Université de Rennes I **Institut de Mathématiques** **1994-95**

D.E.A. de Mathématiques

Algèbre homologique et théorie des faisceaux

Bernard Le Stum

I. CATEGORIES ET FONCTEURS

1.1. Catégories

Une catégorie C consiste en une collection d'*objets* X (on écrira $X \in C$ bien que C ne soit pas un ensemble en général) et pour tout $X, Y \in C$ d'un ensemble de *morphismes* $Hom_C(X, Y)$. Si $f \in Hom_C(X, Y)$, on dit que X est la *source* de f et Y son *but* et on écrira $f : X \longrightarrow Y$. On se donne une opération qui à $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ associe leurs *composée* $g \circ f : X \longrightarrow Z$ et on demande que l'on ait toujours et $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Enfin, on demande aussi que pour tout $X \in C$, il existe un morphisme *identité* $Id_X : X \longrightarrow X$ tel que l'on ait toujours $Id_Y \circ f = f$ et $f \circ Id_X = f$.

Exemples : i) On dispose de la catégorie **Ens** des ensembles avec pour morphismes les applications et de la catégorie **Top** des espaces topologiques avec pour morphismes les applications continues. Aussi, si G est un monoïde, on peut considérer la catégorie $\boldsymbol{G}$ ayant pour seul objet G et pour morphismes les éléments de G.

ii) On peut considérer les catégories **Mon** des monoïdes, **Gr** des groupes et **Ann** des anneaux. On peut aussi considérer la catégorie A-**mod** (resp. **Mod**-A) des modules à gauche (resp. à droite) sur un anneau (resp. anneau commutatif) A. Comme cas particulier, on trouve la catégories K-**ev** des espaces vectoriels sur un corps K avec les applications linéaires et la catégorie **Ab** des groupes abéliens. On peut aussi considérer les catégories G-**mod** des modules à gauche sur un monoïde G et A-**alg** des algèbres commutatives sur un anneau A. On pourra aussi s'intéresser à la catégorie K-**evf** des K-espaces vectoriels de dimension finie. Enfin, il y a aussi la catégorie $\mathbf{Mat}_A$ dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes $m \longrightarrow n$, les matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans l'anneau A.

iii) On dispose aussi de la catégorie **GrT** des groupes topologiques avec homomorphismes continus et de la catégorie K-**evt** des K-espaces vectoriels topologiques avec applications linéaires continues si K est topologisé. Un autre exemple est fourni par les catégories **Met** (resp. **Comp**) des espaces métriques (resp. métriques complets) avec application uniformément continues ou par la catégorie K-**evn** des espaces vectoriels normés et les applications contractantes sur un corps valué K (par exemple sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

iv) On peut aussi considérer un ensemble partiellement ordonné $(A, \leq)$ comme une catégorie : Les objets sont donc les éléments de A et pour tout α, β de

A, il y a un unique morphisme $\alpha \longrightarrow \beta$ si $\alpha \leq \beta$ et aucun sinon. Comme cas particulier, on peut considérer si X est un espace topologique, l'ensemble $Ouv(X)$ des ouverts de X muni de l'inclusion $\subset$.

Une catégorie est *petite* si ses objets forment un ensemble. Elle est *finie* si (ses objets et) ses morphismes sont en nombre fini. Si C et C' sont deux catégories, la *catégorie produit* est la catégorie ayant pour objets les couples (X, X') d'objets de C et C' et pour morphismes $(X, X') \longrightarrow (Y, Y')$, les couples de morphismes $X \longrightarrow Y$ et $X' \longrightarrow Y'$. On appelle *catégorie duale* de C, la catégorie C^{op} ayant mêmes objets que C obtenue en renversant les flèches. Une *sous-catégorie* C' de C est une catégorie dont tous les objets sont des objets de C et tous les morphismes sont des morphismes de C, les identités et la composition étant induit par ceux de C. On dit que C' est une *sous-catégorie pleine* de C si tout morphisme $X \longrightarrow Y$ de C avec X, $Y \in C'$, est un morphisme de C'.

Exemples : i) La catégorie duale de $(A, \leq)$ est $(A, \geq)$.

ii) Les catégories **Ens**, **Top**, **Mon**, **Gr**, **Ann**, A-**mod** et A-**alg** ne sont pas petites, mais (A, $\leq$) (et donc aussi $Ouv(X)$), $\boldsymbol{G}$ et $\mathbf{Mat}_A$ sont des exemples de petites catégories.

iii) **Ab** est une sous-catégorie pleine de **Gr**, qui est elle même une sous-catégorie pleine de **Mon**.

1.2. Structure interne d'une catégorie

Un *inverse à gauche* (ou une *rétraction*) pour $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme g : $Y \longrightarrow X$ tel que $g \circ f = Id_X$. Un *inverse à droite* (ou une *section)* pour f est un morphisme $h : Y \longrightarrow X$ tel que h soit un inverse à gauche pour f dans C^{op}.

Proposition. Si f possède une rétraction r et une section s, alors $r = s$.

Un *inverse* pour f est un morphisme qui est à la fois un inverse à gauche et à droite. On le note f^{-1}. On dit alors que f est un *isomorphisme* et que X et Y sont *isomorphes*. Enfin, on dit que f est un *monomorphisme* (ou que f fait de X un sous-objet de Y) si $g = h$ chaque fois que $f \circ g = f \circ h$. On dit que f est un *épimorphisme* (ou que f fait de Y un *quotient* de X) si f est un monomorphisme dans C^{op}.

Exemples : i) Dans **Ens**, un monomorphisme est simplement une application injective et elle possède toujours un inverse à gauche. De même, un épimorphisme est une application surjective et elle possède toujours un inverse à droite. Enfin, un isomorphisme est tout simplement une application bijective.

ii) Dans **Top**, **Gr**, **Ann**, A**-mod** et A**-alg**, les monomorphismes sont les morphismes injectifs. Un isomorphisme de **Top** est tout simplement un homéomorphisme. Dans A**-mod**, tout homomorphisme bijectif est un isomorphisme.

Exercices : i) Dans **Top**, il y a des applications bijectives (continues) qui ne sont pas des homéomorphismes.

ii) Dans **Ann**, il existe des monomorphismes qui sont aussi des épimorphismes mais pas des isomorphismes ($\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$).

iii) Dans **Ab**, il existe des épimorphismes qui n'ont pas de section et des monomorphismes qui n'ont pas de rétraction.

Proposition. i) Un morphisme possédant une rétraction est un monomorphisme (dual).

ii) Le composé de deux monomorphismes en est aussi un (dual).

iii) Si $g \circ f$ est un monomorphisme alors f aussi (dual).

1.3. Objets universels

Un objet X de C est *final* si pour tout Y de C, il existe un unique morphisme $Y \longrightarrow X$, appelé *morphisme final*. Il est *initial* si c'est un objet final de C^{op} et on parle alors de *morphisme initial*

Exemples : L'ensemble $\{0\}$ est final dans **Ens** (ou **Top)** et l'ensemble $\emptyset$ est initial. Dans A**-mod**, le module nul est à la fois final et initial. Dans A**-alg**, l'anneau nul est l'objet final et A est l'objet initial. Dans $(A, \leq)$, un plus grand élément est un objet final et un plus petit élément est un objet initial.

Proposition. Un objet final est unique à unique isomorphisme près (dual).

Un objet X de C est un *produit* d'une famille $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ d'objet de C s'il existe une famille $\{p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de morphismes de C appelées *projections* telle que pour toute famille de morphismes $\{f_\alpha : Y \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de C, il existe un unique morphisme $f : Y \longrightarrow X$ tel que, pour tout α, on ait $f_\alpha = p_\alpha \circ f$. C'est une *somme* de la famille $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ si c'est un produit dans C^{op}. On parle alors d'*injections*.

Exemples : Le produit cartésien ΠE_α d'une famille d'ensembles est leur produit dans **Ens** et leur union disjointe $\coprod E_\alpha$ est leur somme. Dans **Top**, on a le même résultat avec la topologie la moins fine (resp. la plus fine) rendant continues les projections (resp. les injections). Dans A-**mod** ou **Gr**, le produit cartésien est toujours le produit mais c'est la somme directe ou le produit libre qui est la somme. Dans A-**alg** aussi, le produit est le produit cartésien, mais la somme de deux anneaux est leur produit tensoriel sur A. Dans $(A, \leq)$, la borne inférieure (resp. supérieure) d'une famille est leur produit (resp. leur somme).

Proposition. i) Si on se donne une famille de morphismes $f_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$ et si X (resp. Y) est produit des X_α (resp. Y_α) avec projections p_α (resp. q_α), alors il existe un unique morphisme $f : X \longrightarrow Y$ tel que $q_\alpha \circ f = f_\alpha \circ p_\alpha$ (dual).

ii) Si X (resp. X') est produit des X_α avec projections p_α (resp. p'_α), alors il existe un unique isomorphisme $f : X \xrightarrow{\sim} X'$ tel que $p'_\alpha \circ f = p_\alpha$ (dual).

iii) Si Y est un produit de X par lui même, il existe un unique $\delta_X : X \longrightarrow Y$ tel que $Id_X = p_1 \circ \delta = p_2 \circ \delta$ (dual).

Exercice : Dans **Top**, X est séparé si et seulement si δ_X est fermée.

Un objet Z est un *noyau* de $f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$ s'il existe un morphisme $i : Z \longrightarrow X$, appelé *inclusion*, tel que $f_1 \circ i = f_2 \circ i$ et que pour tout morphisme $g : T \longrightarrow X$ tel que $f_1 \circ g = f_2 \circ g$, il existe un unique $h : T \longrightarrow Z$ tel que $i \circ h = g$. On dit alors que la suite

$$Z \xrightarrow{i} X \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} Y$$

est *exacte à gauche*. On dit que Z est un *conoyau* de f_1, $f_2 : X \longrightarrow Y$ si c'est un noyau de f_1 , f_2 dans C^{op}. On parle alors de *projection* et de suite exacte *à droite*.

Exemples : Un noyau de $f, g : E \longrightarrow F$ dans **Ens** est donné par $Ker(f, g) := \{x \in X, f(x) = g(x)\}$. Le quotient $Coker(f, g)$ de F par la plus petite relation d'équivalence $\mathscr{R}$ satisfaisant $f(x) \mathscr{R} g(x)$ pour $x \in E$, est un conoyau de f, g. Dans

Top, on trouve les mêmes ensembles avec la topologie induite ou la topologie quotient. Dans A-**mod**, $Ker(f - g)$ est un noyau de f, g et $Coker(f - g)$ est un conoyau de f, g.

Proposition. i) Si Z (resp. Z') est un noyau de $f, g : X \longrightarrow Y$ (resp. $f', g' : X' \longrightarrow Y'$) avec morphisme d'inclusion i' et si $\varphi : X \longrightarrow X'$ et $\psi : Y \longrightarrow Y'$ sont deux morphismes tels que $\psi \circ f = f' \circ \varphi$ et $\psi \circ g = g' \circ \varphi$, alors il existe une unique flèche $\lambda : Z \longrightarrow Z'$ telle que $i' \circ \lambda = \varphi \circ i$ (dual).

ii) Si Z (resp. Z') est un noyau de f, g avec morphisme d'inclusion i (resp. i'), alors il existe un unique isomorphisme $\lambda : Z \xrightarrow{\sim} Z'$ tel que $i' \circ \lambda = i$ (dual).

iii) Si Z est un noyau de $f, g : X \longrightarrow Y$, alors le morphisme d'inclusion $i : Z \longrightarrow X$ est un monomorphisme (dual).

iv) Si Z est un noyau de $f, g : X \longrightarrow Y$ et $j : Y \hookrightarrow Y'$ un monomorphisme, alors Z est aussi un noyau de $j \circ f$ et $j \circ g$. (dual).

On dit que X est un *produit fibré* de $f_1 : X_1 \longrightarrow Y$ et $f_2 : X_2 \longrightarrow Y$ s'il existe $p_1 : X \longrightarrow X_1$ et $p_2 : X \longrightarrow X_2$ satisfaisant $f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$ appelées *projections* tels que pour toute paire de morphismes $g_1 : Z \longrightarrow X_1$ et $g_2 : Z \longrightarrow X_2$ satisfaisant $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$, il existe un unique morphisme $f : Z \longrightarrow X$ tel que $f_1 = p_1 \circ f$ et $f_2 = p_2 \circ f$. On dit alors que le *diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_1} & X_1 \\ \downarrow p_2 & & \downarrow f_1 \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y \end{array}$$

est *cartésien.* On dit que X est un *coproduit fibré* ou une *somme amalgamée* de $f_1 : Y \longrightarrow X_1$ et $f_2 : Y \longrightarrow X_2$ si c'est un produit fibré de f_1 et f_2 dans C^{op}. On parle alors d'*injections* et de *diagramme cocartésien.*

Exemples : Un produit fibré de $f_1 : X_1 \longrightarrow Y$ et $f_2 : X_2 \longrightarrow Y$ dans **Ens**, **Top**, ou A-**mod** est donné par $X_1 \times_Y X_2 := \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2, f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$ avec la structure induite. Une somme amalgamée de $f_1 : Y \longrightarrow X_1$ et $f_2 : Y \longrightarrow X_2$ dans **Ens** ou **Top** est donnée par le quotient de $X_1 \coprod X_2$ par la plus petite relation d'équivalence telle que $f_1(y) \mathcal{R} f_2(y)$ si $y \in Y$.

Proposition. i) Si X (resp. X') est un *produit fibré* de $f_1 : X_1 \longrightarrow Y$ et $f_2 : X_2 \longrightarrow Y$ (resp. $f_1' : X_1' \longrightarrow Y'$ et $f_2' : X_2' \longrightarrow Y'$) avec projections p_1 et p_2 (resp. p_1' et p_2') et si

$\psi : Y \longrightarrow Y'$, $\varphi_1 : X_1 \longrightarrow X'_1$ et $\varphi_2 : X_2 \longrightarrow X'_2$ sont tels que $\psi \circ f'_1 = f_1 \circ \varphi_1$ et $\psi \circ f'_2 = f_2 \circ \varphi_2$, alors il existe un unique morphisme $\varphi : X \longrightarrow X'$ tel que $p'_1 \circ \varphi = \varphi_1 \circ p_1$ et $p'_2 \circ \varphi = \varphi_2 \circ p_2$ (dual).

ii) Si X (resp. X') est un produit fibré de f_1 et f_2 avec projections p_1 et p_2 (resp. p'_1 et p'_2), il existe un unique isomorphisme $\varphi : X \xrightarrow{\sim} X'$ tel que $p'_1 \circ \varphi = p_1$ et $p'_2 \circ \varphi = p_2$ (dual).

iii) Dans un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad ,$$

si f est un monomorphisme, alors f' aussi (dual).

Exercice : Si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f'} & Y \end{array} \quad ,$$

est cocartésien et f est un monomorphisme, alors f aussi dans **Ens**, **Top** ou A-**mod** mais pas dans **Gr** (prendre pour f l'injection de A_4 dans A_5 et pour X un quotient on trivial de A_4).

Proposition. i) Si C possède un objet final 0, un produit fibré de $X \longrightarrow 0$ et $Y \longrightarrow 0$ est un produit de X et Y (dual). D'autre part, 0 est le produit vide (dual).

ii) Si X est un produit de X_1 et X_2, alors un noyau de $f_1 \circ p_1, f_2 \circ p_2 : X \longrightarrow Y$ est un produit fibré de $f_1 : X_1 \longrightarrow Y$ et $f_2 : X_2 \longrightarrow Y$ (dual).

iii) Si Z est un produit de Y par lui même et si $f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$, il existe un unique $f : X \longrightarrow Z$ tel que $p_1 \circ f = f_1$ et $p_2 \circ f = f_2$ et alors, un produit fibré de f et de δ_Y est un noyau de f_1, f_2 (dual).

1.4. Foncteurs

Un *foncteur (covariant)* $F : C \longrightarrow C'$ est une opération qui à tout $X \in C$ associe un objet $F(X) \in C'$ et à toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ associe un morphisme $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$. On demande que $F(Id_X) = Id_{F(X)}$ et que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. On dispose du foncteur identique $Id_C : C \longrightarrow C$ et on peut aussi composer deux foncteurs $F : C \longrightarrow C'$ et $G : C' \longrightarrow C''$ de manière évidente. Un *bifoncteur* est un foncteur $C \times C' \longrightarrow C''$. On définit de manière évidente le *produit* $F_1 \times F_2 : C_1 \times C_2 \longrightarrow C'_1 \times C'_2$ de deux foncteurs $F_1 : C_1 \longrightarrow C'_1$ et $F_2 : C_2 \longrightarrow C'_2$. Si $F : C \longrightarrow C'$ est un foncteur, il lui correspond de manière évidente un foncteur $F^{op} : C^{op} \longrightarrow C'^{op}$. Enfin, on dit aussi qu'un foncteur $F : C^{op} \longrightarrow C'$ est un *foncteur contravariant* de C dans C'.

Exemples : i) On dispose des foncteurs oublis **Top** $\longrightarrow$ **Ens**, A-**mod** $\longrightarrow$ **Ens**, **Gr** $\longrightarrow$ **Ens**, **Ann** $\longrightarrow$ **Mon**. On dispose aussi des foncteurs d'inclusion **Ab** $\hookrightarrow$ **Gr**, **Gr** $\hookrightarrow$ **Mon**, **Comp** $\hookrightarrow$ **Met** et K-**evf** $\hookrightarrow$ K-**ev**. Tout morphisme de monoïdes $G \longrightarrow H$ induit un foncteur $G \longrightarrow H$.

ii) On a le foncteur d'abélianisation $G \longmapsto G^{ab} := G/[G, G]$, **Gr** $\longrightarrow$ **Ab.** On peut aussi considérer le foncteur évident $n \longmapsto A^n$, $\mathbf{Mat}_A \longrightarrow A$-**mod**. On dispose du foncteur Gl^n : **Ann** $\longrightarrow$ **Gr**, et en particulier du foncteur $A \longmapsto A^*$. Il y a aussi le foncteur $M \longmapsto M' := Hom_A(M, A)$, A-**mod** $\longrightarrow$ A-**mod**.

iii) Un foncteur covariant $(A, \leq) \longrightarrow (B, \leq)$ est une application croissante. Toute application continue $f : Y \longrightarrow X$ fournit un foncteur $f^{-1} : Ouv(X) \longrightarrow Ouv(Y)$. On peut considérer la catégorie **Cat** des petites catégories avec pour morphismes les foncteurs. On dispose alors d'un foncteur contravariant $X \longmapsto Ouv(X)$, **Top** $\longrightarrow$ **Cat**.

iv) Si A est un anneau, on peut considérer le bifoncteur $(M, N) \longmapsto Hom_{Ab}(M, N)$ de **Mod-A** $\times$ **Ab** dans A-**mod**, qui est covariant en M et contravariant en N ou le bifoncteur $(M, N) \longmapsto M \otimes_A N$ de **Mod-A** $\times$ A-**mod** dans **Ab** qui est covariant en les deux variables.

v) Si $A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, on dispose du foncteur de restriction des scalaires B-**mod** $\longrightarrow$ A-**mod** et du foncteur d'extension des scalaires A-**mod** $\longrightarrow$ B-**mod**, $M \longmapsto B \otimes_A M$.

vi) On peut considérer les foncteurs $E \longmapsto E^{gros}$ et $E \longmapsto E^{disc}$, **Ens** $\longrightarrow$ **Top** qui munissent un ensemble de la topologie grossière ou discrète et dans l'autre sens, le foncteur $X \longmapsto \pi_0(X)$. On a aussi le foncteur **Ens** $\longrightarrow$ A-**mod** (resp. **Ens** $\longrightarrow$ **Gr**) qui associe à E le A-module libre AE (resp. le groupe libre) sur X. Enfin, on peut considérer le foncteur **Mon** $\longrightarrow$ **Ann** qui associe au monoïde G l'anneau $\mathbb{Z}[G]$.

Proposition. Un foncteur préserve les sections (dual) et les isomorphismes.

Exercice : Un foncteur ne préserve pas toujours les monomorphismes ni les épimorphismes.

Un foncteur $F : C \longrightarrow C'$ est *fidèle* (resp. *pleinement fidèle*) si les applications $f \longrightarrow F(f), Hom(X, Y) \longrightarrow Hom\ (F(X), F(Y))$ sont injectives (resp. bijectives). Il est *essentiellement surjectif* si tout objet de C' est isomorphe à un objet de la forme $F(X)$.

Exemples : Le foncteur d'abélianisation est surjectif. Les foncteurs oubli **Top** $\longrightarrow$ **Ens**, A-**mod** $\longrightarrow$ **Ens**, **Gr** $\longrightarrow$ **Ens**, **Ann** $\longrightarrow$ **Mon** sont fidèles. Le foncteur $\mathbf{Mat}_K \longrightarrow K$-**evf**, $n \longmapsto K^n$, est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

Proposition. i) Le composé de deux foncteurs (pleinement) fidèles est (pleinement) fidèle.

ii) Si C' est une sous-catégorie de C, le foncteur d'inclusion $C' \hookrightarrow C$ est fidèle. Il et pleinement fidèle si et seulement si C' est une sous-catégorie pleine de C.

iii) Si F est pleinement fidèle et $F(X)$ est isomorphe à $F(Y)$, alors X est isomorphe à Y.

iv) Si F est fidèle et $F(f)$ est un monomorphisme alors f est un monomorphisme (dual).

1.5. Transformation naturelle

Étant donnés deux foncteurs $F, G : C \longrightarrow C'$, une *transformation naturelle* $\alpha : F \longrightarrow G$ est une collection de morphismes $\alpha^X : F(X) \longrightarrow G(X)$ tels que pour tout $f : X \longrightarrow Y$, on ait $G(f) \circ \alpha^X = \alpha^Y \circ F(f)$. On définit de manière évidente la notion d'*identité naturelle* Id_F en prenant $Id_F^X = Id^{F(X)}$, la *composée* de deux transformations naturelles en prenant $(\beta \circ \alpha)^X = \beta^X \circ \alpha^X$ et la notion d'*isomorphisme naturel* α en demandant qu'il existe $\beta : G \longrightarrow F$ tel que $\beta \circ \alpha = Id_F$ et $\alpha \circ \beta = Id_G$. On dit qu'un foncteur $F : C \longrightarrow C'$ est une *équivalence de catégories* s'il existe $G : C' \longrightarrow C$ tels que $G \circ F$ soit naturellement isomorphe à Id_C et $F \circ G$ soit naturellement isomorphe à $Id_{C'}$ On dit alors que F et G sont *quasi-inverses*. On dit que C et C' sont *anti-équivalentes* si C^{op} et C' sont équivalentes.

Exemples : $det : Gl^nA \longrightarrow A^*$ définit une transformation naturelle. De même, la projection $G \longrightarrow G^{ab}$ définit une transformation naturelle entre l'identité de **Gr** et le foncteur composé **Gr** $\longrightarrow$ **Ab** $\hookrightarrow$ **Gr.** L'application canonique $M \longrightarrow M''$, $x \longmapsto (u \longmapsto u(x))$ définit une transformation naturelle entre l'identité et le foncteur bidual sur A-**mod**. Le foncteur bidual $E \longmapsto E''$ induit une équivalence entre K-**evf** et elle même. Le foncteur $\mathbf{Mat}_K \longrightarrow$ K-**evf**, $n \longmapsto K^n$ est une équivalence de catégories.

Proposition. Une transformation naturelle α est un isomorphisme si et seulement si pour tout X, l'application α^X en est un.

On dira que α est un *monomorphisme* ou un *épimorphisme* si pour tout X, l'application α^X en est un.

Théorème. Un foncteur est une équivalence de catégories si et seulement si il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

Proposition. i) Si A est une petite catégorie et C une catégorie quelconque, les foncteurs $D : A \longrightarrow C$ forment une catégorie C_A avec pour morphismes les transformations naturelles. Un morphisme T de C_A est un monomorphisme si et seulement T^α en est un pour tout $\alpha \in A$ (dual).

ii) Si A est une petite catégorie et $F : C \longrightarrow C'$ un foncteur, il existe un unique foncteur $F_A : C_A \longrightarrow C'_A$, tel que $F_A(D) = F \circ D$ si $D \in C_A$ et $F_A(T)^\alpha = F(T^\alpha)$ si T est un morphisme de C_A et $\alpha \in A$. On a toujours $(G \circ F)_A = G_A \circ F_A$.

iii) Si $\lambda : A \longrightarrow B$ est un foncteur entre petites catégories, il existe un unique foncteur $\lambda^* : C_B \longrightarrow C_A$ tel que $\lambda^*(D) = D \circ \lambda$ si $D \in C_B$ et $\lambda^*(T)^\alpha = T^{\lambda(\alpha)}$ si T est un morphisme de C_B et $\alpha \in A$. On a toujours $(\mu \circ \lambda)^* = \lambda^* \circ \mu^*$.

iv) Si A et B sont deux petites catégories, le foncteur $(C_A)_B \longrightarrow C_{A \times B}$ qui envoie $D \in (C_A)_B$ sur le foncteur $(\alpha, \beta) \longmapsto D(\beta)(\alpha)$ et $(u, v) \longrightarrow D(\beta')(u) \circ D(v)^\alpha$ est une équivalence de catégories.

1.6. Foncteurs représentables

Si $X \in C$, on définit un foncteur $h_X : C \longrightarrow$ **Ens** en posant $h_X(Y) := Hom(X, Y)$ et $h_X(f)(g) = f \circ g$ si $f : Y \longrightarrow Z$ et $g : X \to Y$. A $f : Y \longrightarrow X$, on associe une transformation naturelle $h_f : h_X \longrightarrow h_Y$ en posant $h_f^Z : h_X(Z) \longrightarrow h_Y(Z),\ g \longmapsto g \circ f$.

Proposition. Si A est une petite catégorie, on obtient un foncteur contravariant $\alpha \longmapsto h_\alpha, A \longrightarrow \mathbf{Ens}_A$.

On dit qu'un foncteur $F : C \longrightarrow \mathbf{Ens}$ est *représentable* s'il est naturellement isomorphe à un foncteur de la forme h_X.

Exemples : Si A est un anneau et S une partie multiplicative de A, le foncteur $B \longmapsto \{\varphi : A \longrightarrow B,\ \varphi(S) \subset B^*\}$ dans la catégorie des anneaux commutatifs est représentable par A_S. Le foncteur oubli sur **Gr** est représentable par $\mathbb{Z}$ et le foncteur oubli sur A-**mod** est représentable par A. Le foncteur oubli sur **Top** est représentable par l'espace ponctuel. Le foncteur oubli sur A-**alg** est représentable par $A[T]$. Si A est un anneau, le bifoncteur $P \longrightarrow Bil(M, N; P)$ de **Mod-**$A \times A$-**mod** dans **Ab** est représenté par $M \otimes_A N$.

Exercice : Le foncteur oubli de la catégorie **Grf** des groupes finis vers **Ens** n'est pas représentable.

Lemme de Yoneda : Soit $F : C \longrightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur et $X \in C$. Soit $s \in F(X)$. Si $Y \in C$, on note $\alpha^Y : h_X(Y) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto F(f)(s)$. Alors α est une transformation naturelle $h_X \longrightarrow F$. De plus, l'application $s \longmapsto \alpha$ ainsi construite est une bijection de $F(X)$ sur la collection des transformations naturelles $h_X \longrightarrow F$ (qui est donc un ensemble).

Proposition. i) Un foncteur $F : C \longrightarrow \mathbf{Ens}$ est représentable si et seulement si il existe $X \in C$ et $s \in F(X)$ tels que pour tout $Y \in C$ et tout $t \in F(Y)$, il existe un unique $f : X \longrightarrow Y$ tel que $F(f)(s) = t$.

ii) Si X et X' représentent le même foncteur à l'aide de s et s', respectivement, alors il existe un unique isomorphisme $f : X \xrightarrow{\sim} X'$ tel que $F(f)(s) = s'$.

iii) Si A est une petite catégorie, alors le foncteur contravariant $\alpha \longmapsto h_\alpha, A \longrightarrow \mathbf{Ens}_A$ est pleinement fidèle(dual).

iv) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de C et $F : C \longrightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur fidèle représentable. Alors f est un monomorphisme si et seulement si $F(f)$ est injective.

Proposition. i) Un objet est final si et seulement si il représente le foncteur contravariant $Y \longmapsto \{0\}$ (dual).

ii) Un objet est un produit des X_α si et seulement si il représente le foncteur $Y \longrightarrow \Pi Hom(Y, X_\alpha)$ (dual).

iii) Un objet est un noyau de $f, g : X \longrightarrow Y$ si et seulement si il représente le foncteur $Z \longmapsto Ker(h_Z^f, h_Z^g)$ (dual).

iv) Un objet est un produit fibré de $f_1 : X_1 \longrightarrow Y$ et $f_2 : X_2 \longrightarrow Y$ si et seulement si il représente le foncteur $Z \longmapsto Hom(Z, X_1) \times_{Hom(Z, Y)} Hom(Z, X_2)$ (dual).

Tout foncteur représentable étant unique à unique isomorphisme près, on parle souvent de l'objet qui le représente. En particulier, on note souvent 0 ou e l'objet final, Ø l'objet initial, Π ou $\times$ le produit (fibré), $\coprod$ la somme (amalgamée), Ker le noyau et $Coker$ le conoyau.

1.7. Limites

Un *diagramme commutatif* X dans C de *base* A est un foncteur D d'une petite catégorie A dans la catégorie C. On dispose du *foncteur diagonal* $\delta_A : C \longrightarrow C_A$, qui à X associe le *diagramme constant* $\underline{X} : \alpha \longmapsto X, u \longmapsto Id_X$. Si D est un diagramme commutatif de base A dans C et si le foncteur composé $h_D \circ \delta_A$ est représentable par X, on dit que X est la *limite inductive* de D et on pose $\varinjlim D := X$. Si D^{op} possède une limite inductive X, on dit que X est la limite projective de D et on pose $\varprojlim D := X$. On parle de limite *finie* si A est finie. Dire que $X = \varprojlim D$ signifie donc qu'il existe un morphisme canonique $S : \underline{X} \longrightarrow D$ tel que si $Y \in C$ et $T : \underline{Y} \longrightarrow D$ est un morphisme, il existe un unique $g : Y \longrightarrow X$ tel que $T = S \circ \underline{g}$.

Se donner un *diagramme commutatif* X dans C de *base* A revient à se donner le *système* suivant : pour tout $\alpha \in A$, un objet $X_\alpha := D(\alpha)$ de C et pour toute flèche $u : \alpha \longrightarrow \beta$, un morphisme $f_u = D(u) : X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ tels que l'on ait toujours $f_{v \circ u} = f_v \circ f_u$. On a alors $X = \varprojlim D$ si et seulement si il existe une famille $\{p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de morphismes de C satisfaisant $f_u \circ p_\alpha = p_\beta$ pour tout $u : \alpha \longrightarrow \beta$, telle que pour toute famille de morphismes $\{f_\alpha : Y \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de C satisfaisant $f_u \circ f_\alpha = f_\beta$, il existe un unique morphisme $f : Y \longrightarrow X$ tel que, pour tout α, on ait $f_\alpha = p_\alpha \circ f$. On écrit parfois $\varprojlim D =: \varprojlim (X_\alpha, f_u)$ ou même $\varprojlim X_\alpha$.

Objet final, produit, noyau et produit cartésien sont des limites projectives. Objet initial, somme, conoyau et somme amalgamée sont des limites inductives. On retrouve la notion classique de limite inductive ou projective en prenant pour base du diagramme un ensemble préordonné $(A, \leq)$. Si celui ci est filtrant (resp. cofiltrant), on parle de *limite inductive filtrante* (resp. *limite projective filtrante*).

Exemples : Dans **Ens**, **Top**, **Gr**, A**-mod** ou A**-alg**, toutes les limites inductives et projectives existent.

Exercice : Si G est un groupe, on peut considérer l'ensemble $\mathcal{N}$ des sous-groupes normaux N de G tels que G/N soit fini (ordonné par inclusion). On dispose d'un diagramme commutatif évident $D : N \longmapsto (G/N)^{disc}$ de base $\mathcal{N}$ à valeur dans **GrT**. La limite projective $\hat{G}$ de ce diagramme est le *complété profini* de G. On dispose d'une morphisme de groupes naturel $G \longrightarrow \hat{G}$ et on dit que G est *profini* si c'est un isomorphisme de groupes. Par exemple, le groupe de Galois d'une extension infinie de corps est profini.

Proposition. Si toutes les limites projectives de base A existent dans C, il existe un unique foncteur noté $\varinjlim_A : C_A \longrightarrow C$, envoyant D sur $\varinjlim_A D$ et le morphisme $T : D \longrightarrow E$ sur l'unique morphisme $f : X = \varinjlim_A D \longrightarrow Y = \varinjlim_A E$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} & \longrightarrow & D \\ \downarrow \underline{f} & & \downarrow T \\ \underline{Y} & \longrightarrow & E \end{array}$$

(dual).

Lemme : Soit $D : \alpha \longmapsto X_\alpha$ un diagramme de C. Si $X' = \prod_\alpha X_\alpha$ et $X'' = \prod_{u:\alpha \to \beta} X_\beta$ on note $p : X' \longrightarrow X''$ l'unique application qui, composée avec la projection $X'' \longrightarrow X_\beta$ donne la projection $X' \longrightarrow X_\beta$ et $f : X' \longrightarrow X''$ l'unique application qui, composée avec la projection $X'' \longrightarrow X_\beta$ donne la composée de la projection $X \longrightarrow X_\alpha$ et de f_u : $X_\alpha \longrightarrow X_\beta$. Si $X = Ker(p, f)$, c'est la limite projective de D.

Proposition. i) Si tous les noyaux et les produits (finis) existent dans C alors toutes les limites projectives (finies) existent dans C (dual).

ii) Si C possède un objet final et si tous les produits fibrés existent dans C, alors toutes les limites projectives finies existent dans C (dual).

Proposition. i) Soient A et B deux petites catégories et $D \in C_{A\times B}$. Si on a pour tout $\alpha \in A, X_\alpha = \varprojlim_B D(\alpha)$, alors $E = \varprojlim_B D$ existe et pour tout $\alpha \in A$, on a $E(\alpha) = X_\alpha$ (dual).

ii) On se donne deux petites catégories A et B et $D \in C_{A\times B}$. Si $E = \varprojlim_B D$ et $X = \varprojlim_A E$, alors $X = \varprojlim_{A\times B} D$ (dual).

On dit qu'un foncteur est *exact à gauche* (resp. *à droite*) s'il commute aux limites projectives (resp. inductives) finies. On dit qu'il est *exact* s'il est exact à droite et à gauche.

Exemples : i) Le foncteur oubli **Top** $\longrightarrow$ **Ens**, le foncteur $E \longrightarrow E^{disc}$ et le foncteur de restriction des scalaires B-**mod** $\longrightarrow$ A-**mod** commutent aux limites inductives et projectives.

ii) Le foncteur $E \longrightarrow E^{gros}$, **Ens** $\longrightarrow$ **Top**, les foncteurs oublis A-**mod** $\longrightarrow$ **Ens**, **Gr** $\longrightarrow$ **Ens**, **Ann** $\longrightarrow$ **Mon**, les foncteurs d'inclusion **Ab** $\longrightarrow$ **Gr** et **Comp** $\hookrightarrow$ **Met** et le foncteur $N \longmapsto Hom_{Ab}(M, N)$, **Ab** $\longrightarrow$ A-**mod** commutent aux limites projectives.

iii) Le foncteur d'extension des scalaires A-**mod** $\longrightarrow$ B-**mod**, le foncteur $E \longrightarrow AE$, **Ens** $\longrightarrow$ **A-mod**, le foncteur "groupe libre engendré" **Ens** $\longrightarrow$ **Gr**, le foncteur $G \longrightarrow A[G]$, **Mon** $\longrightarrow$ **Ann**, le foncteur de complétion **Met** $\longrightarrow$ **Comp**, le foncteur d'abélianisation **Gr** $\longrightarrow$ **Ab** et le foncteur $N \longrightarrow M \otimes_A N$, A-**mod** $\longrightarrow$ **Ab** commutent aux les limites inductives.

iv) Si A est un système inductif filtrant, le foncteur $\varinjlim_A$: **Ens**$_A \longrightarrow$ **Ens** est exact. On a le même résultats avec **A-mod**, **Gr**, **Ann** et A-**alg**. Enfin, les foncteurs oubli **A-mod** $\longrightarrow$ **Ens**, **Gr** $\longrightarrow$ **Ens** et A-**alg** $\longrightarrow$ **Ens** commutent aux limites inductives filtrantes.

Proposition. i) Si tous les noyaux et les produits (resp. les produits finis) existent dans C et si F est un foncteur qui les préserve alors F commute aux limites projectives (resp. est exact à gauche) (dual).

ii) Si C possède un objet final préservé par le foncteur F et si tous les produits fibrés existent dans C et sont préservés par F, alors F est exact à gauche (dual).

Proposition. i) Un foncteur exact à gauche préserve les monomorphismes (dual).

ii) Le foncteur h_X est exact à gauche.

1.8. Foncteurs adjoints

On dit qu'un foncteur $F : C \longrightarrow C'$ est *adjoint à gauche* à un foncteur $G : C' \longrightarrow C$ si les bifoncteurs

$$C^{op} \times C' \longrightarrow \mathbf{Ens},\ (X, Y) \longmapsto Hom(F(X), Y) \text{ et } (X, Y) \longmapsto Hom(X, G(Y))$$

sont naturellement isomorphes. On dit aussi que G est un *adjoint à droite* à F.

Exemples : i) Le foncteur oubli **Top** $\longrightarrow$ **Ens** possède pour adjoint à gauche (resp. à droite) le foncteur $E \longmapsto E^{disc}$ (resp. $E \longmapsto E^{gros}$). Remarquons aussi que le foncteur $E \longmapsto E^{disc}$ possède pour adjoint à gauche le foncteur $X \longmapsto \pi_0(X)$. Le foncteur oubli **A-mod** $\longrightarrow$ **Ens** à pour adjoint à gauche le foncteur qui associe à E le A-module libre AE sur E. De même avec **Gr**. Le foncteur $G \longmapsto \mathbb{Z}[G]$ est adjoint à gauche au foncteur oubli **Ann** $\longrightarrow$ **Mon**.

ii) Le foncteur $G \longmapsto G^{ab}$ est adjoint à gauche au foncteur d'inclusion **Ab** $\hookrightarrow$ **Gr**. Le foncteur de complétion $X \longmapsto \hat{X}$ est adjoint à gauche au foncteur d'inclusion **Comp** $\hookrightarrow$ **Met**.

iii) Si M est un A-module à droite, le foncteur $N \longrightarrow M \otimes_A N$ est adjoint à gauche au foncteur $N \longmapsto Hom_{Ab}(M, N)$. De même, si $A \longrightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux, le foncteur de restriction des scalaires est adjoint à droite au foncteur d'extension des scalaires.

Si F est adjoint à gauche à G, on note α^X l'image de $Id_{F(X)}$ sous l'isomorphisme $Hom(F(X), F(X)) \cong Hom(X, GF(X))$ et β^X l'antécédent de $Id_{G(X)}$ sous l'isomorphisme $Hom(FG(X), X) \cong Hom(G(X), G(X))$. On dit que α et β sont les *morphismes d'adjonctions*.

Exemples : Les morphismes d'adjonctions associés au foncteur oubli **Top** $\longrightarrow$ **Ens** sont outre l'identité Id_X, les morphismes fonctoriels $E^{disc} \longrightarrow E$ et $E \longrightarrow E^{gross}$. Les morphismes d'adjonctions associés au foncteur oubli A-**mod** $\longrightarrow$ **Ens** sont $AM \longrightarrow M$ et $E \longrightarrow AE$. Les morphismes d'adjonctions associés au foncteur d'inclusion $Ab \hookrightarrow Gr$ sont outre l'identité, le morphisme fonctoriel $G \longrightarrow G^{ab}$. Les morphismes d'adjonctions associés au foncteur d'inclusion **Comp** $\hookrightarrow$ **Met** sont l'identité et le morphisme canonique $X \longrightarrow \hat{X}$. Les morphismes d'adjonctions associés au foncteur de restrictions des scalaires sont l'identité et le morphisme $B \otimes_A M \longrightarrow M, g \otimes m \longmapsto gm$.

Proposition. Le foncteur $F : C \longrightarrow C'$ est adjoint à gauche à G si et seulement s'il existe $\alpha : Id_C \longrightarrow GF$ et $\beta : FG \longrightarrow Id_{C'}$ tels que les composés $F \xrightarrow{\alpha} FGF \xrightarrow{\beta} F$ et $G \xrightarrow{\beta} GFG \xrightarrow{\alpha} G$ soient des identités de F et de G, respectivement. Ce sont alors les morphismes d'adjonctions.

Proposition. i) Deux adjoints à gauche à un même foncteur sont naturellement isomorphes (dual).

ii) Si $F : C \longrightarrow C'$ est adjoint à gauche à G et $F' : C' \longrightarrow C''$ est adjoint à gauche à G', alors $F' \circ F$ est adjoint à gauche à $G \circ G'$.

Proposition. i) Un foncteur $G : C' \longrightarrow C$ possède un adjoint F à gauche si et seulement si pour tout $X \in C$ le foncteur $h_X \circ G$ est représentable. Il est alors représenté par $F(X)$ (dual).

ii) Toutes les limites projectives de base A existent dans C si et seulement si le foncteur $X \longmapsto \underline{X}$ possède un adjoint G à droite et alors $G = \varprojlim_A$ (dual) .

Théorème d'extension de Kan : Soit $\lambda : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Pour tout $\beta \in B$, on note A/β la catégorie dont les objets sont les couples $(\alpha, v\colon \lambda(\alpha) \longrightarrow \beta)$ et les morphismes $(\alpha, v) \longrightarrow (\alpha', v')$sont les flèches $u : \alpha \longrightarrow \alpha'$ telles que $v' \notin \lambda(u) = v$. On note $\beta\colon A/\beta \longrightarrow A$, le morphisme $(\alpha, v) \longmapsto \alpha$. Alors $\lambda^* : C_B \longrightarrow C_A$ possède un adjoint $\lambda_!$ à gauche si et seulement si pour tout $E \in C_A$ et tout $\beta \in B$, $\varinjlim_{A/\beta} \beta^*E$ existe et on a alors $\lambda_!E = \varinjlim_{A/\beta} \beta^*E$ (dual).

Proposition. i) Si $F : C \longrightarrow C'$ est adjoint à gauche à G et A est une petite catégorie alors F et G induisent une adjonction entre C_A et C'_A (dual).

ii) Un foncteur ayant un adjoint à gauche préserve les limites projectives (dual).

Proposition. Soit F un foncteur ayant un adjoint G à droite. Alors, G est fidèle (resp. pleinement fidèle) si et seulement si le morphisme d'adjonction $\beta : FG \longrightarrow Id_{C'}$ est un épimorphisme (resp. un isomorphisme). Supposons G pleinement fidèle et soit D un diagramme de C'. Si on a $X = \varinjlim (G \circ D)$, alors $F(X) = \varinjlim D$ et si $X = \varprojlim (G \circ D)$, alors $F(X) = \varprojlim D$ (dual).

Exemple : Le foncteurs d'inclusion **Ab** $\hookrightarrow$ **Gr** est pleinement fidèle et possède l'adjoint à droite $G \longmapsto G^{ab}$. Si D est un diagramme de groupes abéliens et G sa limite inductive dans **Gr**, sa limite dans **Ab** est G^{ab}. Par exemple, si G est le produit libre de deux groupes abéliens G_1 et G_2, alors G^{ab} est la somme directe de G_1 et G_2.

1.8. Structures algébriques dans les catégories (?)

II. Algèbre homologique

2.1. Catégories additives

On se donne une catégorie C telle que le bifoncteur $C^{op} \times C \longrightarrow$ **Ens**, $(M, N) \longmapsto Hom(M, N)$ se factorise par le foncteur oubli **Ab** $\longrightarrow$ **Ens**. Cela signifie que pour tout $M, N \in C$, l'ensemble $Hom(M, N)$ est muni d'une structure de groupe abélien et que l'on a toujours $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ et $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$. Les éléments de $Hom(M, N)$, vu comme groupe abélien, sont appelés *homomorphismes*.

Exemple : Les catégories A-**mod** (et donc aussi **Ab** et K-**ev)** et la catégorie **Tors** des groupes abéliens de torsion.

On dit que $M \in C$ est un *objet nul* si $Id_M = O$.

Proposition. Un objet de C est nul si et seulement il est final (dual).

On note 0 l'objet nul de C s'il existe. On dit que M est une *somme directe* de M_1 et M_2 s'il existe $p_1 : M \longrightarrow M_1$, $p_2 : M \longrightarrow M_2$, $i_1 : M_1 \longrightarrow M$ et $i_2 : M_2 \longrightarrow M$ tels que $p_1 i_1 = Id_{M_1}$, $p_2 i_2 = Id_{M_2}$, $i_1 p_1 + i_2 p_2 = Id_M$.

Proposition. i) On a toujours $p_1 i_2 = 0$ et $p_2 i_1 = 0$.

ii) M est une somme directe de M_1 et M_2 si et seulement si c'est un produit avec p_1 et p_2 pour projections (dual).

On note $M_1 \oplus M_2$ la somme directe de M_1 et M_2 si elle existe. On dit que C est *additive* si elle possède un objet nul et si toutes les sommes directes existent.

Exemple : Les catégories A-**mod** (et donc aussi **Ab** et K-**ev)** et **Tors** sont additives.

Proposition. i) Si C est une catégorie additive, la factorisation du bifoncteur $C \times C \longrightarrow$ **Ens**, $(M, N) \longmapsto Hom(M, N)$ par le foncteur oubli **Ab** $\longrightarrow$ **Ens** est unique.

ii) Si C est additive, C^{op} aussi.

On dit qu'un foncteur $F : C \longrightarrow C'$ entre catégories additives est *additif* si pour tout $M, N \in C$, l'application canonique $Hom(M, N) \longrightarrow Hom(F(M), F(N))$ est un homomorphisme de groupes.

Exemples : i) Si M est un A-module à droite, les foncteurs $N \longrightarrow Hom_{Ab}(M, N)$ et $N \longmapsto M \otimes N$, A-**mod** $\longrightarrow$ **Ab** sont additifs. Les foncteurs de restriction et d'extension des scalaires B-**mod** $\longrightarrow A$-**mod** et A-**mod** $\longrightarrow B$-**mod** sont additifs.

ii) On peut aussi considérer les foncteurs $M \longmapsto M^G = \{m \in M, gm = m \text{ si } g \in G\}$ et $M \longmapsto M_G = M/\{gm - m, g \in G, m \in M\}$qui vont de G-**mod** dans **Ab**.

Proposition. i) Les foncteurs h_M sont additifs.

ii) Un foncteur F est additif si et seulement si il préserve les sommes directes et l'objet nul.

iii) Le composé de deux foncteurs additifs est additif.

Proposition. i) Si un foncteur additif G possède un adjoint F à gauche, celui ci est aussi additif (dual) et les bifoncteurs

$$C^{op} \times C' \longrightarrow \mathbf{Ab},\ (M, N) \longmapsto Hom(F(M), N) \text{ et } (M, N) \longmapsto Hom(M, G(N))$$

sont isomorphes

ii) Soit C une catégorie additive et $G : C' \hookrightarrow C$ un foncteur pleinement fidèle ayant un adjoint F à gauche. Alors, C' est une catégorie additive et F et G sont des foncteurs additifs (dual).

Exemples : i) Les foncteurs $N \longrightarrow M \otimes_A N$ et $N \longrightarrow Hom_{Ab}(M, N)$ sont adjoints et additifs. De même avec les foncteurs de restriction et d'extension des scalaires.

ii) Le foncteur d'inclusion **Tors** $\hookrightarrow$ **Ab** possède un adjoint à droite

2.2. Catégories abéliennes

Soi C une catégorie additive. On appelle *noyau* de f et on note $Kerf$ l'objet $Ker(f, 0)$ s'il existe. De même, le *conoyau* de f est le noyau de f dans C^{op} s'il existe. On se donne maintenant une catégorie additive C dans laquelle tous les homomorphismes possèdent un noyau et un conoyau. Si $N \hookrightarrow M$ est un monomorphisme, on notera M/N son conoyau.

Proposition. i) Toutes les limites projectives finies existent dans C. En particulier, le produit fibré de M_1 et M_2 sur N est le noyau de $M_1 \oplus M_2 \longrightarrow N$ (*dual*).

ii) Soit

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f'} & N' \\ \downarrow u & & \downarrow v \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

un diagramme cartésien. Alors, f est un monomorphisme si et seulement si f' en est un (dual).

Proposition. i) On a $KerId_M = O$ et $Ker\ (0 : M \longrightarrow N) = M$ (dual).

ii) Si $f : M \longrightarrow N$ est un homomorphisme quelconque et si $g : N \hookrightarrow P$ est un monomorphisme, alors $Kergf = Kerf$ (dual).

iii) Un homomorphisme est un monomorphisme si et seulement si son noyau est nul (dual).

iv) Soit $f : M \longrightarrow N$ un homomorphisme, la projection $M \longrightarrow M/Kerf$ admet pour noyau $Kerf$ (dual).

Une *catégorie abélienne* est une catégorie additive avec noyaux et conoyaux dans laquelle tout monomorphisme est un noyau et tout épimorphisme est un conoyau.

Exemple : ***A*-mod** (et donc aussi **Ab** et ***K*-ev**) est une catégorie abélienne.

Dans la suite, C désigne une catégorie abélienne.

Proposition. i) Si $N \hookrightarrow M$ est un monomorphisme, alors N est le noyau de la projection $M \longrightarrow M/N$.

ii) Tout morphisme $f : M \longrightarrow N$ se factorise de manière unique à isomorphisme près en un épimorphisme $M \longrightarrow I$ suivit d'un monomorphisme $I \longrightarrow N$. Cette construction est fonctorielle. On a $I = Kerp$ où $p : N \longrightarrow Coker\ f$ est la projection (dual).

iii) Tout homomorphisme qui est à la fois un épimorphisme et un monomorphisme est un isomorphisme.

iv) Soit

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f'} & N' \\ \downarrow u & & \downarrow v \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

un diagramme cartésien. Si f est un épimorphisme, alors f' aussi et le diagramme est cocartésien (dual).

Si $f : M \longrightarrow N$ se factorise en un épimorphisme $M \longrightarrow I$ suivi d'un monomorphisme $I \hookrightarrow N$, on dit que I est *l'image* de f et on la note Imf.

Exemple : L'image de $f : M \longrightarrow N$ dans A**-mod** est $\{f(m), m \in M\} \subset N$.

2.3. Exactitude

On se fixe toujours une catégorie abélienne C. Si la suite

$$M' \xrightarrow{f} M \underset{0}{\overset{g}{\rightrightarrows}} M''$$

est exacte à gauche, on dit que la suite $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ est *exacte (à gauche)*. On dit que la suite $M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est une *exacte (à droite)* si est exacte à gauche dans C^{op}. Si la suite $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est exacte à gauche et à droite, on dit qu'elle est exacte, que c'est une *suite exacte courte* où que M est une *extension* de M'' par M'. On dit qu'une suite $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ est *exacte en* M si la suite $0 \longrightarrow Imf \longrightarrow M \longrightarrow Img \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte. On dit qu'une suite

$$\cdots \to M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \to \cdots$$

est *exacte* si elle est exacte en chaque M_i.

Proposition. i) La suite $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ est exacte en M si et seulement si $Imf = Kerg$ (dual).

ii) La suite $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ est exacte en M si et seulement si $g \circ f = 0$ et pour tout $h : N \longrightarrow M$ tel que $g \circ h = 0$, il existe un épimorphisme $p : P \longrightarrow N$ tel que $h \circ p$ se factorise par M'.

iii) La suite $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$ est exacte à gauche si et seulement si et seulement si elle est exacte.

iv) La suite $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte si et seulement si et seulement si elle est exacte.

v) La suite évidente $0 \longrightarrow M \longrightarrow M \oplus N \longrightarrow N \longrightarrow 0$ est exacte.

Lemme du serpent : Étant donné un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} & & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & & , \end{array}$$

il existe un unique homomorphisme $\delta : Kerf'' \longrightarrow Cokerf''$ rendant exacte la suite

$$Kerf' \longrightarrow Kerf \longrightarrow Kerf'' \longrightarrow Cokerf\,' \longrightarrow Cokerf \longrightarrow Cokerf''$$

et celui ci est fonctoriel.

On dit que la suite exacte courte $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ est *scindée* s'il existe un morphisme $\varphi : M' \oplus M'' \tilde{\to} M$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M' \oplus M'' & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow\varphi & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Proposition. i) Le morphisme φ est un isomorphisme.

ii) Une suite exacte courte $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ est scindée si et seulement si g est inversible à gauche (dual).

Exercices: i) Il existe des suites exactes non scindées.

ii) Si A est un anneau commutatif intègre tel que toutes les suites exactes de A-**mod** sont scindées, alors A est un corps.

Proposition. i) Un foncteur additif F entre deux catégories abéliennes est exact à gauche si et seulement si il préserve les suites exactes à gauche (dual).

ii) Si C est abélienne et $G : C' \longrightarrow C$ est un foncteur exact pleinement fidèle admettant un adjoint F à gauche, alors C' est aussi abélienne.

2.4. Objets projectifs et injectifs

Soit C une catégorie abélienne. Un objet M de C est *projectif* (resp. *générateur*) si $h_M : C \longrightarrow \mathbf{Ab}$ est exact (resp. fidèle). Un objet P est *injectif* (resp. *cogénérateur*) si c'est un objet projectif (resp. générateur) de C^{op}.

Exemples : i) Les objets injectifs de **Ab** sont les groupes divisibles et les objets projectifs sont les groupes libres. Le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un cogénérateur injectif de **Ab**.

ii) Les objets projectifs de A-**mod** sont les facteurs directs de A-modules libres. Tout module libre est générateur.

Exercice : En général, il existe des A-modules projectifs qui ne sont pas libres ($\mathbb{Z}/2$ vu comme $\mathbb{Z}/6$-module). Il existe des A-modules projectifs qui ne sont pas générateurs (même exemple).

Proposition. i) P est projectif si et seulement si pour tout homomorphisme $f : P \longrightarrow N$ et tout épimorphisme $p : M \longrightarrow N$, il existe un homomorphisme $g : P \longrightarrow M$ tel que $f = p \circ g$ si et seulement si tout épimorphisme $M \longrightarrow P$ possède une rétraction si et seulement si toute suite exacte $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ est scindée (dual).

ii) Toute somme de projectifs est projectif (dual).

iii) Un objet P est générateur si pour tout $f : M \longrightarrow N$ non nul, il existe $g : P \longrightarrow M$ tel que $f \circ g \neq 0$ (dual).

On dit que C a *suffisamment de projectifs* si tout $M \in C$ est un quotient d'un objet projectif P. On dit que C a *suffisamment d'injectifs* si C^{op} a suffisamment de projectifs.

Exemple : A-**mod** a suffisamment de projectifs et d'injectifs.

Proposition. i) Si C a des sommes quelconques et un générateur projectif, elle a suffisamment de projectifs (dual).

ii) Soit F un foncteur additif entre catégories abéliennes possédant un adjoint G à droite. Si G est exact (resp. fidèle), alors F préserve les projectifs (resp. les générateurs) (dual).

2.5. Homologie des complexes

Soit C une catégorie abélienne. Un *complexe* K dans C est une suite infinie

$$\cdots \to K_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} K_i \xrightarrow{d_i} K_{i-1} \to \cdots$$

telle que $d_i \circ d_{i+1} = 0$. On dit que K_i est la composante de degré i et que d_i est la différentielle en degré i. Si $K_i = 0$ pour $i >> 0$ où pour $i << 0$, on omet parfois de les écrire ; en particulier, on peut considérer tout objet de C comme un complexe concentré en degré zéro. On écrit parfois K^i au lieu de K_{-i} et d^i au lieu de K_{-i}. Un *morphisme de complexes* $f : K \longrightarrow L$ est une suite d'homomorphismes $f_i : K_i \longrightarrow L_i$ tels que $d_i \circ f_i = f_{i-1} \circ d_i$ pour tout i. Enfin, on note K^{op} le complexe de C^{op} donné par $K_i^{op} = K^i$ et $d_i^{op} = d^{i+1}$.

Proposition. i) Les complexes forment une catégorie abélienne $K(C)$ dans laquelle les limites projectives finies se calculent arguments par arguments.

ii) Tout foncteur $F : C \longrightarrow C'$ induit un foncteur additif encore noté $F : K(C) \longrightarrow K(C')$.

iii) Le foncteur $K \longmapsto K^{op}$ est une anti-équivalence de catégories entre $K(C)$ et $K(C^{op})$.

iv) Le foncteur d'inclusion $C \hookrightarrow K(C)$ est pleinement fidèle et possède des adjoints à gauche et à droite.

Le i-ème objet d'*homologie* de K est $H_i(K) := Im(Kerd_i \longrightarrow Coker\ d_{i+1})$. On dit que $H^i(K) := H_{-i}(K)$ est le i-ème objet de *cohomologie* de K.

Proposition. i) On a $H_i(K) := Kerd_i/Imd_{i+1}$ (dual).

ii) La suite $0 \longrightarrow H_i(K) \longrightarrow Coker\ d_{i+1} \longrightarrow Kerd_{i-1} \longrightarrow H_{i-1}(K) \longrightarrow 0$ est exacte.

ii) Tout morphisme de complexes $f : K \longrightarrow L$ induit un morphisme $H_i(f) : H_i(K) \longrightarrow H_i(L)$ et on obtient ainsi un foncteur additif $H_i : K(C) \longrightarrow C$.

Enfin, on dit que K est *acyclique* en degré i si $H_i(K) = 0$ (ce qui signifie que la suite est exacte en K_i). On dit que f est un *quasi-isomorphisme* si $H_i(f)$ est un isomorphisme pour tout i.

Proposition. Si $0 \longrightarrow K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte de complexes, il existe un unique homomorphisme $\delta_i : H_i(K'') \longrightarrow H_{i-1}(K')$ rendant exacte la suite

$$H_i(K') \longrightarrow H_i(K) \longrightarrow H_i(K'') \longrightarrow H_{i-1}(K').$$

Cette construction est fonctorielle.

2.6. Homotopie de complexes

Soit C une catégorie abélienne. Si K est un complexe à termes positifs (en bas) de C et M un objet de C, un morphisme $K \longrightarrow M$ s'appelle une *augmentation* à droite. Si c'est un quasi-isomorphisme, on dit que K est une *résolution* de M à gauche. Si tous les termes de K sont projectifs, on parle de *résolution projective*. On dit que K est augmenté à gauche vers M si K^{op} est augmenté à droite vers M dans $K(C^{op})$. On dit alors que K est une *résolution droite* (resp. *injective*) de M si K^{op} est une résolution gauche (resp. *projective*) de M dans $K(C^{op})$.

Proposition. i) Se donner une augmentation $K \longrightarrow M$ revient à se donner un homomorphisme $\varepsilon : K_0 \longrightarrow M$ tel que $\varepsilon \circ d_1 = 0$ (dual).

ii) Dire que K est une résolution de M signifie que la suite

$$\cdots \rightarrow K_2 \xrightarrow{d_2} K_1 \xrightarrow{d_1} K_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

est exacte (dual).

iii) Si C a suffisamment de projectifs, tout objet de C possède une résolution projective (dual).

Exercice: Tout groupe abélien possède une résolution projective à 2 termes. C'est faux en général dans la catégorie A-**mod** ($\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}[X, Y]$).

Un morphisme de complexes $f : K \longrightarrow L$ est *homotopiquement trivial* s'il existe une suite d'homomorphismes $h_i : K_i \longrightarrow L_{i+1}$ tels que $f_i = h_{i-1} \circ d_i + d_{i+1} \circ h_i$ pour tout i. Deux morphismes de complexes $f, g : K \longrightarrow L$ sont *homotopes* si $f - g$ est homotopiquement trivial. On écrit alors $f \sim g$.

Lemme : i) Les morphismes homotopiquement triviaux $f : K \longrightarrow L$ forment un sous-groupe de $Hom(K, L)$.

ii) Si $f : K \longrightarrow L$ ou $g : J \longrightarrow K$ est homotopiquement trivial, alors $g \circ f$ aussi.

On peut définir la catégorie $K(C)/\sim$ des complexes à homotopie près qui a les mêmes objets que $K(C)$ et pour morphismes $Hom(K, L)/\sim$.

Proposition. i) $K(C)/\sim$ est une catégorie additive.

ii) Le foncteur évident $K(C) \longrightarrow K(C)/\sim$ est additif.

iii) Tout foncteur additif $K(C) \longrightarrow K(C')$ induit un foncteur additif $K(C)/\sim \longrightarrow K(C')/\sim$.

On dit que K est *contractile* s'il devient nul dans $K(C)/\sim$ et que f est une *équivalence d'homotopie* si f devient un isomorphisme dans $K(C)/\sim$.

Proposition. i) Le foncteur $H_i : K(C) \longrightarrow C$ se factorise par $K(C)/\sim$.

ii) Tout complexe contractile est acyclique et toute équivalence d'homotopie est un quasi-isomorphisme.

Exercice Dans **Ab**, on peut trouver f et g non homotopes tels que $H_i(f) = H_i(g)$ pour tout i. On peut trouver un complexe acyclique qui n'est pas contractile et un quasi-isomorphisme qui n'est pas une équivalence d'homotopie.

Théorème. Soit $f : M \longrightarrow N$ un homomorphisme, K un complexe à termes projectifs augmenté à droite vers M et L une résolution gauche de N. Alors f se prolonge, de manière unique à homotopie près, en un morphisme de complexes $K \longrightarrow L$ (dual).

Corollaire. Si C a suffisamment d'injectifs, le foncteur H_0 induit une équivalence de catégories entre la sous-catégorie pleine $P(C)/\sim$ de $K(C)/\sim$ formée des résolutions projectives et la catégorie C.

2.7. Foncteurs dérivés

Théorème. Soit C une catégorie abélienne avec suffisamment de projectifs, C' une autre catégorie abélienne et $F : C \longrightarrow C'$ un foncteur additif. Il existe alors, à unique isomorphisme naturel près, un unique foncteur $L_iF : C \longrightarrow C'$ tel que si P une résolution projective de $M \in C$, on ait $L_iFM = H_i(FP)$ (dual).

On dit alors que L_iF est le i-ème *dérivé gauche* de F. Si C a suffisamment d'injectifs, on dit que $R^iF := (L_iF^{op})^{op}$ est le i-ème *dérivé droit* de F. On dit que M est *acyclique* pour F à gauche (resp. à droite) si $L_iFM = 0$ (resp. $R^iFM = 0$) pour tout $i > 0$. On dit qu'une résolution à gauche (resp. à droite) K de M est *F-acyclique* si tous ses termes sont F-acycliques à gauche (resp. à droite). Enfin, on note $Ext^i(M, N) := R^ih_M(N)$.

Exemples : i) On note $Tor_i^A(M, N)$ la valeur en N du i-ème *dérivé gauche* du foncteur $N \longmapsto M \otimes_A N$. On omet A lorsque $A = \mathbb{Z}$ et i lorsque $i = 1$. Le groupe $Tor_i^A(M, N)$ est aussi la valeur en M du i-ème dérivé gauche du foncteur $M \longmapsto M \otimes_A N$. Un A-module N est plat si et seulement si $Tor^A(M, N) = 0$ pour tout M. Un groupe abélien est plat si et seulement si il est sans torsion.

ii) Si M est un G module, on note $H^i(G, M)$ les dérivés droits du foncteur $M \longrightarrow M^G$ et $H_i(G, M)$ les dérivés gauches du foncteur $M \longrightarrow M_G$. On a alors $H^i(G, M) = Ext^i_{\mathbb{Z}[G]}(M, \mathbb{Z})$ et $H_i(G, M) = Tor_i^{\mathbb{Z}[G]}(M, \mathbb{Z})$.

Exercice : Montrer que $Tor_i(M, N) = 0$ et $Ext^i(M, N) = 0$ pour $i \neq 0, 1$ dans **Ab**. Calculer $Tor_1(\mathbb{Z}/p^r, \mathbb{Z}/q^s)$ et $Ext^1(\mathbb{Z}/p^r, \mathbb{Z}/q^s)$ avec p et q premiers distincts dans **Ab**. Calculer $H^i(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z})$ et $H_i(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z})$.

Proposition. i) Le foncteur L_iF est additif (dual).

ii) Si F est exact à droite, alors $L_0F = F$ (dual).

iii) Tout objet projectif est F-acyclique à gauche (dual).

Théorème. Si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte de C, il existe un unique homomorphisme $\delta_i : L_iF(M'') \longrightarrow L_{i-1}F(M')$ rendant exacte la suite

$$L_iF(M') \longrightarrow L_iF(M) \longrightarrow L_iF(M'') \xrightarrow{\delta_i} L_{i-1}F(M').$$

Cette construction est fonctorielle (dual).

Corollaire. Si F est exact à droite et K est une résolution F-acyclique à gauche de M, alors $L_iFM = H_i(FK)$ (dual).

Proposition. i) Si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte de C, il existe un unique homomorphisme $\delta_i : Ext^i(M', N) \longrightarrow Ext^i(M'', N)$ rendant exacte la suite

$$Ext^i(M'', N) \longrightarrow Ext^i(M, N) \longrightarrow Ext^i(M', N) \xrightarrow{\delta_i} Ext^i(M'', N).$$

Cette construction est fonctorielle.

ii) Si P est une résolution projective de M, alors $Ext^i(M, N) = H^i(Hom(P, N))$.

2.8. δ-foncteurs (?)

III. Théorie des Faisceaux

1. Préfaisceaux sur un espace topologique

Un *préfaisceau* à valeurs dans une catégorie C sur un espace topologique X est un foncteur contravariant $\mathcal{F}$ de $Ouv(X)$ dans C. Cela revient donc à se donner pour tout ouvert U de X un objet $\mathcal{F}(U)$ et chaque fois que $V \subset U$, un morphisme (*de restriction*) $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ avec la condition que si $W \subset V$, le composé des morphismes de restrictions $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ et $\mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(W)$ est le morphisme de restriction $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(W)$.

Les préfaisceaux sur X forment une catégorie $C(X)$. Se donner un morphisme de préfaisceaux $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ revient à se donner pour tout ouvert U de X un morphisme $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ de telle sorte que lorsque $V \subset U$, les carrés

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

soient commutatifs.

Tout foncteur $T : C \longrightarrow C'$ fournit un foncteur encore noté $T : C(X) \longrightarrow C'(X)$ tel que $T(\mathcal{F})(U) = T(\mathcal{F}(U))$. Enfin, on dispose pour tout ouvert U de X d'un foncteur évident $C(X) \longrightarrow C, \mathcal{F} \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$. Remarquons aussi que tout préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X induit par restriction un préfaisceau $\mathcal{F}_{|U}$ sur tout ouvert U de X et que l'on a $\Gamma(U, \mathcal{F}_{|U}) = \Gamma(U, \mathcal{F})$.

Exemples : On dira préfaisceau d'ensembles, de groupes abéliens, d'anneaux si C = **Ens**, **Ab** ou **Ann**. Si $s \in \mathcal{F}(U)$, on dit que s est une section de $\mathcal{F}$ sur U et on notera $s_{|V}$ la restriction de s à V. Les foncteurs oubli **Ann** $\longrightarrow$ **Ab** $\longrightarrow$ **Ens** induisent des foncteurs oubli **Ann**$(X) \longrightarrow$ **Ab**$(X) \longrightarrow$ **Ens**(X) et les foncteurs $C(X) \longrightarrow C, \mathcal{F} \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$ commutent aux foncteurs oubli.

Exercice : i) Si E est un ensemble (resp. un espace topologique, etc . . .), on peut définir un préfaisceau en considérant pour chaque ouvert U de X, toutes les applications (resp. applications continues, etc . . .) de U dans E.

ii) Si X est une variété différentiable (resp. analytique réelle, resp. analytique complexe, resp. algébrique), on peut définir un préfaisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ sur X en considérant pour chaque ouvert U de X, toutes les fonctions différentiables, (resp. analytiques, resp. holomorphes, resp. régulières) sur U.

On suppose dorénavant que C possède un objet final 0.

Proposition. i) Un morphisme de préfaisceau $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est un monomorphisme, un épimorphisme ou un isomorphisme si et seulement si pour tout ouvert U de X, le morphisme $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ en est un.

ii) Si les limites inductives (resp. projectives) de base A existent dans C, elles existent aussi dans $C(X)$ et si $\mathcal{F}$ est la limite inductive (resp. projective) d'un système $(\mathcal{F}_\alpha)$, on a pour tout ouvert U de X, $\mathcal{F}(U) = \varinjlim \mathcal{F}_\alpha(U)$ (resp. $\mathcal{F}(U) = \varprojlim \mathcal{F}_\alpha(U)$).

iii) Si C est additive ou abélienne, alors $C(X)$ aussi.

Proposition. i) Le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$, $C(X) \longrightarrow C$ a pour adjoint à gauche le foncteur qui à E associe le préfaisceau constant $\underline{E} : U \longmapsto E$.

ii) Le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$, $C(X) \longrightarrow C$ a pour adjoint à droite le foncteur qui à E associe le préfaisceau constant $X \longmapsto E$ et $U \longrightarrow 0$ si $U \neq X$.

iii) Le foncteur $C \longrightarrow C(X)$, $E \longrightarrow \underline{E}$ possède pour adjoint à gauche le foncteur $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}(\emptyset)$.

Exemples : i) Les foncteurs oubli $\mathbf{Ann}(X) \longrightarrow \mathbf{Ab}(X) \longrightarrow \mathbf{Ens}(X)$ commutent aux limites projectives et aux limites inductives filtrantes.

ii) Les foncteurs $E \longmapsto \underline{E}$ commutent aux foncteurs oubli $\mathbf{Ann} \longrightarrow \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Ens}$.

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux préfaisceaux, on note $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ le préfaisceau $U \longmapsto Hom(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{G}_{|U})$.

2. Fibre, image directe et image inverse pour les préfaisceaux

On suppose dorénavant que les limites inductives filtrantes existent dans C et qu'elles sont exactes. On rappelle aussi qu'il y à un objet final 0 et on supposera aussi l'existence d'un objet initial Ø.

Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue et $f^{-1} : Ouv(Y) \longrightarrow Ouv(X)$, on écrit $f_* = (f^{-1})^* : C(X) \longrightarrow C(Y)$. Si $\mathcal{F} \in C(X)$, on dit que $f_*\mathcal{F}$ est *l'image directe* de $\mathcal{F}$ par f et on a donc pour tout ouvert V de Y, $\Gamma(V, f_*\mathcal{F}) = \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{F})$.

Proposition. i) Le foncteur $f_* : C(X) \longrightarrow C(Y)$ possède un adjoint à gauche $f^\bullet : C(Y) \longrightarrow C(X)$ qui est exact et on a pour tout ouvert U de X, $\Gamma(U, f^\bullet\mathcal{G}) = \varinjlim_{f(U)\subset V} \Gamma(V, \mathcal{G})$.

ii) Si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont deux applications continues, alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ et $(g \circ f)^\bullet = f^\bullet \circ g^\bullet$.

iii) Si les limites projectives quelconques existent dans C, le foncteur $f_* : C(X) \longrightarrow C(Y)$ possède aussi un adjoint $f^!$ à droite.

Exemple : Les foncteur f_* et $f^\bullet$ commutent aux foncteurs oubli $\mathbf{Ann}(X) \longrightarrow \mathbf{Ab}(X) \longrightarrow \mathbf{Ens}(X)$.

Proposition. i) Si $i : Y \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'un sous-espace, alors i_* est pleinement fidèle.

ii) Si $j : U \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert de X, on a $j^\bullet\mathcal{F} = \mathcal{F}_{|U}$. Le foncteur $j^\bullet$ possède pour adjoint à gauche le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto j_\bullet\mathcal{F}$ avec $(j_\bullet\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(V)$ si $V \subset U$ et Ø sinon. Ce dernier est pleinement fidèle et commute à toutes les limites.

Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau sur X et $i_x : 0 \hookrightarrow X$, $0 \longmapsto x$ on dit que $\mathcal{F}_x := (i_x^\bullet\mathcal{F})(0)$ est la *fibre* de $\mathcal{F}$ en x. On obtient ainsi un foncteur $\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}_x$, $C(X) \longrightarrow C$

Exemple : Le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}_x$ commute aux foncteurs oubli $\mathbf{Ann} \longrightarrow \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Ens}$.

Exercice : Si X est une variété différentiable (resp. analytique réelle, resp. analytique complexe, resp. algébrique), alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est l'anneau des germes de fonctions différentiables, (resp. analytiques, resp. holomorphes, resp. régulières) en x.

Proposition. i) On a $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x\in U} \mathcal{F}(U)$ et le foncteur fibre $\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}_x$, $C(X) \longrightarrow C$ est exact et avec pour adjoint à droite le foncteur qui à E associe le préfaisceau (*gratte ciel*) $U \longmapsto E$ si $x \in U$ et 0 sinon.

ii) Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Si $\mathcal{G}$ est un préfaisceau sur Y, on a $(f^{\bullet}(\mathcal{G}))_x = \mathcal{G}_{f(x)}$.

iii) Si $i : Y \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'un sous-espace, alors pour tout point x de Y, on a $(i_*\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_x$.

iv) Si $j : U \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert de X, alors $(j_!\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_x$ si $x \in U$ et $\emptyset$ sinon.

Exemple : Le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}_x$ commute aux foncteurs oubli $\mathbf{Ann}(X) \longrightarrow \mathbf{Ab}(X) \longrightarrow \mathbf{Ens}(X)$.

3. Faisceaux sur un espace topologique

On suppose maintenant que toutes les limites projectives existent dans C.

Si $\{U_\alpha\}$ est un recouvrement ouvert d'un ouvert U de X, les morphismes de restriction induisent un morphisme $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_\alpha \mathcal{F}(U_\alpha)$. On dit que $\mathcal{F}$ est *séparé* si c'est un monomorphisme. On a aussi deux morphismes $\prod_\alpha \mathcal{F}(U_\alpha) \longrightarrow \prod_{\alpha,\beta} \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$ selon que l'on prenne la restriction par rapport à la première variable ou par rapport à la seconde. On dit que $\mathcal{F}$ est un *faisceau* si pour tout recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ d'un ouvert U de X, la suite

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_\alpha \mathcal{F}(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

est exacte. Cela implique en particulier que $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$.

Exemple : Lorsque $C = \mathbf{Ens}$, $\mathbf{Ab}$ ou $\mathbf{Ann}$, on voit que $\mathcal{F}$ est un faisceau si et seulement si il satisfait la propriété suivante : Si on se donne un ouvert U de X, un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de U et pour tout α, une section s_α de $\mathcal{F}$ sur U_α de telle sorte que pour tout α, β, on ait $s_{\alpha|U_\alpha \cap U_\beta} = s_{\beta|U_\alpha \cap U_\beta}$, alors il existe une unique section s de $\mathcal{F}$ sur U tel que pour tout α, on ait $s_{|U_\alpha} = s_\alpha$.

Exercice : i) Si E est un ensemble (resp. un espace topologique), le préfaisceau qui envoie un ouvert U de X sur l'ensemble des applications (resp. applications continues) de U dans E est un faisceau.

ii) Si X est une variété différentiable (resp. analytique réelle, resp. analytique complexe, resp. algébrique), $\mathcal{O}_X$ est un faisceau d'anneaux.

On note $\mathbf{FC}(X)$ la sous-catégorie pleine de $C(X)$ formée des faisceaux sur X et on rappelle que les toutes les limites inductives filtrantes existent dans C et sont exactes. A tout préfaisceau $\mathcal{F}$, on associe un préfaisceau $\mathcal{F}^+$ en posant

$$\mathcal{F}^+(U) = \varinjlim(Ker \prod_{\alpha}\mathcal{F}(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)],$$

la limite inductive étant prise sur tous les recouvrements $\{U_\alpha\}$ de U.

Lemme : Le préfaisceau $\mathcal{F}^+$ est séparé. C'est un faisceau si $\mathcal{F}$ est séparé.

Théorème. Le foncteur d'inclusion $i_X : \mathbf{F}C(X) \hookrightarrow C(X)$ possède un adjoint à gauche $a_X : C(X) \hookrightarrow \mathbf{F}C(X)$ qui est exact.

Exemple : Les foncteurs oubli $\mathbf{Ann}(X) \longrightarrow \mathbf{Ab}(X) \longrightarrow \mathbf{Ens}(X)$ induisent des foncteurs oubli $\mathbf{FAnn}(X) \longrightarrow \mathbf{FAb}(X) \longrightarrow \mathbf{FEns}(X)$ et les foncteurs i_X et a_X commutent aux foncteurs oubli.

Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau sur X, on dit que $a_X(\mathcal{F})$ est le *faisceau associé* à $\mathcal{F}$.

Proposition. i) Un morphisme de faisceaux $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est un monomorphisme ou un isomorphisme si et seulement si pour tout ouvert U de X, le morphisme $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ en est un.

ii) Toutes les limites projectives existent dans $\mathbf{F}C(X)$ et si $\mathcal{F}$ est la limite projective d'un système $(\mathcal{F}_\alpha)$ de faisceaux, alors pour tout ouvert U de X, $\mathcal{F}(U) = \varprojlim \mathcal{F}_\alpha(U)$.

iii) Si les limites inductives de base A existent dans C, elles existent aussi dans $\mathbf{F}C(X)$ et la limite inductive $\mathcal{F}$ d'un système $(\mathcal{F}_\alpha)$ de faisceaux sur X est le faisceau associé au préfaisceau $U \longmapsto \varinjlim \mathcal{F}_\alpha(U)$.

iv) Si C est additive ou abélienne, alors $\mathbf{F}C(X)$ aussi.

Exercice : Un morphisme de faisceaux d'ensembles $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est un épimorphisme si et seulement si pour toute section t de $\mathcal{G}$ sur un ouvert U de X, il existe un recouvrement $\{U_\alpha\}$ de U et des sections s_α de $\mathcal{F}$ sur U_α telles que $\varphi(s_\alpha) = t_{|U_\alpha}$.

Proposition. i) Le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$, $\mathbf{F}C(X) \longrightarrow C$ admet pour adjoint à gauche le foncteur $E \longmapsto E_X$, $C \longrightarrow \mathbf{F}C(X)$ ou E_X est le faisceau associé au préfaisceau constant $U \longmapsto E$.

ii) Si U est un ouvert de X et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X, alors $\mathcal{F}_{|U}$ est un faisceau.

iii) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux faisceaux, alors $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est aussi un faisceau.

iv) Le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto \Gamma(0, \mathcal{F})$, $\mathbf{F}C(0) \longrightarrow C$ est une équivalence de catégories.

On dit que $E_{\underline{X}}$ est le *faisceau constant* sur X associé à E.

Exercice : Si E est un ensemble, alors $E_X(U) = Hom_{\mathbf{Top}}(U, E^{disc})$.

4. Fibre, image directe et image inverse pour les faisceaux.

Proposition. i) Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X, alors $f_*\mathcal{F}$ est aussi un faisceau et on a donc un foncteur $f_* : \mathbf{F}C(X) \longrightarrow \mathbf{F}C(Y)$.

ii) Le foncteur $f_* : \mathbf{F}C(X) \longrightarrow \mathbf{F}C(Y)$ possède un adjoint à gauche $f^{-1} : \mathbf{F}C(Y) \longrightarrow \mathbf{F}C(X)$ qui est exact. Si $\mathcal{G}$ est un faisceau, alors $f^{-1}\mathcal{G}$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \longrightarrow \varinjlim_{f(U)\subset V} \Gamma(V, \mathcal{G})$.

iii) Si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont deux applications continues, alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Proposition. i) Soit $i : Z \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'un fermé de X. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X, alors $i^!\mathcal{F}$ est un faisceau et on obtient ainsi un foncteur $i^! : \mathbf{F}C(X) \longrightarrow \mathbf{F}C(Z)$ qui est adjoint à droite à i_*.

ii) Si $j : U \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert de X, le foncteur j^{-1} possède pour adjoint à gauche le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto j_!\mathcal{F}$ où $j_!\mathcal{F}$ est le faisceau associé à $V \longmapsto \mathcal{F}(V)$ si $V \subset U$ et Ø sinon. Celui ci est pleinement fidèle et exact.

Exemple : Les foncteur f_* et f^{-1} commutent aux foncteurs oubli $\mathbf{FAnn}(X) \longrightarrow \mathbf{FAb}(X) \longrightarrow \mathbf{FEns}(X)$.

Proposition. i) Le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}_x$, $\mathbf{F}C(X) \longrightarrow C$ est exact avec pour adjoint à droite le foncteur qui envoie E sur le faisceau $U \longmapsto E$ si $x \in U$ et 0 sinon.

ii) Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue et $\mathcal{G}$ un faisceau sur Y, alors $(f^{-1}(\mathcal{G}))_x = \mathcal{G}_{f(x)}$.

iii) Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau sur X, alors $(a_X\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_x$.

Proposition. i) Si $i : Z \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'un fermé et $\mathcal{F}$ un faisceau sur Z, alors $(i_*\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_x$ si $x \in Z$ et 0 sinon.

ii) Si $j : U \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert de X et $\mathcal{F}$ un faisceau sur U, alors $(j_!\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_x$ si $x \in U$ et Ø sinon.

Proposition. i) Si X est discret, on a une équivalence de catégories $\mathbf{F}C(X) \longrightarrow C_X$, $\mathcal{F} \longmapsto (\mathcal{F}_x)_{x \in X}$.

ii) Si $\varphi, \psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ sont deux morphismes de faisceaux tels que $\varphi_x = \psi_x$, pour tout x, alors $\varphi = \psi$.

iii) Si $u : X^{disc} \longrightarrow X$ est l'application canonique, alors u^{-1} est pleinement fidèle.

Exemple : Le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}_x$ commute aux foncteurs oubli $\mathbf{FAnn}(X) \longrightarrow \mathbf{FAb}(X) \longrightarrow \mathbf{FEns}(X)$.

Proposition. On suppose que C est une catégorie abélienne. Alors,

i) Un faisceau $\mathcal{F}$ est nul si et seulement si pour tout $x \in X$, $\mathcal{F}_x$ est nul.

ii) Un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est nul (resp. un monomorphisme, resp. un épimorphisme, un isomorphisme) si et seulement si pour tout $x \in X$, $\varphi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ est nul (resp. un monomorphisme, un épimorphisme, un isomorphisme).

iii) Une suite $\mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}''$ est exacte en $\mathcal{F}$ si et seulement si pour tout $x \in X$, la suite $\mathcal{F}'_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}''_x$ est exacte en $\mathcal{F}_x$.

Proposition. On suppose C abélienne.

i) Soit U un ouvert de X et Z le fermé complémentaire. On note $i : Z \hookrightarrow X$ et $j : U \hookrightarrow X$ les applications d'inclusion. Alors, la suite

$$0 \longrightarrow j_!j^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_*i^*\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

est exacte.

ii) Si $X = X_1 \cup X_2$ avec X_1 et X_2 fermés dans X, et si on note par i_1, i_2 et i_{12} les inclusions respectives de X_1, X_2 et $X_1 \cap X_2$ dans X, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_{1*}i_1^*\mathcal{F} \oplus i_{2*}i_2^*\mathcal{F} \longrightarrow i_{12*}i_{12}^*\mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

On dit qu'un faisceau $\mathcal{F}$ est *flasque* si pour tout ouverts U de X, l'application de restriction $\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ est un épimorphisme.

Proposition. i) Si $\mathcal{F}$ est flasque, alors $f_*\mathcal{F}$ aussi.

ii) Si la topologie de X est discrète, tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X est flasque.

iii) Tout faisceau est un sous-faisceau d'un faisceau flasque.

5. Faisceaux de modules

Un *espace annelé* est un couple formé d'un espace topologique X et d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ sur X. Si U est un ouvert de X, on munit U du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_{X|U}$.

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. Un *$\mathcal{O}_X$-module à gauche* est un faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$ muni d'une loi de composition externe $\mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ qui fait, pour tout ouvert U de X, de $\mathcal{F}(U)$ un $\mathcal{O}_X(U)$-module à gauche. Un *homomorphisme* entre deux $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ qui induit pour tout U, un homomorphisme de $\mathcal{O}_X(U)$-modules $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$. On note $\mathcal{O}_X$**-mod** la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules à gauche. Si U est un ouvert de X et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module, alors $\mathcal{F}_{|U}$ est de manière naturelle un $\mathcal{O}_U$-module. Pour tout ouvert U de X, le foncteur $\mathcal{F} \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$ induit un foncteur $\mathcal{O}_X$**-mod** $\longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$**-mod**. On définit de même la catégorie **Mod-**$\mathcal{O}_X$ des $\mathcal{O}_X$-modules à droite.

Proposition. i) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens tels que pour tout ouvert U, $\mathcal{F}(U)$ soit muni d'une structure de $\mathcal{O}_X(U)$-module à gauche. Alors $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module si et seulement pour tout $V \subset U$, l'application $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ est $\mathcal{O}_X(U)$-linéaire.

ii) Le foncteur oubli $\mathbb{Z}_X$**-mod** $\longrightarrow$ **FAb**(X) est une équivalence de catégories.

iii) Toutes les limites projectives et inductives existent dans $\mathcal{O}_X$**-mod**. De plus, on a toujours $(\varprojlim \mathcal{F}_\alpha)(U) = \varprojlim \mathcal{F}_\alpha(U)$ et $\varinjlim \mathcal{F}_\alpha$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \longmapsto \varinjlim \mathcal{F}_\alpha(U)$.

Proposition. i) Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module à droite et $\mathcal{G}$ un faisceau abélien, alors $\mathcal{H}om_{\mathbf{Ab}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est de manière naturelle un $\mathcal{O}_X$-module à gauche.

ii) Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module à droite, le foncteur $\mathcal{G} \longmapsto \mathcal{H}om_{\mathbf{Ab}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $\mathbf{FAb}(X) \longrightarrow \mathcal{O}_X$**-mod** possède pour adjoint à gauche le foncteur $\mathcal{G} \longmapsto \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ où $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ est le faisceau abélien associé à $U \longmapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$. On écrira $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ si $\mathcal{O}_X = \mathbb{Z}_X$.

Proposition. i) Le foncteur oubli $\mathcal{O}_X$**-mod** $\longrightarrow$ $\mathbf{FAb}(X)$ est fidèle, commute à toutes les limites et possède pour adjoint à gauche le foncteur $\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{G}$.

ii) La catégorie $\mathcal{O}_X$**-mod** est abélienne.

iii) Si $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, le foncteur $\mathcal{F} \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F})$, $\mathcal{O}_X$**-mod** $\longrightarrow$ A**-mod** possède pour adjoint à gauche le foncteur $M \longmapsto \mathcal{O}_X \otimes_A M := \mathcal{O}_X \otimes_{A_X} M_X$.

iv) On a $\Gamma(X, \mathcal{F}) \cong Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$.

Proposition. i) Soit $f : Y \longrightarrow X$ une application continue. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module, alors $f^{-1}\mathcal{F}$ a une structure naturelle de $f^{-1}\mathcal{O}_X$-module et on a un isomorphisme fonctoriel $Hom_{f^{-1}\mathcal{O}_X}(f^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$.

ii) Soit $j : U \longrightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_U$-module, alors $j!\mathcal{F}$ a une structure naturelle de $\mathcal{O}_X$-module et on a un isomorphisme fonctoriel $Hom_{\mathcal{O}_X}(j_!\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong Hom_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}, j^*\mathcal{G})$.

iii) Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module et $x \in X$, alors $\mathcal{F}_x$ est de manière naturelle un $\mathcal{O}_{X,x}$-module et on obtient ainsi un foncteur $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_x$, $\mathcal{O}_X$**-mod** $\longrightarrow$ $\mathcal{O}_{X,x}$**-mod**.

Proposition. Soit $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules avec $\mathcal{F}'$ flasque. Alors

i) Pour tout ouvert U de X, la suite $0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}''(U) \longrightarrow 0$ est exacte.

ii) Le faisceau $\mathcal{F}''$ est flasque si et seulement si $\mathcal{F}$ est flasque.

Si Z est un fermé de X, on pose $\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) := Ker\ (\Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}))$ où U est l'ouvert complémentaire de Z dans X.

Proposition. i) Si X' est un ouvert de X contenant Z, alors $H^i_Z(X', \mathcal{F}) = H^i_Z(X, \mathcal{F})$.

i) Si $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules avec $\mathcal{F}'$ flasque, alors la suite $0 \longrightarrow \Gamma_Z(X, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma_Z(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_Z(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0$ est exacte.

Proposition. i) La catégorie $\mathcal{O}_X$-**mod** a suffisamment d'injectifs.

ii) Si $\mathcal{I}$ est un $\mathcal{O}_X$-module injectif, il en va de même de $\mathcal{I}_{|U}$ pour tout ouvert U de X.

ii) Un $\mathcal{O}_X$-module injectif est flasque.

6. Cohomologie des faisceaux

On note $H^i(X, -)$ les foncteurs dérivés de $\Gamma(X, -) : \mathcal{O}_X$-**mod** $\longrightarrow A$-**mod** où $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Proposition. i) Les faisceaux flasques sont acycliques pour $\Gamma(X, -)$.

ii) Les $H^i(X, -)$ sont aussi les foncteurs dérivés de $\Gamma(X, -)$: $\mathbf{FAb}(X) \longrightarrow$ **Ab**.

iii) On a un isomorphisme fonctoriel $H^i(X, \mathcal{F}) \cong Ext^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$.

iv) (Mayer-Vietoris) Si $X = X_1 \cup X_2$ avec X_1 et X_2 fermés dans X, et si on note par i_1, i_2 et i_{12} les inclusions respectives de X_1, X_2 et $X_1 \cap X_2$ dans X, on a une suite exacte longue

$$H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X_1, i_1^*\mathcal{F}) \oplus H^i(X_2, i_2^*\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X_1 \cap X_2, i_{12}^*\mathcal{F}) \longrightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{F})$$

Exercice : i) Montrer que $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$ si X est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que $H^1(S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

ii) Montrer et que si $\mathcal{C}$ désigne le faisceau des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $H^1(X, \mathcal{C}) = 0$ pour tout intervalle X de S^1.

On note $H^i_Z(X, -)$ le -ième foncteur dérivé gauche de $\Gamma_Z(X, -)$.

Proposition. i) Les faisceaux flasques sont acycliques pour $\Gamma_Z(X, -)$.

ii) On a toujours une suite exacte longue

$$H^i_Z(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(U, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{i+1}_Z(X, \mathcal{F}).$$

iii) Si X' est un ouvert de X contenant Z, alors $H^i_Z(X', \mathscr{F}) = H^i_Z(X, \mathscr{F})$.

Exercice : i) Montrer que $\Gamma_x(X, \mathbb{Z}) = 0$ et que $H^1_x(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ lorsque X est un intervalle de $\mathbb{R}$. Retrouver l'isomorphisme $H^1(S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

ii) Calculer $\Gamma_x(X, \mathscr{C}) = 0$ et $H^1_x(X, \mathscr{C})$ lorsque X est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Cohomologie de Cech (?)

Ext locaux (?).

7. Morphismes d'espaces annelés, images directes supérieures (?)

BIBLIOGRAPHIE :

R. Godement : *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris (1958)

A. Grothendieck et J.-A. Dieudonné : *Éléments de géométrie algébrique I*, Chap. 0, § 1, 3, 4 & 5, Springer (1971)

R. Hartshorne : *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer, Berlin (1977).

S. Mac Lane : *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics 5, Springer, Berlin (1971)

J. R. Strooker : *Introduction to categories, homological algebra and sheaf cohomology*, Cambridge university press (1978)

REBUT

Morphismes d'espaces annelés :

Un *morphisme d'espaces annelés* est un couple formé d'une application continue $f : X \longrightarrow Y$ et d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $f^* : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_* \mathcal{O}_X$. On compose ce morphisme avec un morphisme $g : Y \longrightarrow Z$ en composant f avec g et $g^* : \mathcal{O}_Z \longrightarrow g_* \mathcal{O}_Y$ avec $g_*(f^*) : g_* \mathcal{O}_Y \longrightarrow g_* f_* \mathcal{O}_X = (g \circ f)_* \mathcal{O}_X$. On obtient ainsi une catégorie. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme d'espaces annelés, alors $f_* \mathcal{F}$ est de manière naturelle un $f_* \mathcal{O}_X$-module et donc aussi un $\mathcal{O}_Y$-module. On obtient ainsi un foncteur $f_* : \mathcal{O}_X$-**mod** $\longrightarrow \mathcal{O}_Y$-**mod**.

Proposition. i) Le foncteur $f_* : \mathcal{O}_X$-**mod** $\longrightarrow \mathcal{O}_Y$-**mod** possède un adjoint f^* à gauche.

ii) Si $g : Y \longrightarrow Z$ est une autre application continue, alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ et $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.