a] = A[a]$ et $\mathfrak{m}_A A[a^{-1}] = A[a^{-1}]$, ce qui signifie que l'on peut écrire $\sum_{i=0}^{d} b_i a^i = 1$ et $\sum_{i=0}^{e} c_i a^{-i} = 1$ avec $b_i, c_i \in \mathfrak{m}_A$. On peut supposer d, e minimaux pour cette propriété, et par symétrie, que $d \geq e$. En multipliant la seconde somme par a^d puis en divisant par $1 - c_0 \in A^\times$, on peut écrire

$$a^d = \frac{c_1}{1 - c_0} a^{d-1} + \cdots + \frac{c_e}{1 - c_0} a^{d-e},$$

puis remplacer a^d par cette expression dans la première somme pour trouver une équation $\sum_{i=0}^{d-1} b'_i a^i = 1$. Contradiction. ■

Corollaire 3.3.12 Un sous-anneau d'un corps K est un anneau de valuation de K si et seulement si c'est un anneau local qui est maximal pour la domination.

Démonstration. La proposition nous assure que la condition est suffisante. Réciproquement, on sait déjà que, si un anneau de valuation A de K est contenu dans un sous-anneau B de K, alors B est lui même un anneau de valuation de K. Si on suppose que $\mathfrak{m}_A \subset \mathfrak{m}_B$, on aura donc pour $a \in K^\times$,

$$a \in B \Leftrightarrow a^{-1} \notin \mathfrak{m}_B \Rightarrow a^{-1} \notin \mathfrak{m}_A \Leftrightarrow a \in A$$

si bien que $A = B$. ■

Proposition 3.3.13 Pour un anneau intègre $\mathcal{V}$ qui n'est pas un corps, les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation noethérien,
2. $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation discrète,
3. $\mathcal{V}$ est un anneau local principal.

Démonstration. Puisque dans un anneau de valuation, tous les idéaux de type fini sont principaux, il suffit de montrer que les deux dernières conditions sont équivalentes. Remarquons alors que, pour un anneau qui n'est pas un corps, être à la fois principal et local, c'est la même chose qu'être un anneau factoriel ayant, à multiplication par un inversible près, un unique élément irréductible (un générateur de l'idéal maximal). Cela signifie qu'il existe un isomorphisme de monoïdes ordonnés $\mathbb{N} \simeq (\mathcal{V} \setminus \{0\})/\mathcal{V}^\times$, ou de manière équivalente, un isomorphisme de groupes ordonnés $\mathbb{Z} \simeq K^\times/\mathcal{V}^\times$ (vérifier). ■

Exemple Si k est un anneau commutatif, alors le k-module formé des suites infinies

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i := (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

(c'est une *notation*) d'éléments de k, muni du *produit de convolution*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j := \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \text{ avec } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j,$$

est une k-algèbre $k[[t]]$ que l'on appelle *anneau (ou algèbre) de séries formelles*. Si k est un corps, alors $k[[t]]$ est un anneau de valuation discrète (complet - voir plus loin) dont le corps de fractions est noté $k((t))$.

3.4 Spectre valuatif

Exercice 3.30 Montrer que si $\varphi : G \to G'$ est un morphismes de groupes totalement ordonnés et que $v : A \to G \cup \{+\infty\}$ est une valuation sur A, alors $\varphi \circ v$ est aussi une valuation sur A (on pose $\varphi(+\infty) = +\infty$).

Définition 3.4.1 Deux valuations $v : A \to G \cup \{+\infty\}$ et $v' : A \to G' \cup \{+\infty\}$ sont équivalentes s'il existe des morphismes injectifs de groupes totalement ordonnés

$\varphi : G \hookrightarrow H$ et $G' \hookrightarrow H$ rendant commutatifs le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[d, "v'"] & G \cup \{+\infty\} \arrow[d, hook] \\ G' \cup \{+\infty\} \arrow[r, hook] & H \cup \{+\infty\}. \end{tikzcd}$$

Cela signifie qu'elles deviennent égales quitte à à agrandir les groupes. Mais on peut aussi procéder dans l'autres sens (exercice à suivre).

Exercice 3.31 Montrer que les valuations sont équivalentes si et seulement s'il existe un isomorphisme, nécessairement unique, $\varphi : G_v \simeq G_{v'}$ tel que $\forall a \in A, v'(a) = \varphi(v(a))$.

À équivalence prés, si on se donne une valuation, on peut toujours supposer que $G = G_v$. Pour une valuation triviale, on peut donc supposer que $G_v = G = \{0\}$ et pour une valuation discrète, que $G_v = G = \mathbb{Z}$. Pour une valuation de hauteur au plus un, on supposera plutôt que $G_v \subset G = \mathbb{R}$.

Exercice 3.32 Montrer que les valuations sont équivalentes si et seulement s'il existe une valuation $A \to H \cup \{+\infty\}$ et des homomorphismes injectifs de groupes totalement ordonnés $H \hookrightarrow G$ est un $H \hookrightarrow G'$ rendant commutatifs le diagramme

$$\begin{tikzcd} & G \cup \{+\infty\} \\ A \arrow[ur, bend left, "v"] \arrow[r] \arrow[dr, bend right, "v'"'] & H \cup \{+\infty\} \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] \\ & G' \cup \{+\infty\}. \end{tikzcd}$$

Exercice 3.33 Montrer que deux valuations v et w sont équivalentes si et seulement si

$$\mathrm{supp}(v) = \mathrm{supp}(w) \quad \text{et} \quad \kappa(v)^+ = \kappa(w)^+.$$

Définition 3.4.2 Une *division valuative* sur un anneau A est une relation $|$ dans A qui satisfait $0 \nmid 1$ ainsi que

1. $\forall a, b \in A, \quad a \mid b$ ou $b \mid a$,
2. $\forall a, b, c \in A, \quad a \mid b$ et $b \mid c \Rightarrow a \mid c$,
3. $\forall a, b, c \in A, \quad a \mid b$ et $a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$
4. $\forall a, b \in A, c \in A \setminus \{0\}, \quad a \mid b \Leftrightarrow ac \mid bc$.

On définit plus généralement une *division* en remplaçant les conditions extrêmes par les conditions plus faibles :

(∗) $\forall a \in A, \quad a \mid a$,
(∗∗) $\forall a, b \in A, c \in A \setminus \{0\}, \quad a \mid b \Rightarrow ac \mid bc$.
C'est une relation de préordre (total pour une division valuative).

Exemple La division usuelle dans $\mathbb{Z}$ n'est pas valuative mais on dispose par exemple de la division valuative donnée par $m \mid_2 n$ si et seulement si $m \mid n$ dans $\mathbb{Z}_{(2)}$ (et plus généralement avec p irréductible $\in A$ factoriel à la place de $2 \in \mathbb{Z}$).

Exercice 3.34 Montrer que m divise n dans $\mathbb{Z}$ (au sens usuel) si et seulement si $m \mid_p n$ pour tout nombre premier p.

Exercice 3.35 Montrer que si v est une valuation sur un anneau A, alors la relation définie par

$$a \mid_v b \Leftrightarrow v(a) \leq v(b)$$

est une division valuative. Montrer que $v \sim w$ si et seulement si $\mid_v = \mid_w$.

Rappel 3.4.3 L'inclusion des groupes abéliens dans les monoïdes abéliens possède un adjoint qui est donné par $M \mapsto G$ avec $G = (M \times M)/\sim$ où

$$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow \exists p \in M, m + n' + p = m' + n + p.$$

Le morphisme canonique $M \to G$ est injectif si et seulement si M est *intègre* (et dans ce cas, on peut prendre $p = 0$). On écrit parfois $G = M^{\mathrm{gr}}$.

Exercice 3.36 Montrer que l'inclusion des groupes abéliens ordonnés dans les monoïdes abéliens ordonnés possède un adjoint qui commute avec l'oubli de l'ordre.

Proposition 3.4.4 Si $\mid$ est une division valuative sur un anneau A, alors il existe, à équivalence près, une unique valuation v sur A telle que $\mid = \mid_v$.

Démonstration. Comme A est totalement préordonné relativement à $\mid$, on peut lui associer canoniquement un ensemble totalement ordonné M en prenant le quotient pour la relation d'équivalence

$$f \sim g \Leftrightarrow f \mid g \text{ et } g \mid f.$$

On désigne par $v(f) \in M$ la classe de $f \in A$ on pose $+\infty = v(0)$. On peut munir M d'une structure de monoïde abélien totalement ordonné en posant $v(f)+v(g) = v(fg)$. On remarquer ensuite que $M \setminus \{+\infty\}$ est intègre et on désigne par G le groupe abélien totalement ordonné associé. On obtient ainsi une valuation qui répond à la question. ∎

Exercice 3.37 Montrer qu'un anneau intègre $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation si et seulement si la division usuelle est valuative.

Définition 3.4.5 Si A est un anneau commutatif, le *spectre valuatif* de A est l'ensemble

$$\mathrm{Spv}(A) := \{\text{valuation sur } A\}/\sim$$

des classes d'équivalences de valuations sur A.

En pratique, on dira tout simplement « valuation » au lieu de « classe d'équivalence de valuations ». Notons que l'on a une bijection naturelle entre $\mathrm{Spv}(A)$ et l'ensemble des divisions valuatives sur A.

Exercice 3.38 Établir une bijection entre $\mathrm{Spv}(A)$ et l'ensemble des couples $(\mathfrak{p}, \mathcal{V})$ ou $\mathfrak{p}$ est idéal premier de A et $\mathcal{V}$ un anneau de valuation de $k(\mathfrak{p})$.

Il va aussi être nécessaire de considérer plus généralement, si $E \subset A$, la partie

$$\mathrm{Spv}(A, E) := \{v \in \mathrm{Spv}(A) \ / \quad \forall f \in E, v(f) \geq 0\}$$

de $\mathrm{Spv}(A)$. Notons que la condition s'écrit $1 \mid_v f$ en terme de division valuatives et $f(\mathfrak{p}) \in \mathcal{V}$ en terme d'idéal premier et d'anneau de valuation. En pratique, E sera souvent un sous-anneau (intégralement fermé) de A que l'on désigne souvent par A^+.

Le spectre valuatif s'appelle aussi *espace de Riemann-Zariski* (les deux noms sont parfois échangés) et se note alors $\mathrm{RZ}(A, E)$ (ou $\mathrm{ZR}(A, E)$). On parle aussi parfois de *voûte étoilée*.

Exemples Soit A un anneau commutatif.

1. On a $\mathrm{Spv}(A) = \emptyset \Leftrightarrow A = \{0\}$.
2. On a une bijection
$$\{v \in \mathrm{Spv}(A) \ / \ \mathrm{haut}(v) = 0\} \simeq \mathrm{Spec}(A) \ / \ v \mapsto \mathrm{supp}\, v.$$
3. Si A est fini, on a une bijection $\mathrm{Spv}(A) \simeq \mathrm{Spec}(A)$.
4. Si A est intègre de corps de fractions K, on a une bijection
$$\{v \in \mathrm{Spv}(A) \ / \ \mathrm{supp}\, v = \{0\}\} \simeq \mathrm{Spv}(K).$$
5. Si K est un corps, alors $\mathrm{Spv}(K, K) = \{0\}$ (et réciproquement).

Théoreme 3.4.6 — Ostrowski faible. Les seuls éléments de $\mathrm{Spv}(\mathbb{Q})$ (resp. $\mathrm{Spv}(\mathbb{Z})$) sont la valuation nulle (resp. les valuations triviales) et les valuations p-adiques.

Démonstration. Soit $v : \mathrm{Spv}(\mathbb{Z}) \to G \cup \{+\infty\}$ une valuation non triviale. On sait déjà que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $v(n) \geq 0$. Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ tel que $0 < v(p) \neq +\infty$. Quitte à remplacer p par un de ses facteurs premiers, on peut supposer que p est un nombre premier. Si ℓ est un autre nombre premier, on peut écrire $a\ell + bp = 1$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Comme $v(bp) = v(b) + v(p) > 0 = v(1)$, on a nécessairement

$$v(a) + v(l) = v(al) = v(1 - bp) = v(1) = 0$$

si bien que $v(l) = v(a) = 0$. En considérant l'écriture primaire d'un nombre entier, on en déduit aisément que $v \sim v_p$. Plus précisément, on montre que $v = \varphi \circ v_p$ avec si $\varphi : \mathbb{Z} \hookrightarrow G, 1 \mapsto v(p)$. ■

Le théorème d'Ostrowski traite aussi des valeurs absolues archimédiennes (qui ne nous intéressent pas ici), et c'est la partie difficile.

Exercice 3.39 Montrer que les seuls éléments de $\mathrm{Spv}(\mathbb{C}(t), \mathbb{C})$ sont la valuation nulle et les valuations a-adiques pour $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Exercice 3.40 Montrer que si K est un corps, alors la valuation t-adique est l'unique élément non nul de $\mathrm{Spv}(K((t)), K[[t]])$.

Exercice 3.41 Soit K un corps valué d'anneau de valuation $\mathcal{V}$. Établir une une bijection

$$\mathrm{Spv}(K, \mathcal{V}) \simeq \mathrm{Spec}(\mathcal{V}).$$

Établir de même des bijections $\mathrm{Spv}(\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ainsi que $\mathrm{Spv}(\mathbb{C}(t), \mathbb{C}) \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Un *morphisme* $\varphi : (A, E) \to (B, F)$ est un morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ tel que $\varphi(E) \subset F$.

Exercice 3.42 Montrer que tout morphisme $\varphi : (A, E) \to (B, F)$ fournit une application

$$\varphi^* : \mathrm{Spv}(B, F) \to \mathrm{Spv}(A, E), \quad v \mapsto v \circ \varphi.$$

Exercice 3.43 Soit A un anneau commutatif et $E \subset A$.

1. Montrer que l'application $\mathrm{supp} : \mathrm{Spv}(A, E) \to \mathrm{Spec}(A)$ est naturelle en A et E.
2. Montrer que si $\mathfrak{a} \subset A$ est un idéal (resp. $S \subset A$ est un sous-monoïde), alors le diagramme (d'ensembles)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spv}(A/\mathfrak{a}, \overline{E}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Spv}(A, E) \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \arrow[r, hook] & \mathrm{Spec}(A) \end{tikzcd} \quad \text{(resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathrm{Spv}(S^{-1}A, E/1) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Spv}(A, E) \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(S^{-1}A) \arrow[r, hook] & \mathrm{Spec}(A)) \end{tikzcd}$$

   est cartésien (on a écrit $\overline{E} = \{f \mod \mathfrak{a} \ / \ f \in E\}$ et $E/1 = \{f/1 : \ f \in E\}$).
3. En déduire pour $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, une bijection

$$\mathrm{supp}^{-1}(\mathfrak{p}) \simeq \mathrm{Spv}(k(\mathfrak{p}), E(\mathfrak{p}))$$

   avec $E(\mathfrak{p}) := \{f(\mathfrak{p}) : \ f \in E\}$.
4. En déduire la surjectivité de l'application supp.

Lemme 3.4.7 Si B est un sous-anneau d'un anneau A et $\mathfrak{q} \subset B$ est un idéal premier minimal, alors il existe un idéal premier minimal $\mathfrak{p} \subset A$ tel que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap B$.

Démonstration. Si $S := B \setminus \mathfrak{q}$, alors $S^{-1}B = B_{\mathfrak{q}}$ est un sous-anneau de $S^{-1}A$ qui a $S^{-1}\mathfrak{q}$ pour unique idéal premier (minimal et maximal). Si $\mathfrak{p}' \subset S^{-1}A$ (qui est un anneau non nul) est un idéal premier quelconque, on a donc $\mathfrak{p}' \cap S^{-1}B = S^{-1}\mathfrak{q}$ et en tirant le long de $A \to S^{-1}A$, on trouve un idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ tel que $\mathfrak{p} \cap B = \mathfrak{q}$. Pour conclure, on peut remplacer $\mathfrak{p}$ par n'importe lequel des idéaux premiers minimaux contenus dans $\mathfrak{p}$ (puisque $\mathfrak{q}$ est minimal). ■

On a utilisé le fait que tout idéal premier contient un idéal premier minimal (lemme de Zorn).

Proposition 3.4.8 Si $B \subset A$ est une inclusion d'anneaux et $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(B)$, alors il existe $v \in \mathrm{Spv}(A)$ telle que

$$\begin{cases} \forall g \in B, v(g) \geq 0 \\ \forall g \in \mathfrak{m}, v(g) > 0 \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier minimal de B contenu dans $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de A tel que $\mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{p}$. On dispose alors d'une inclusion d'anneaux intègres $B/\mathfrak{q} \subset A/\mathfrak{p}$. L'anneau local $(B/\mathfrak{q})_{\mathfrak{m}/\mathfrak{q}}$ est dominé par un anneau de valuation $\mathcal{V}$ de $k(\mathfrak{p})$. En particulier, il existe une valuation sur $A/\mathfrak{p}$ qui est positive sur $B/\mathfrak{q}$ et strictement positive sur $\mathfrak{m}/\mathfrak{q}$. Il suffit alors de la composer avec la projection $A \to A/\mathfrak{p}$. ■

On dit alors que v est *centrée* sur B en $\mathfrak{m}$.

Rappel 3.4.9 Soit A un anneau et $B \subset A$ un sous-anneau. On dit que $a \in A$ est *entier* sur B s'il existe un polynôme *unitaire* $F \in B[t]$, tel que $F(b) = 0$. De manière équivalente, cela signifie que le sous-anneau $B[a] \subset A$ engendré par B et a est un B-module (de type) fini. On dit que le sous-anneau B est *intégralement fermé* dans A si tout élément de A qui est entier sur B et déjà dans B. Par exemple $\mathbb{Z}$ est intégralement fermé dans $\mathbb{Q}$ mais $\mathbb{R}$ n'est pas intégralement fermé dans $\mathbb{C}$.

Si A est un anneau commutatif et $Z \subset \mathrm{Spv}(A)$, on pose

$$A^+(Z) := \{f \in A \ / \ \forall v \in Z, v(f) \geq 0\}.$$

Proposition 3.4.10 Les applications $E \mapsto \mathrm{Spv}(A, E)$ et $Z \mapsto A^+(Z)$ induisent une bijection entre les parties de forme $\mathrm{Spv}(A, E)$ de $\mathrm{Spv}(A)$ et les sous-anneaux intégralement fermés dans A.

Démonstration. On vérifie aisément que si $Z \subset \mathrm{Spv}(A)$, alors $A^+(Z)$ est un sous-anneau intégralement fermé dans A et que $Z \subset \mathrm{Spv}(A, A^+(Z))$. Dans le cas ou $Z = \mathrm{Spv}(A, E)$, on a $E \subset A^+(Z)$ et donc $\mathrm{Spv}(A, A^+(Z)) \subset \mathrm{Spv}(A, E)$. Pour conclure, on suppose que $E = B$ est un sous-anneau intégralement fermé dans A et on montre que l'inclusion $B \subset A^+(Z)$ est en fait une égalité. Dans le cas contraire, il existe $f \in A^+(Z)$ tel que $f \notin B$. Considérons alors le localisé $A[1/f]$ et son sous-anneau $B[1/f]$ (engendré par B et $1/f$). Comme B est intégralement fermé dans A, on a nécessairement $f/1 \notin B[1/f]$ et il existe donc un idéal maximal $\mathfrak{m} \subset B[1/f]$ tel que $1/f \in \mathfrak{m}$. En utilisant la proposition 3.4.8, on en déduit qu'il existe une valuation sur $A[1/f]$ qui est positive sur $B[1/f]$ et strictement positive sur $\mathfrak{m}$. En la composant avec l'application $A \to A[1/f]$, on trouve une valuation v qui satisfait $v(g) \geq 0$ si $g \in B$ mais aussi $v(1/f) > 0$ si bien que $v(f) < 0$. Contradiction. ■

Comme conséquence de cette proposition, on voit que si on pose $A^+ = A^+(Z)$, on a $\mathrm{Spv}(A, E) = \mathrm{Spv}(A, A^+)$. Autrement dit, on peut toujours remplacer E par un sous-anneau intégralement fermé A^+ dans A.

3.5 Topologie

Définition 3.5.1 Soient A un anneau commutatif, $E \subset A$ et $X := \mathrm{Spv}(A, E)$. Si $f, g \in A$, alors

$$R(f/g) := \{v \in X \ / \ v(f) \geq v(g) \neq +\infty\}$$

est un *domaine rationnel élémentaire* de X. Un *domaine rationnel* est une intersection finie de domaines rationnels élémentaires.

On pourra remarquer que la condition s'écrit aussi $0 \nmid g \mid f$ en termes de divisions valuatives et $g(\mathfrak{p}) \neq 0$ et $f(\mathfrak{p})/g(\mathfrak{p}) \in \mathcal{V}$ en terme d'idéal premier et d'anneau de valuation.

Exemple Les domaines rationnels de $\mathrm{Spv}(\mathbb{Z})$ sont tous élémentaires. Outre l'espace tout entier, on trouve les unions finies de $\mathrm{Spv}(\mathbb{Z}) \setminus \{p\}$ et $\mathrm{Spv}(\mathbb{Z}) \setminus \{v_p, p\}$ avec p premier.

Exercice 3.44 Décrire les domaines rationnels de $\mathrm{Spv}(\mathbb{Q})$ ainsi que ceux de $\mathrm{Spv}(\mathbb{C}(t), \mathbb{C})$.

Exercice 3.45 Montrer que tout domaine rationnel est de la forme

$$R(f_1, \ldots, f_r/g) := \{v \in X \ / \ v(f_1), \ldots, v(f_r) \geq v(g) \neq +\infty\}.$$

On munit X de la topologie engendrée par les domaines rationnels élémentaires. On voit donc que les domaines rationnels forment une base pour la topologie de X.

Exercice 3.46 Montrer si K est un corps valué d'anneau de valuation $\mathcal{V}$, on a un homéomorphisme $\mathrm{Spv}(K, \mathcal{V}) \simeq \mathrm{Spec}(\mathcal{V})$. Montrer de même que l'on a des homéomorphismes $\mathrm{Spv}(\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ainsi que $\mathrm{Spv}(\mathbb{C}(t), \mathbb{C}) \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Si $S \subset A$, on écrira

$$V(S) := \{v \in \mathrm{Spv}(A, E) \ / \ \forall f \in S, v(f) = +\infty\}.$$

On voit donc que $v \in V(S) \Leftrightarrow S \subset \mathrm{supp}(v)$. En terme de division valuative, cela s'écrit $0 \mid f$ et en terme d'idéal premier (et d'anneau de valuation), c'est $f(\mathfrak{p}) = 0$.

Proposition 3.5.2
1. Si $\varphi : (A, E) \to (B, F)$ est un morphisme, alors l'application

$$u : \mathrm{Spv}(B, F) \to \mathrm{Spv}(A, E), \quad w \mapsto w \circ \varphi$$

est (bien définie et) continue.
2. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A et $E \subset A$, alors $V(\mathfrak{a})$ est fermé dans $\mathrm{Spv}(A, E)$ et si on pose et $\overline{E} = \{f \mod \mathfrak{a} : \ f \in E\}$, on a un homéomorphisme

$$\mathrm{Spv}(A/\mathfrak{a}, \overline{E}) \simeq V(\mathfrak{a}).$$

3. Si $f, g \in A$, on a un homéomorphisme

$$\mathrm{Spv}(A[1/g], E/1 \cup \{f/g\}) \simeq R(f/g).$$

Démonstration. La première assertion résulte du fait que si $f, g \in A$, on a

$$u^{-1}(R(f/g)) = R(\varphi(f)/\varphi(g)).$$

Pour la seconde assertion, on remarque d'abord que si $f \in A$, alors $V(f)$ est fermé car c'est le complémentaire de l'ouvert $R(f, f)$. Et on sait aussi qu'une valuation v sur A se factorise par $A/\mathfrak{a}$ si et seulement si $\mathfrak{a} \subset \mathrm{supp}(v)$. On a donc bien une bijection comme attendu. Et c'est clairement un homéomorphisme.

Pour la dernière assertion, on sait qu'une valuation sur A se prolonge à $A[1/g]$ si et seulement si $g \notin \mathrm{supp}(v)$, c'est à dire $v(g) \neq +\infty$, et que ce prolongement est alors unique. On a donc bien une bijection et c'est aussi clairement un homéomorphisme. ∎

On remarquera dans la dernière assertion l'importance d'introduire le second paramètre E qui s'impose automatiquement dès que l'on veut décrire les ouverts du spectre valuatif.

Rappel 3.5.3

1. La topologie sur un produit d'espaces topologiques $\prod_{i \in I} X_i$ est engendrée par les ouverts

$$\{(x_i)_{i\in I}, \quad x_{i_0} \in U_{i_0}\}$$

lorsque i_0 parcourt I et U_{i_0} parcourt les ouverts de X_{i_0}. Si tous les X_i sont compacts, leur produit aussi (théorème de Tychonov).

2. Topologie de la *convergence simple* : si Y est un espace topologique et X un ensemble, on a une bijection

$$\mathcal{F}(X, Y) \simeq Y^X := \prod_{x \in X} Y, \quad f \mapsto (f(x))_{x\in X}$$

qui munit l'ensemble des applications de X vers Y d'une topologie engendrée par les

$$\{f : X \to Y \ / \ f(x) \in V\}$$

lorsque x parcourt X et V parcourt les ouverts de Y. Si Y est compact, alors $\mathcal{F}(X, Y)$ aussi.

3. Si X est un ensemble et $2 := \{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète, on a une bijection

$$\mathcal{F}(X, 2) \simeq \mathcal{P}(X), \quad f \mapsto f^{-1}(0)$$

qui munit l'ensemble des parties de X d'une topologie engendrée par les

$$\{Y \subset X \ / \ x \in Y\}$$

et leurs complémentaires lorsque x parcourt X (ce sont donc des ouverts fermés). L'espace topologique $\mathcal{P}(X)$ est compact.

4. Si A est un ensemble, on a une bijection $\mathcal{R}(A) \simeq \mathcal{P}(A \times A)$, qui associe son graphe à une relation. On en déduit une topologie sur $\mathcal{R}(A)$ engendrée par les

$$\{\mathcal{R} \ / \ g\mathcal{R}f\}$$

et leurs complémentaires lorsque f, g parcourent A (ce sont encore des ouverts-fermés). De nouveau, c'est un espace compact.

Lemme 3.5.4 Si A est un anneau commutatif et $E \subset A$, alors l'ensemble des divisions valuatives sur A telles que $1 \mid f$ lorsque $f \in E$ est compact pour la topologie engendrée par les

$$\{ \mid \ / \quad g \mid f\}$$

avec $f, g \in A$ ainsi que par leurs complémentaires.

Démonstration. Il s'agit de vérifier que c'est une partie fermée de $\mathcal{R}(A)$. Il suffit pour cela de considérer les conditions qui apparaissent dans la définition d'une division valuative. Or, les conditions ouvertes et fermées sont stables par opération logique et les conditions fermées sont stables par quantification universelle. ∎

Le lemme suivant est un résultat de topologie pure dont on peut ignorer la démonstration en première lecture.

Lemme 3.5.5 — Hochster. Soit X un ensemble muni de deux topologies $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. On suppose que

1. $(X, \mathcal{U})$ est Kolmogorov,
2. $(X, \mathcal{V})$ est compact,
3. $\mathcal{U}$ est engendrée par un ensemble de parties de X qui sont ouvertes et fermées pour $\mathcal{V}$.

Alors, $(X, \mathcal{U})$ est un espace spectral.

Démonstration. Soit Σ un ensemble de parties ouvertes et fermées pour $\mathcal{V}$ qui engendrent $\mathcal{U}$. On peut clairement supposer que Σ est stable par intersection finie. Puisque $\mathcal{V}$ est plus fine que $\mathcal{U}$, toute partie quasi-compacte pour $\mathcal{V}$ l'est aussi pour $\mathcal{U}$. On en déduit que $(X, \mathcal{U})$ est quasi-compact et que Σ est une base d'ouverts quasi-compacts pour $\mathcal{U}$. Puisque $(X, \mathcal{U})$ est Kolmogorov, il reste seulement à montrer que toute partie Z de X qui est fermée irréductible pour $\mathcal{U}$ possède un point générique (pour $\mathcal{U}$). On peut bien sûr supposer que $Z = X \neq \emptyset$ (vérifier). Si $x \in X$ n'est pas dense dans X pour $\mathcal{U}$, il existe une partie non vide U_x de X qui est ouverte pour $\mathcal{U}$ et ne contient pas x. On peut bien sûr supposer que $U_x \in \Sigma$. On désigne alors par Z_x son complémentaire qui est fermé pour $\mathcal{U}$ mais aussi ouvert pour $\mathcal{V}$ et on a $x \in Z_x \subsetneq X$. Si aucun point n'est dense dans X, on peut écrire $X = \bigcup_{x \in X} Z_x$ comme union (a priori infinie) de fermés propres. Mais pour $\mathcal{V}$, X est compact et Z_x

est ouvert. On a donc nécessairement $X = \bigcup_{i=1}^n Z_{x_i}$. Contradiction avec le fait que X est irréductible. ∎

Exercice 3.47 Montrer que, dans le critère de Hochster, $\mathcal{V}$ est nécessairement la topologie *constructible* associée à $\mathcal{U}$: les combinaisons booléennes d'ouverts quasi-compacts pour $\mathcal{U}$ forment une base pour $\mathcal{V}$.

Théoreme 3.5.6 Si A est un anneau commutatif et $E \subset A$, alors $\mathrm{Spv}(A, E)$ est un espace spectral.

Démonstration. On considère l'application canonique

$$\mathrm{Spv}(A) \hookrightarrow \mathcal{R}(A), \quad v \mapsto |_v,$$

et on désigne par $X \subset \mathcal{R}(A)$ l'image de $\mathrm{Spv}(A, E)$. Cet ensemble est muni concomitamment de la topologie image $\mathcal{U}$ et de la topologie induite $\mathcal{V}$. Nous sommes alors en situation d'appliquer le lemme de Hochster. On a montré dans le lemme 3.5.4 que X est compact pour la topologie induite $\mathcal{V}$. D'autre part, la topologie image $\mathcal{U}$ de X est engendrée par les parties de la forme $0 \nmid g \mid f$ qui sont bien ouvertes et fermées pour la topologie induite. Il suffit donc de s'assurer que X, ou de manière équivalente $\mathrm{Spv}(A, E)$, est un espace de Kolmogorov. Or si v et w ne sont pas équivalentes, il existe $f, g \in A$ avec $v(f) \leq v(g)$ et $w(f) > w(g)$. Si $v(f) \neq +\infty$, on a $v \in R(g/f)$ et $w \notin R(g/f)$. Sinon, on a $v(f) = v(g) = +\infty$ si bien que $v \notin R(f/g)$. D'autre part, on a toujours $w \in R(f/g)$. ∎

3.6 Espace valuatif

Exercice 3.48 Soit A un anneau commutatif et $E \subset A$.

1. Montrer que si $f, g \in A$, alors $\mathrm{supp}(R(f/g)) = D(g)$.
2. En déduire que l'application $\mathrm{supp} : \mathrm{Spv}(A, E) \to \mathrm{Spec}(A)$ est continue, surjective et ouverte (une application quotient).

Lemme 3.6.1 Si A est un anneau commutatif et $E \subset A$, alors le préfaisceau

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spv}(A,E)} : U \mapsto \varprojlim_{R(f/g) \subset U} A[1/g]$$

est un faisceau sur $\mathrm{Spv}(A, E)$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\mathcal{O}_{\mathrm{Spv}(A,E)} = \mathrm{supp}^{-1}\left(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}\right)$. ∎

Définition 3.6.2 Un *espace annelé valué* est un espace localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ muni pour tout $x \in X$ d'une classe de valuation v_x sur $\mathcal{O}_{X,x}$ qui est supportée par $\mathfrak{m}_{X,x}$. Un *morphisme d'espaces annelés valués* est un morphisme d'espace localement annelés $u : X \to Y$ tel que pour tout $x \in X$, $v_x \circ u_x^{-1} \sim v_{u(x)}$.

Il revient au même de se donner v_x ou bien un anneau de valuation $\kappa(x)^+$ de $\kappa(x)$. D'autre part, lorsque $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ et $x \in U$, on fera l'abus de noter $v_x(f)$ la valuation de l'image de f dans $\mathcal{O}_{X,x}$.

Exercice 3.49 Montrer que si v est une valuation sur un anneau local A qui est supportée par l'idéal maximal $\mathfrak{m}$, alors

$$A_v^+ := A^+(v) = \{f \in A \ / \ v(f) \geq 0\}$$

est aussi un anneau local d'idéal maximal

$$\mathfrak{m}_v^+ := \{f \in A \ / \ v(f) > 0\}.$$

Soit X est un espace annelé valué, on pose

$$\mathcal{O}_X^+ : U \mapsto \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \ / \ \forall x \in U, v_x(f) \geq 0\}.$$

Exercice 3.50 Montrer que si X est un espace annelé valué, alors $(X, \mathcal{O}_X^+)$ est un espace localement annelé.

Exercice 3.51 Un *espace doublement localement annelé* est un est un triplet $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+)$ où $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(X, \mathcal{O}_X^+)$ sont tous deux des espaces localement annelés et $\mathcal{O}_X^+ \subset \mathcal{O}_X$. Montrer que si X est un espace annelé valué, alors $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+)$ est un espace doublement localement annelé et que l'on obtient ainsi un foncteur pleinement fidèle.

Proposition 3.6.3 On dispose d'une adjonction entre la catégorie des espaces annelés valués et celle des paires (A, A^+) formées d'un anneau commutatif et d'un sous-anneau intégralement fermé, qui est donnée par

$$X \mapsto (\Gamma(X, \mathcal{O}_X), \Gamma(X, \mathcal{O}_X^+))$$

et

$$(A, A^+) \mapsto \mathrm{Spv}(A, A^+).$$

Démonstration. Tout d'abord, $\mathrm{Spv}(A, A^+)$ est bien un espace annelé valué avec $\mathcal{O}_{\mathrm{Spv}(A),v} = A_\mathfrak{p}$ où $\mathfrak{p} = \mathrm{supp}(A)$. Et on voit aisément que tout morphisme $(B, B^+) \to (A, A^+)$ va fournir un morphisme d'espaces annelés valués. De plus, on a bien

$$\Gamma(\mathrm{Spv}(A, A^+), \mathcal{O}_{\mathrm{Spv}(A,A^+)}) = A \quad \text{et} \quad \Gamma(\mathrm{Spv}(A, A^+), \mathcal{O}^+_{\mathrm{Spv}(A,A^+)}) = A^+.$$

Il reste à montrer que si X est un espace annelé valué, alors tout morphisme

$$\varphi : A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

tel que $\varphi(A^+) \subset \Gamma(X, \mathcal{O}_X^+)$ provient d'un unique morphisme $u : X \to \mathrm{Spv}(A)$. Nécessairement, $u(x)$ doit être le composé

$$u(x) : A \xrightarrow{\varphi} \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{v_x} G \cup \{+\infty\}.$$

On vérifie que u est continue en montrant que

$$u^{-1}(R(f/g)) = \{x \in X \ / \ v_x(\varphi(f)_x) \geq v_x(\varphi(g)_x) \neq +\infty\}$$

est ouvert (exercice). Au passage, on montre aussi que $\varphi(g)$ ne s'annule pas sur $u^{-1}(R(f/g))$. On voit donc que φ induit un homomorphisme d'anneaux

$$A[1/g] \to \Gamma(u^{-1}(R(f/g)), \mathcal{O}_X)$$

et on passe à la limite pour obtenir u^{-1}. ■

Corollaire 3.6.4 Le foncteur $(A, A^+) \mapsto \mathrm{Spv}(A, A^+)$ est pleinement fidèle. ■

Définition 3.6.5 Un *espace valuatif* est un espace annelé valué localement isomorphe à $\mathrm{Spv}(A, E)$.

Si X est un espace localement annelé, on désigne par X^{val} l'ensemble des couples (x, v) où $x \in X$ et v est une classe de valuation sur $\mathcal{O}_{X,x}$ supportée par $\mathfrak{m}_{X,x}$. On le munit de la topologie engendrée par les parties

$$\{(x, v) \in X^{\mathrm{val}} \ / \ x \in U, v(f) \geq v(g) \neq 0\},$$

avec U un ouvert dans X et $f, g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$.

Exercice 3.52 Montrer que l'application

$$\mathrm{supp} : X^{\mathrm{val}} \to X, \quad (x, v) \mapsto x,$$

est continue.

On munit X^{val} du faisceau $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{val}}} := \mathrm{supp}^{-1}\mathcal{O}_X$, et si $(x, v) \in X^{\mathrm{val}}$, on munit l'anneau local $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{val}},(x,v)} = \mathcal{O}_{X,x}$ de la valuation v.

Si $u : X \to Y$ est un morphisme d'espaces localement annelés, et $(x, v) \in X^{\mathrm{val}}$, on pose

$$u^{\mathrm{val}}(x, v) = (u(x), (u_x^*)^{-1}(v)) \in Y^{\mathrm{val}}.$$

Exercice 3.53 Montrer que u^{val} est continue.

Par adjonction, le morphisme $u^* : \mathcal{O}_Y \to u_*\mathcal{O}_X$ fournit un morphisme $u^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ que l'on tire en arrière pour obtenir un morphisme

$$u^{\mathrm{val},-1}\mathcal{O}_{Y^{\mathrm{val}}} = u^{\mathrm{val},-1}\mathrm{supp}^{-1}\mathcal{O}_Y = \mathrm{supp}^{-1}u^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathrm{supp}^{-1}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{X^{\mathrm{val}}},$$

et par adjonction $u^{\mathrm{val},-1} : \mathcal{O}_{Y^{\mathrm{val}}} \to u_*^{\mathrm{val}}\mathcal{O}_{X^{\mathrm{val}}}$.

Exercice 3.54 Montrer que l'on obtient ainsi un foncteur $X \mapsto X^{\mathrm{val}}$ de la catégorie des espaces localement annelés vers celle des espaces annelés valués.

Théoreme 3.6.6 Si X est un schéma, alors X^{val} est un espace valuatif et on obtient ainsi un foncteur pleinement fidèle. Lorsque $X = \mathrm{Spec}(A)$, il existe un isomorphisme naturel $\mathrm{Spv}(A) \simeq X^{\mathrm{val}}$.

Démonstration. On commence par la dernière assertion : si A est un anneau, on dispose effectivement d'un isomorphisme naturel d'espace annelé valués (vérifier)

$$\mathrm{Spv}(A) \simeq \mathrm{Spec}(A)^{\mathrm{val}}, \quad v \mapsto (\mathrm{supp}\, v, v).$$

Il suit formellement que si X est un schéma, alors X^{val} est un espace valuatif. Enfin, la pleine fidélité est une question de nature locale et résulte donc de la pleine fidélité des foncteurs $A \mapsto \mathrm{Spec}(A)$ et $A \mapsto \mathrm{Spv}(A)$. ■

Exemples

1. $\mathbb{A}^{n,\mathrm{val}} \simeq \mathrm{Spv}(\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n])$ et $\mathbb{P}^{n,\mathrm{val}}$ sont des espaces valuatifs. Les décrire explicitement est une tout autre affaire.
2. Par contre, le *disque fermé* $\mathbb{D} := \mathrm{Spv}(\mathbb{Z}[t], \mathbb{Z}[t])$ ne provient pas d'un schéma.

4. Espaces adiques

Dans ce dernier chapitre, nous allons considérer les notions de schéma formel de Grothendieck, d'espace adique de Huber et d'espace analytique de Berkovich. Il s'agit essentiellement de remplacer les anneaux des théories précédentes par des anneaux topologiques.

4.1 Schéma formel

La référence standard pour la théorie des schémas formels est le chapitre 10 de [GD71]. La théorie est aussi très bien exposée dans des ouvrages récents bien trop savants comme [Abb10] ou [FK18]. Nous ne traitons ici que le cas des schémas formels *adiques de type idéal fini*.

Rappel 4.1.1 On dit qu'une partie V d'un espace topologique est un *voisinage* d'un point x s'il contient un ouvert qui contient x. On dit qu'un ensemble de voisinages $\{V_i\}_{i\in I}$ d'un point x est un *système fondamental* si tout ouvert U qui contient x contient au moins l'un des V_i.

Exercice 4.1 Soit M un groupe abélien muni d'une suite décroissante de sous-groupes

$$M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n \supset \cdots$$

1. Montrer qu'il existe une unique structure de groupe topologique sur M telle que les M_n forment un système fondamental de voisinages de 0.
2. Montrer qu'un sous-groupe $M' \subset M$ est ouvert si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M_n \subset M'$ (et les M_n sont donc ouverts - et fermés).

3. Montrer que la topologie de M est induite par la semi-norme (ultramétrique)

$$\|x\| = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \notin M_0, \\ e^{-n} & \text{si} \quad x \in M_n \smallsetminus M_{n+1}, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} M_n. \end{cases}$$

4. Montrer qu'une suite (x_n) a pour limite x (resp. est de Cauchy) si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x \equiv x_n \mod M_k$$

$$(\text{resp. } \forall k \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, x_m \equiv x_n \mod M_k).$$

5. Montrer qu'on a un isomorphisme canonique de groupes topologiques

$$\widehat{M} \simeq \varprojlim M/M_n$$

lorsque M/M_n est muni de la topologie discrète. Montrer aussi que $M/M_n \simeq \widehat{M}/\widehat{M}_n$.

Exercice 4.2 Montrer que si I est un idéal d'un anneau commutatif A, il existe une unique topologie d'anneau sur A telle que les puissances I^n de I forment un système fondamental de voisinages de 0. C'est la *topologie I-adique* (on dira π-adique si $A = (\pi)$ est principal).

Exercice 4.3 Montrer que si I est un idéal d'un anneau commutatif A, alors $\widehat{A}$ est un anneau commutatif, que l'on a un isomorphisme d'anneaux $\widehat{A} \simeq \varprojlim A/I^n$ et que pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\widehat{I^n}$ est un idéal de $\widehat{A}$. Montrer cependant que $\widehat{I} \neq I\widehat{A}$ en général (prendre par exemple $A = k[x_1, x_2, \ldots]$, $I = (x_1, x_2, \ldots,)$ et $f = x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \cdots$).

Définition 4.1.2 Un anneau topologique commutatif A est *adique* s'il existe un idéal I *de type fini* dans A tel que la topologie de A soit la topologie I-adique. Un tel idéal est alors appelé *idéal de définition*. Un homomorphisme $A \to B$ entre anneaux adiques est *adique* si IB est un idéal de définition de B.

Attention : nous nous écartons ici du vocabulaire standard en faisant toujours l'hypothèse que I est *de type fini*. Bien sûr, ceci est automatique lorsque A est noethérien. Par contre, nous ne supposons pas que A est *complet*, ni même séparé. Remarquons par contre que si l'on voulait supprimer l'hypothèse que I est de type fini, il serait alors nécessaire de se limiter aux anneaux qui sont complets.

Attention : quand on parle de la *catégorie* des anneaux adiques, on considère tous les homomorphismes continus et pas seulement ceux qui sont adiques (sinon on le précise).

Exemple

1. Un anneau commutatif A muni de la topologie discrète est un anneau adique complet (prendre $I = \{0\}$). On obtient ainsi un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des anneaux dans celle des anneaux adiques (complets).
2. L'anneau $\mathbb{Z}$ muni de la topologie p-adique (p un nombre premier) a pour

complétion l'anneau des *entiers p-adiques*

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{n\geq 0} a_n p^n \ : \ 0 \leq a_n < p \right\} \simeq \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

3. Si R est un anneau commutatif, l'anneau $R[t]$ muni de la topologie t-adique a pour complétion l'anneau des séries formelles $R[[t]]$.
4. L'anneau $\mathbb{Z}[t]$ muni de la topologie p-adique a pour complétion l'anneau

$$\mathbb{Z}_p\{t\} = \left\{ \sum_{i\geq 0} a_i t^i \ : \ v_p(a_i) \to \infty \right\} \subset \mathbb{Z}_p[[t]].$$

5. $\mathbb{Z}_p[[t]]$ est complet pour la topologie (p,t)-adique (et donc aussi pour la topologie p-adique comme pour la topologie t-adique).
6. Pour qu'un corps topologique soit un anneau adique (resp. anneau adique complet) il faut et suffit que la topologie soit discrète ou grossière (resp. discrète).

On supposera *toujours* que $\mathbb{Z}_p$ (resp. $R[[t]]$, resp. $\mathbb{Z}_p\{t\}$, resp. $\mathbb{Z}_p[[t]]$) est muni de la topologie p-adique (resp. t-adique, resp. p-adique, resp. (p,t)-adique).

Exercice 4.4 Soient A et B deux anneaux adiques et I et J des idéaux de définition pour A et B respectivement. Montrer qu'un homomorphisme d'anneaux $A \to B$ est continu si et seulement si IB est ouvert dans B.

Exercice 4.5 Montrer que I et J sont deux idéaux de définition pour A, alors $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ (attention, il se peut que le radical lui même ne soit *pas* de type fini : par exemple $A = \mathbb{Z}^{\text{alg}}$ et $I = (2)$).

Exercice 4.6 Montrer que les colimites finies existent dans la catégorie des anneaux adiques et que le foncteur d'oubli de la topologie est exact à droite (on considérera sur $A \otimes_R B$ l'idéal engendré par les $f \otimes 1$ avec $f \in I$ et les $1 \otimes g$ avec $g \in J$).

Proposition 4.1.3 Si A est un anneau adique, il en va de même de $\widehat{A}$: si I est un idéal de définition pour A, alors on a $\widehat{I} = I\widehat{A}$ et c'est un idéal de définition pour $\widehat{A}$.

Démonstration. Puisque I est de type fini, il en va de même de I^n et on peut donc écrire $I^n := (f_1, \ldots, f_r)$. On considère alors l'application surjective

$$\begin{array}{ccc} A^{\oplus r} & \twoheadrightarrow & I^n \\ (g_1, \ldots, g_r) & \longmapsto & f_1 g_1 + \cdots + f_r g_r. \end{array}$$

En complétant, on trouve encore une application surjective (tout est formel)

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A}^{\oplus r} & \twoheadrightarrow & \widehat{I^n} \\ (g_1, \ldots, g_r) & \longmapsto & f_1 g_1 + \cdots + f_r g_r \end{array}$$

et il suit que $I^n\widehat{A} = \widehat{I^n}$. On conclut alors facilement. ∎

Notons que ce résultat ne serait pas valide sans l'hypothèse que I est *de type fini*.

Exercice 4.7 Montrer que le foncteur $A \mapsto \widehat{A}$ est adjoint au foncteur oubli des anneaux adiques complets vers les anneaux adiques.

Exercice 4.8 Montrer que, dans un anneau adique, un idéal premier est ouvert si et seulement si il contient un idéal de définition et il contient alors tous les idéaux de définition.

Définition 4.1.4 Si A est un anneau adique, alors le *spectre formel* de A est l'ensemble $P := \mathrm{Spf}(A)$ des idéaux premiers ouverts de A.

On munit P de la topologie induite par celle de $\mathrm{Spec}(A)$.

Exemples

1. Si A est un anneau commutatif muni de la topologie discrète, alors $\mathrm{Spf}(A) = \mathrm{Spec}(A)$.
2. On a $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p) = \{(p)\}$ et $\mathrm{Spf}(k[[t]]) = \{(t)\}$ si k est un corps.
3. On a

$$\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p\{t\}) = \{(F, p) \ : \ F \in \mathbb{Z}_p[t] \text{ irréductible} \mod p\}.$$

Exercice 4.9 Montrer que si $\varphi : A \to B$ est un homomorphisme continu d'anneaux adiques, alors $\varphi^{-1} : \mathrm{Spf}(B) \to \mathrm{Spf}(A)$ est bien définie et continue.

Exercice 4.10 Montrer que si A est un anneau adique et I un idéal de définition, alors l'application canonique est un homéomorphisme $\mathrm{Spec}(A/I) \simeq \mathrm{Spf}(A)$. En déduire qu'on a aussi $\mathrm{Spf}(\widehat{A}) \simeq \mathrm{Spf}(A)$.

Exercice 4.11 Montrer que si A est un anneau adique, alors $P := \mathrm{Spf}(A)$ est un espace spectral et que les

$$\mathcal{D}(f) = \{\mathfrak{p} \in P \ / \ f(\mathfrak{p}) \neq 0\}$$

forment une base d'ouverts quasi-compacts.

Définition 4.1.5 Un espace *topologiquement annelé* est un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux topologiques $\mathcal{O}_X$. Un morphisme entre deux espaces topologiquement annelés est un couple formé d'une application continue $u : X \to Y$ et d'un morphisme de faisceaux d'anneaux topologiques $u^* : \mathcal{O}_Y \to u_*\mathcal{O}_X$. Un espace *localement topologiquement annelé* est un espace topologiquement annelé tel que l'espace annelé sous-jacent soit localement annelé. Idem pour les morphismes.

Lemme 4.1.6 Si A est un anneau adique, le préfaisceau

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spf}(A)} : U \mapsto \varprojlim_{\mathcal{D}(f) \subset U} \widehat{A[1/f]}$$

est un faisceau sur $\mathrm{Spf}(A)$.

Démonstration. Comme d'habitude. ■

Définition 4.1.7 Un *schéma formel affine* (resp. *un schéma formel*) *adique* est un espace localement *topologiquement* annelé qui est isomorphe (resp. localement isomorphe) à un $(\mathrm{Spf}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spf}(A)})$.

Exercice 4.12 Montrer que, si A est un anneau adique, on a un isomorphisme de schémas formels $\mathrm{Spf}(\widehat{A}) \simeq \mathrm{Spf}(A)$ (c'est pourquoi on peut en pratique se limiter aux anneaux adiques *complets*).

Exemple

1. Tout schéma (affine) peut être vu comme un schéma formel (affine) : le foncteur d'oubli des espaces localement topologiquement annelés vers les espaces localement annelés possède un adjoint pleinement fidèle qui envoie les schémas (affines) sur des schémas formels (affines). Dans la suite, on fera l'abus de considérer un schéma comme étant un schéma formel.
2. Montrer que les produits fibrés existent dans la catégorie des schémas formels et que l'on a toujours
$$\mathrm{Spf}(A) \times_{\mathrm{Spf}(R)} \mathrm{Spf}(B) \simeq \mathrm{Spf}(A \otimes_R B).$$
3. On peut considérer, si S est un schéma formel, les espaces affines et projectifs formels
$$\mathbb{A}^n_S := \mathbb{A}^n \times S \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^n_S := \mathbb{P}^n \times S$$
(qui sont souvent notés $\widehat{\mathbb{A}}^n_S$ et $\widehat{\mathbb{P}}^n_S$).
4. On pose $\mathbb{A}^{1,-} = \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}[[t]])$ (où $\mathbb{Z}[[t]]$ est muni de la topologie t-adique, on peut aussi bien prendre $\mathbb{Z}[t]$ avec cette topologie) et plus généralement
$$\mathbb{A}^{n,-}_S := \mathbb{A}^{1,-} \times \cdots \times \mathbb{A}^{1,-} \times S.$$

4.2 Espace adique

Rappel 4.2.1 Soit A un anneau topologique commutatif.

1. Un élément f de A est *topologiquement nilpotent* si pour tout voisinage U de 0, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n \in U$ (c'est à dire $f^n \to 0$).
2. Un élément f de A est *borné en puissances* si pour tout voisinage U de 0, il existe un voisinage V de 0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f^n V \subset U$.

Exercice 4.13 Montrer qu'un élément topologiquement nilpotent est toujours borné en puissance.

Définition 4.2.2 Un anneau topologique commutatif A est un *anneau de Huber* [a] s'il existe un sous-anneau ouvert adique [b] $A_0 \subset A$. On dit alors que A_0 est un *anneau de définition* de A et tout idéal de définition I_0 de A_0 est appelé *idéal de définition* de A. On dit que A est un *anneau de Tate* si, de plus, il existe un élément topologiquement nilpotent inversible π. Un homomorphisme d'anneaux $A \to B$ entre deux anneaux de Huber est *adique* s'il induit un homomorphisme adique entre des anneaux de définition.

a. Aussi appelé anneau f-adique.
b. On rappelle que cela implique pour nous qu'il existe un idéal de définition de type fini.

Attention : on dira parfois que A est muni de la topologie I_0-adique : le sous-anneau A_0 sera alors sous-entendu.

Attention : dans la catégorie des anneaux de Huber, un morphisme est simplement un homomorphisme continu et pas nécessairement adique.

Exemples

1. Un anneau adique A est un toujours anneau de Huber d'anneau de définition A lui même. C'est un anneau de Tate si et seulement si la topologie est grossière.
2. Un anneau usuel (avec la topologie discrète) est toujours un anneau de Huber : c'est un cas particulier du cas précédent.
3. On dit qu'un corps topologique K est *non-archimédien* si sa topologie provient d'une valeur absolue de hauteur 1. C'est alors un anneau de Tate.
4. Un corps valué K est un anneau de Huber si et seulement si il est trivial ou non-archimédien (attention, la valeur absolue originale n'est pas nécessairement de hauteur 1).
5. Si k est un corps, alors le corps des fonctions rationnelles $k(t)$, muni de la topologie t-adique, est un corps non-archimédien dont le complété est le corps des séries de Laurent
$$k((t)) = \left\{ \sum_{n>>0} a_n t^n \ : \ a_n \in k \right\}.$$
6. Le corps $\mathbb{Q}$ muni de la topologie p-adique est un corps non-archimédien dont le complété est le corps des *nombres p-adiques*
$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \sum_{n>>0} a_n p^n \ : \ 0 \leq a_n < p \right\} \simeq \mathbb{Q} \otimes \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$
7. L'anneau
$$\mathbb{Q}_p\{t\} = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i t^i \ : \ a_i \in \mathbb{Q}_p, \quad v_p(a_i) \to +\infty \right\}$$
set un anneau de Tate complet (l'archétype).

Exercice 4.14 Montrer qu'un anneau topologique commutatif A est un anneau de Tate si et seulement si il existe un sous-anneau ouvert A_0 et $\pi \in A_0$ tel que la topologie de A_0 soit la topologie π-adique tel que $A = A_0[1/\pi]$.

Proposition 4.2.3 Si A est un anneau de Huber, il en va de même de $\widehat{A}$. De plus, si A_0 un anneau de définition pour A, alors $\widehat{A}_0$ est un anneau de définition pour $\widehat{A}$. Enfin, si A est un anneau de Tate, alors $\widehat{A}$ aussi.

Démonstration. En effet, $\widehat{A}_0$ est un sous-anneau ouvert de $\widehat{A}$ muni de la topologie $I\widehat{A}$-adique. Si $\pi \in A$ est un inversible topologiquement nilpotent, alors il en va de même de son image dans $\widehat{A}$. ■

Si A est un anneau de Huber, on désigne par A° l'union de tous les anneaux de définition et par $A^{\circ\circ}$ l'union de tous les idéaux de définition.

Exercice 4.15 Montrer que si A est un anneau de Huber, alors
1. A° est l'ensemble de tous les éléments bornés en puissance,
2. $A^{\circ\circ}$ est l'ensemble de tous les éléments topologiquement nilpotents.

Définition 4.2.4 Une *paire de Huber* est un couple (A, E) ou A est un anneau de Huber et $E \subset A^\circ$ est une partie quelconque. La fermeture intégrale du sous-anneau engendré par E et $A^{\circ\circ}$ est l'*anneau des éléments entiers* de la paire de Huber (souvent notée A^+). On dira *paire de Tate* si A est un anneau de Tate. On dit que (A, E) est *complète* si A est complet et E est l'ensemble de tous les éléments entiers.

Exemples
1. Si A est un anneau de Huber, alors (A, A°) et $(A, \emptyset)$ sont des paires de Huber. L'anneau des éléments entiers est A° dans le premier cas et c'est la fermeture intégrale de $\mathbb{Z} \cdot 1_A + A^{\circ\circ} \subset A$ dans le second.
2. Si A est un anneau adique, ce qui inclut les anneaux commutatifs usuels (avec la topologie discrète), alors (A, A) est une paire de Huber.
3. Si A est un anneau commutatif et $\pi \in A$ n'est pas diviseur de zéro, alors $(A[1/\pi], A)$ est une paire de Tate et A est l'anneau des éléments entiers.
4. Si K est un corps valué pour une valeur absolue ultramétrique non triviale d'anneau de valuation $\mathcal{V}$, alors $(K, \mathcal{V})$ est une paire de Huber (et donc de Tate) si et seulement si $\mathcal{V}$ possède un idéal de hauteur 1, et $\mathcal{V}$ est alors l'anneau des éléments entiers (mais $\mathcal{V} \neq K^\circ$ en général).

Exercice 4.16 On rappelle (voir exercice 3.16) que si G est un groupe abélien totalement ordonné, alors $G \cup \{+\infty\}$ possède une topologie naturelle. Montrer qu'une valuation v sur un anneau topologique A est continue si et seulement si l'application quotient $A \to \kappa(v)$ est continue.

Définition 4.2.5 Le *spectre adique* d'une paire de Huber (A, E) est l'ensemble $V := \mathrm{Spa}(A, E)$ des classes d'équivalence de valuations continues sur A qui sont positives sur E.

On munit V de la topologie induite par la topologie de $\mathrm{Spv}(A)$.

Exemples
1. Si A est un anneau muni de la topologie discrète et $E \subset A$, alors $\mathrm{Spv}(A, E) = \mathrm{Spa}(A, E)$.
2. On a

$$\mathrm{Spa}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) = \{v_p, p\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p) = \{v_p\}.$$

Exercice 4.17 Montrer que si (A, E) est une paire de Huber, $V := \mathrm{Spa}(A, E)$, et qu'on désigne par A^+ l'anneau des éléments entiers, alors

$$A^+ = \{f \in A \ / \ \forall v \in V, v(f) \geq 0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Spa}(A, A^+) = \mathrm{Spa}(A, E).$$

Définition 4.2.6 Si (A, E) est une paire de Huber et $f_1, \ldots, f_r \in A$ engendrent un idéal ouvert de A, alors

$$R(f_1, \ldots, f_r/g) := \{v \in \mathrm{Spa}(A, E) \ / \quad v(f_1), \ldots, v(f_r) \geq v(g) \neq +\infty\}$$

est un *domaine rationnel* de $V := \mathrm{Spa}(A, E)$.

Attention : la trace sur $\mathrm{Spa}(A, E)$ d'un domaine rationnel de $\mathrm{Spv}(A, E)$ n'est pas nécessairement un domaine rationnel (la topologie de A doit être prise en compte).

Théoreme 4.2.7 Si (A, E) est une paire de Huber, alors $\mathrm{Spa}(A, E)$ est un espace spectral et les domaines rationnels forment une base d'ouverts quasi-compacts stable par intersection finie.

Démonstration. À venir. ■

Exercice 4.18 Montrer que si A est un anneau de Huber et $f_1, \ldots, f_r \in A$ engendrent un idéal ouvert, alors il existe une unique topologie d'anneau sur $B := A[1/g]$ telle que, si A_0 est un anneau de définition pour A et I_0 un idéal de définition, et qu'on pose $B_0 := A_0[f_1/f_0, \ldots, f_r/f_0]$ et $J_0 =: I_0A_0$, alors les J_0^n forment un système fondamental de voisinages de 0 dans B. Monter que B est un anneau de Huber d'anneau de définition B_0 et d'idéal de définition J_0.

Définition 4.2.8 Un espace *topologiquement annelé valué* est un espace localement topologiquement annelé tel que l'espace localement annelé sous-jacent soit valué. Idem pour les morphismes.

Si (A, E) est une paire de Huber, alors le préfaisceau

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A)} : U \mapsto \varprojlim_{\mathcal{R}(f_1,\ldots,f_r/g)\subset U} \widehat{A[1/g]},$$

la limite étant prise sur tous les domaines rationnels, n'est *pas* nécessairement un faisceau sur $\mathrm{Spa}(A, E)$ (voir [BV18] pour une discussion de ce problème).

Définition 4.2.9 Un *espace affinoïde* (resp. *un espace*) *adique* est un espace topologiquement annelé valué qui est isomorphe (resp. localement isomorphe) à un $(\mathrm{Spa}(A, E), \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A)})$.

En particulier, on requiert que $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A)}$ soit un faisceau.

Exemple
1. Tout espace valuatif peut être vu comme un espace adique : on dispose en particulier de $\mathbb{A}^{n,\mathrm{val}}$, $\mathbb{P}^{n,\mathrm{val}}$ et $\mathbb{D}$.
2. Les produits d'espaces adiques n'existent pas toujours mais si O est un espace adique, on peut considérer les espaces affines et projectifs adiques

$$\mathbb{A}^n_O := \mathbb{A}^{n,\mathrm{val}} \times O \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^n_O := \mathbb{P}^{n,\mathrm{val}} \times O.$$

Attention : $\mathbb{A}^n_O$ n'est pas quasi-compact (et pas affinoïde même si O l'est) en général. Il suffit de considérer le cas $O = \mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)$.

3. On aussi peut aussi considérer le *polydisque fermé*

$$\mathbb{D}^n_O = \underbrace{\mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D}}_{n \text{ fois}} \times O$$

Lorsque $O = \mathrm{Spa}(A, E)$, on a en fait

$$\mathbb{D}^n_O = \mathrm{Spa}\left(A[T_1, \ldots, T_n], E[T_1, \ldots, T_n]\right)$$

avec la topologie venant de A.

4. On peut aussi définir le *polydisque ouvert*

$$\mathbb{D}^{n,-}_O := \underbrace{\mathbb{D}^- \times \cdots \times \mathbb{D}^-}_{n \text{ fois}} \times O$$

avec $\mathbb{D}^- := \mathrm{Spa}(\mathbb{Z}[[t]])$. Ici encore, $\mathbb{D}^{n,-}_O$ n'est pas quasi-compact (et en particulier pas affinoïde) en général. Même exemple que ci-dessus.

4.3 Espace de Berkovich

Exercice 4.19 Montrer que la topologie d'un anneau de Huber peut être définie par la semi-norme ultramétrique (d'anneau)

$$\|f\| = \begin{cases} e^n & \text{si} \quad fI_0^n \subset A_0 \text{ mais } fI_0^{n-1} \not\subset A_0, \\ e^{-n} & \text{si} \quad f \in I_0^n \text{ mais } f \notin I^{n+1}, \\ 0 & \text{si} \quad f \in \cap I_0^n. \end{cases}$$

(qui dépend du choix de l'anneau et de l'idéal de définition). Montrer qu'un homomorphisme (continu) d'anneaux de Huber $\varphi : A \to B$ est toujours *borné* :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall f \in A, \|\varphi(f)\| \leq M\|f\|.$$

Exercice 4.20 Montrer qu'un anneau muni d'une semi-norme ultramétrique ayant un inversible topologiquement nilpotent est toujours un anneau de Tate.

Définition 4.3.1 Si A est un anneau semi-normé, le *spectre* de A est l'ensemble $\mathcal{M}(A)$ des semi-normes multiplicatives x sur A qui sont *bornées* :

$$\exists M \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall f \in A, \quad x(f) \leq M\|f\|.$$

Attention, il s'agit bien de toutes les semi-normes multiplicatives et pas seulement à « équivalence » près.

Exercice 4.21 Montrer que la condition est alors satisfaite avec la constante $M = 1$.

Exercice 4.22 Montrer que si A est muni d'une semi-norme ultramétrique, toute semi-norme multiplicative bornée sur A est aussi ultramétrique.

Exercice 4.23 Montrer le *théorème d'Ostrowski* : les semi-normes multiplicatives sur $\mathbb{Z}$ sont

1. les $|-|_\infty^\eta$ avec $0 < \eta \leq 1$ si $|-|_\infty$ désigne la valeur absolue usuelle,
2. la valeur absolue triviale $|-|^0$ qui vaut 1 lorsque $n \neq 0$,
3. les $|-|_p^\eta$ avec p premier et $0 < \eta < \infty$ si $|-|_p$ désigne la valeur absolue p-adique,
4. les valeurs absolues triviales $|-|_p^\infty$ qui valent 1 lorsque $p \nmid n$.

En déduire $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ lorsque $\mathbb{Z}$ est muni de la valeur absolue usuelle $|-|_\infty$.

Exercice 4.24 Soit A un anneau de Tate. Montrer que la formule $v_x(f) = -\log(|f(x)|)$ établit une bijection entre $\mathcal{M}(A)$ et la partie de $\mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ formée des valuations de hauteur 1.

On munit $\mathcal{M}(A)$ de la topologie la moins fine rendant continues les applications $x \mapsto x(f)$ (topologie de la convergence simple).

Proposition 4.3.2 Si A est un anneau semi-normé, alors $\mathcal{M}(A)$ est compact.

Démonstration. Par définition, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(A) &\longrightarrow \textstyle\prod_{f \in A} [0, ||f||] \\ x &\longmapsto (x(f))_{f \in A} \end{aligned}$$

induit un homéomorphisme entre $\mathcal{M}(A)$ et une partie de $\prod_{f\in A}[0, ||f||]$ dont on vérifie aisément qu'elle est fermée (exercice). Il suffit pour conclure d'invoquer de nouveau le théorème de Tychonov nous dit que $\prod_{f\in A}[0, ||f||]$ est compact. ■

Dans ce théorème, il est essentiel de se limiter aux semi-normes multiplicatives qui sont bornées. Par exemple, l'ensemble de toutes les semi-normes mutiplicatives sur $\mathbb{Q}$ n'est pas compact. On peut aussi montrer que $\mathcal{M}(A) \neq \emptyset$ lorsque $A \neq 0$ mais ce n'est pas trivial.

Exercice 4.25 Montrer que $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ est un espace de dimension (réelle) un, compact, connexe par arc et simplement connexe. On pourra montrer que l'on peut toujours relier deux points distincts par un unique segment : étant donnés $x \neq y \in \mathcal{M}(\mathbb{Z})$, il existe un unique $I \subset \mathcal{M}(\mathbb{Z})$ tel qu'il existe un homéomorphisme $[0,1] \simeq I$ envoyant $\{x, y\}$ sur $\{0, 1\}$.

Exercice 4.26 Montrer que tout homomorphisme borné entre algèbres semi-normées $A \to B$ induit une application continue $\varphi^{-1} : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A)$.

Afin de construire les espace de Berkovich en général, il est nécessaire de recoller des compacts, ce qui demande de développer de nouvelles méthodes, ce que nous ne voulons pas faire ici.

Bibliographie

[Abb10] Ahmed ABBES. *Éléments de géométrie rigide. Volume I*. Tome 286. Construction et étude géométrique des espaces rigides. [Construction and geometric study of rigid spaces], With a preface by Michel Raynaud. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2010, pages xvi+477 (cf. page 87).

[AM16] M. F. ATIYAH et I. G. MACDONALD. *Introduction to commutative algebra*. economy. For the 1969 original see [MR0242802]. Westview Press, Boulder, CO, 2016, pages ix+128 (cf. pages 37, 50).

[Ber90] Vladimir G. BERKOVICH. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*. Tome 33. Providence, RI : American Mathematical Society, 1990, pages x+169 (cf. page 7).

[Ber93] Vladimir G. BERKOVICH. “Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces”. In : *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 78 (1993), 5-161 (1994) (cf. page 7).

[Ber98] Vladimir G. BERKOVICH. “p-adic analytic spaces”. In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998)*. Extra Vol. II. 1998, 141-151 (electronic) (cf. page 7).

[Bon71] R. BONNET. “Catégorie et α-catégorie des ensembles ordonnés”. In : *Publ. Dép. Math. (Lyon)* 8.1 (1971), pages 69-90 (cf. page 59).

[Bou64] N. BOURBAKI. *Éléments de mathématique. Fasc. XXX. Algèbre commutative. Chapitre 5 : Entiers. Chapitre 6 : Valuations*. Hermann, Paris, 1964, page 207 (cf. page 59).

[BV18] Kevin BUZZARD et Alain VERBERKMOES. “Stably uniform affinoids are sheafy”. In : *J. Reine Angew. Math.* 740 (2018), pages 25-39 (cf. page 94).

[Duc07] Antoine Ducros. "Espaces analytiques p-adiques au sens de Berkovich". In : *Astérisque* 311 (2007). Séminaire Bourbaki. Vol. 2005/2006, Exp. No. 958, viii, 137-176 (cf. page 7).

[FK18] Kazuhiro Fujiwara et Fumiharu Kato. *Foundations of Rigid Geometry I*. European Mathematical Society, 2018 (cf. page 87).

[GD71] A. Grothendieck et J. A. Dieudonné. *Eléments de géométrie algébrique. I*. Tome 166. Springer-Verlag, Berlin, 1971, pages ix+466 (cf. pages 6, 52, 87).

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. New York : Springer-Verlag, 1977, pages xvi+496 (cf. pages 6, 35, 52).

[Hoc69] M. Hochster. "Prime ideal structure in commutative rings". In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 142 (1969), pages 43-60 (cf. page 52).

[Hub93a] Roland Huber. *Bewertungsspektrum und rigide Geometrie*. Tome 23. Universität Regensburg, Fachbereich Mathematik, Regensburg, 1993, pages xii+309 (cf. page 7).

[Hub93b] Roland Huber. "Continuous valuations". In : *Math. Z.* 212.3 (1993), pages 455-477 (cf. page 7).

[Hub94] Roland Huber. "A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties". In : *Math. Z.* 217.4 (1994), pages 513-551 (cf. page 7).

[KS06] Masaki Kashiwara et Pierre Schapira. *Categories and sheaves*. Tome 332. Springer-Verlag, Berlin, 2006, pages x+497 (cf. page 9).

[Kri07] Jean-Louis Krivine. *Théorie des ensembles*. 2e édition. Numéro 5. Paris : Cassini, 2007 (cf. page 9).

[Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*. Tome 6. Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications. Oxford University Press, Oxford, 2002, pages xvi+576 (cf. pages 6, 35, 52).

[Mat89] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*. Second. Tome 8. Translated from the Japanese by M. Reid. Cambridge University Press, Cambridge, 1989, pages xiv+320 (cf. page 59).

[Sch12] Peter Scholze. "Perfectoid spaces". In : *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 116 (2012), pages 245-313 (cf. page 7).

[Sch13] Peter Scholze. "Perfectoid spaces : a survey". In : *Current developments in mathematics 2012*. Int. Press, Somerville, MA, 2013, pages 193-227 (cf. page 7).