2.4 Exercices

2.4.1 Groupes

Exercice 2.1 — . 1. Montrer que si G est un groupe et $S \subset G$, alors

$$\langle S\rangle = \left\{\prod_{i=1}^{n} s_i^{\pm}, s_i \in S\right\} \quad \text{et} \quad \langle\langle S\rangle\rangle = \left\{\prod_{i=1}^{n} x_i s_i^{\pm} x_i^{-1}, x_i \in G, s_i \in S\right\}.$$

2. Montrer que si

$$G = \langle (x_i)_{i\in I} \mid (r_j = 1)_{j\in J}\rangle \quad \text{et} \quad G' = \langle (x_i)_{i\in I'} \mid (r_j = 1)_{j\in J'}\rangle$$

alors $G \star G' = \langle (x_i)_{i\in I\sqcup I'} \mid (r_j = 1)_{j\in J\sqcup J'}\rangle$.
3. Montrer que $\mathbb{Z}^2 \simeq \langle x, y \mid [x,y] = 1\rangle$ où on a posé $[x,y] := xyx^{-1}y^{-1}$.

Exercice 2.2 Si G est un groupe, on désigne par $[G,G]$ le sous-groupe [a] engendré par les *commutateurs* $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ et on pose $G^{\mathrm{ab}} := G/[G,G]$.
1. Montrer que $[G,G]$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que G est abélien si et seulement si $[G,G] = \{1\}$ si et seulement si l'application $G \to G^{\mathrm{ab}}$ est bijective.
3. Montrer que si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes, alors $f([G,G]) \subset [G',G']$ avec égalité si f est surjectif.
4. En déduire que f induit un morphisme de groupes $f^{\mathrm{ab}} : G^{\mathrm{ab}} \to G'^{\mathrm{ab}}$.
5. Montrer que G^{ab} est abélien.
6. Montrer que si M est un groupe abélien, alors tout morphisme de groupes $G \to M$ se factorise de manière unique par $G \to G^{\mathrm{ab}}$.
7. Montrer que $(\star_{i\in I} G_i)^{\mathrm{ab}} \simeq \oplus_{i\in I} G_i^{\mathrm{ab}}$.
8. Montrer que si L est un groupe libre, alors L^{ab} est un groupe *abélien* libre (c'est-à-dire isomorphe à $\mathbb{Z}^{(I)} = \oplus_{i\in I}\mathbb{Z}$).

a. Appelé *sous-groupe dérivé*.

Exercice 2.3 Montrer que si [a] $n, m \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{Z}^{\star n} \simeq \mathbb{Z}^{\star m} \Leftrightarrow n = m$.

a. C'est vrai aussi pour des cardinaux infinis.

Exercice 2.4 On désigne par D_{2n} le *groupe diédral* des isométries du plan qui préservent le polygone régulier à n cotés et par D_∞ le *groupe diédral infini* des isométries de la droite (réelle) qui préservent l'ensemble des entiers relatifs.
1. Montrer qu'on a des suite exacte $0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{D}_{2n} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ et $0 \to \mathbb{Z} \to \mathrm{D}_\infty \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$.
2. Montrer que

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{2n} &\simeq \langle r, s \mid r^n = 1, s^2 = 1, (sr)^2 = 1\rangle\\ &\simeq \langle t, s \mid t^2 = 1, s^2 = 1, (ts)^n = 1\rangle.\end{aligned}$$

3. Montrer que

$$\mathrm{D}_\infty \simeq \langle t, s \mid t^2 = 1, s^2 = 1\rangle.$$

4. En déduire un morphisme de groupes surjectif $\mathrm{D}_\infty \twoheadrightarrow \mathrm{D}_{2n}$.
5. Montrer que $\mathrm{D}_\infty \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 2.5 Soit G le groupe d'isométries de $\mathbb{R}^2$ engendré par

$$\alpha : (t,s) \mapsto (t+1,s) \quad \text{et} \quad \beta : (t,s) \mapsto (1-t, s+\frac{1}{2}).$$

1. Montrer que $\alpha \circ \beta \circ \alpha = \beta$.
2. En déduire que $\beta \circ \alpha = \alpha^{-1} \circ \beta$, $\beta \circ \alpha^{-1} = \alpha \circ \beta$ et $\beta^2 \circ \alpha = \alpha \circ \beta^2$.
3. Montrer plus généralement que

$$\forall m, k \in \mathbb{Z}, \quad \beta^m \circ \alpha^k = \alpha^{(-1)^m k} \circ \beta^m.$$

4. En déduire que tout élément de G s'écrit de manière unique $\alpha^n \circ \beta^m$ avec $n, m \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que $G^{\mathrm{ab}} = G/\langle \alpha^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Exercice 2.6 Soient $f_1 : H \to G_1$ et $f_2 : H \to G_2$ deux morphismes de groupes.
1. Montrer que si $H = \{1\}$, alors $G_1 \star_H G_2 \simeq G_1 \star G_2$.
2. Monter que si $G_2 = \{1\}$, alors $G_1 \star_H G_2 \simeq \mathrm{coker}(H \xrightarrow{f_1} G_1)$.
3. Montrer que si f_2 est surjectif (resp. bijectif), alors $G_1 \to G_1 \star_H G_2$ aussi.

Exercice 2.7 Montrer qu'on dispose de suites exactes strictes de groupes topologiques :
1. $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times \to 1$,
2. $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to \mathbb{S} \to 1$,
3. $0 \to \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n \to 1$,
4. $0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times \to 1$,
5. $0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{S} \to \mathbb{S} \to 1$.

2.4.2 Groupe fondamental

Exercice 2.8 — . 1. Montrer que si X est un espace topologique et $x \in X$, on a une bijection

$$[(\mathbb{S},1),(X,x)]_1 \simeq \pi_1(X,x), \quad [\widehat{\gamma}] \leftrightarrow [\gamma]$$

(le premier ensemble désigne les applications continues pointées modulo homotopie relativement à 1).

2. Montrer que si γ et γ' sont deux lacets en x, alors $\widehat{\gamma} \sim \widehat{\gamma}'$ si et seulement si $[\gamma]$ et $[\gamma']$ sont conjugués dans $\pi_1(X,x)$.

Exercice 2.9 Montrer que si A est un rétract (continu) de X et $x \in A$, alors les applications induites

$$\pi_1(A,x) \to \pi_1(X,x) \quad \text{et} \quad \pi_1(X,x) \to \pi_1(A,x)$$

sont respectivement injective et surjective. Montrer qu'elle sont bijectives si A est un rétract par déformation.

Exercice 2.10 Soit G un groupe topologique et G_e la composante connexe de l'unité e.

1. Montrer qu'on a une suite exacte (stricte) de groupes (topologiques).

$$1 \to G_e \to G \to \pi_0(G) \to 1.$$

2. On note $*$ la loi de groupe [a] de $\mathcal{C}([0,1], G)$. Montrer que si γ, γ' sont deux lacets en e, alors

$$(\gamma \cdot 1_e) * (1_e \cdot \gamma') = (1_e \cdot \gamma') * (\gamma \cdot 1_e) = \gamma \cdot \gamma'.$$

3. En déduire que $\pi_1(G, e)$ est abélien avec loi de groupe induite [b] par $*$.

---

a. c'est-à-dire $(\gamma * \gamma')(t) = \gamma(t)\gamma'(t)$.
b. c'est-à-dire $[\gamma \cdot \gamma'] = [\gamma * \gamma']$.

Exercice 2.11 — . Soit X un compact étoilé en a et $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}, t \mapsto e^{2i\pi t}$.

1. Montrer que si $f : X \to \mathbb{S}$ est une application continue, alors il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|x - y\| \leqslant \eta$, alors $f(x)/f(y) \neq -1$.
2. En déduire que le groupe $\mathcal{C}((X, a), (\mathbb{S}, 1))$ est engendré par $\mathcal{C}((X, a), (\mathbb{S} \setminus \{-1\}, 1))$.
3. En déduire que si $f : (X, a) \to (\mathbb{S}, 1)$ une application continue, alors il existe une unique application continue $\widetilde{f} : (X, a) \to (\mathbb{R}, 0)$ telle $p \circ \widetilde{f} = f$.

Exercice 2.12 Montrer que l'application $\deg : \pi_1(\mathbb{S}, 1) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 2.13 Montrer que si T est un tore de dimension n, alors $\pi_1(T, 0)$ est un groupe abélien libre de rang n.

Exercice 2.14 Montrer que si $n \leqslant 2$ et $n \neq m$, il n'existe pas d'homéomorphisme $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^m$.

Exercice 2.15 — .
1. Montrer que $\mathbb{S}$ n'est pas un rétract (continu) de $\mathbb{B}^2$.
2. Montrer que l'application

$$F : (\mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2) \setminus \Delta \to \mathbb{S}, \quad (x, y) \mapsto]xy) \cap \mathbb{S}$$

est continue (on a posé $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{B}^2\}$).

3. Montrer que si $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ est une application continue sans point fixe, alors l'application

$$\mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}, \quad x \mapsto F(f(x), x)$$

est une rétraction.

4. En déduire qu'une application continue $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ a un point fixe (théorème de Brouwer).

Exercice 2.16 — . Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme unitaire de degré $n > 0$ sans racine dans $\mathbb{C}$. On pose $f(z) := \frac{P(z)}{\|P(z)\|}$ et on considère, pour $r > 0$, le lacet $\gamma(t) = f(re^{2i\pi t})$ dans $\mathbb{S}$. On considère aussi le lacet standard $\gamma_n(t) := e^{2i\pi nt}$.

1. Montrer que $f \sim_0 f(0) : \mathbb{C} \to \mathbb{S}$ et en déduire que γ est trivial.
2. Montrer que $\lim_{\|z\| \to +\infty} \left(\frac{P(z)}{\|P(z)\|} - \frac{z^n}{\|z^n\|} \right) = 0$.
3. En déduire qu'il existe $r > 0$, tel que $\forall t \in [0,1], |\gamma(t) - \gamma_n(t)| < 2$, et donc que $\gamma(t) \neq -\gamma_n(t)$, puis finalement que $\gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma_n$.
4. Conclure finalement que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos (théorème de D'alembert-Gauss).

Exercice 2.17

1. Déterminer le groupe fondamental de $\mathbb{C}^\times$.
2. Déterminer le groupe fondamental du cylindre
$$X := \{(x, y, z), x^2 + y^2 = 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}.$$
3. Montrer que si L est une droite dans un espace affine E de dimension trois et $x \notin L$, alors $\pi_1(E \setminus L, x) \simeq \mathbb{Z}$.
4. Montrer que la rétraction im $: \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{R}$ n'est pas une rétraction par déformation.

Exercice 2.18 — .

1. Montrer que l'action naturelle de $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{R}^n$ induit une application continue $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ et que f_* a pour matrice A dans la base canonique de $\pi_1(\mathbb{T}^n, 0)$.
2. En déduire que f est bijective si et seulement si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 2.19 Montrer que

1. $\pi_1(\mathrm{SO}_n, 1) \simeq \pi_1(\mathrm{O}_n, 1) \simeq \pi_1(\mathrm{GL}_n, 1)$,
2. En déduire que $\pi_1(\mathrm{GL}_2, 1) \simeq \mathbb{Z}$.

2.4.3 Théorème de van Kampen

Exercice 2.20

1. Montrer (par récurrence sur n) que si $E \subset \mathbb{R}^2$ est un ensemble à n éléments et $x \notin E$, alors $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus E, x) \simeq \mathbb{Z}^{\star n}$.
2. Montrer que si $E \subset \mathbb{S}^2$ est un ensemble à $n > 0$ éléments et $x \notin E$, alors $\pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus E, x) \simeq \mathbb{Z}^{\star(n-1)}$.
3. Montrer que si X est un disque à n trous, alors $\pi_1(X, x) \simeq \mathbb{Z}^{\star n}$.

Exercice 2.21 On suppose $n \geqslant 3$ et on considère la projection stéréographique $p : \mathbb{S}^n \setminus a \simeq \mathbb{R}^n$ avec $a = (0, \ldots, 0, 1)$.

1. Montrer que si $A \subset \mathbb{R}^n$ est bornée, alors p induit un isomorphisme
$$\pi_1(\mathbb{S}^n \setminus p^{-1}(A), x) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus A, p(x)).$$
2. Montrer que p induit des homéomorphismes pour $k = 1, \ldots, n-1$
$$\mathbb{S}^k \times 0 \simeq \mathbb{S}^k \times 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{S}^n \setminus (0 \times \mathbb{S}^k) \simeq \mathbb{R}^n \setminus (0 \times \mathbb{R}^k).$$
3. En déduire le groupe fondamental de $\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{S}^k \times 0)$.