- Exercice 1

  1. On a $X^2-sX+p=(X-z)(X-z')$ et donc, en développant, $s=z+z'$ et $p=zz'$. Alternativement, on a $z=(s+\delta)/2$ et $z'=(s-\delta)/2$ avec $\delta^2=s^2-4p$ si bien que $z+z'=s$ et $zz'=(s^2-\delta^2)/4=p$.
  2. L'hypothèse nous dit que les solutions sont les mêmes et on peut donc appliquer le résutat précédent. Autrement dit, si on appelle z_1, z_1' les solutions de la première et z_2, z_2' les solutions de la seconde équation, alors $z_1=z_2$ et $z_1'=z_2'$ (ou le contraire) et donc $s_1=z_1+z_1'=z_2+z_2'=s_2$ ainsi que $p_1=z_1z_1'=z_2z_2'=p_2$.

- Exercice 2

  1. Supposons que $A\cap B\subset A\cap C$. Soit $x\in A\setminus C$. Alors $x\in A$. Si $x\in B$, alors $x\in A\cap B$ et donc $x\in A\cap C$ si bien que $x\in C$. Contradiction. Donc $x\notin B$. Donc $x\in A\setminus B$. Donc $A\setminus C\subset A\setminus B$.
  2. Supposons que $A\cap B=A\cap C$ et $B\setminus A=C\setminus A$. Soit $x\in B$. Si $x\in A$, alors $x\in A\cap B$ et donc $x\in A\cap C$ si bien que $x\in C$. Sinon, $x\in B\setminus A$ et donc $x\in C\setminus A$ si bien que $x\in C$ aussi. On a donc $B\subset C$ et, par symmétrie, $B=C$.

- Exercice 3

  1. $f(]0,2\pi[\cup\{-2\})=]0,\frac{\pi}{2}+1[\cup\{4\}$ et $f^{-1}([-1,\frac{\pi}{2}+1[)\cap[0,2\pi]=[0,2\pi[$.
  2. (a) Pour $x\neq-1$, on aura

     $$\begin{aligned} x\in g^{-1}(\{y\}) &\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}=y \\ &\Leftrightarrow x-1=(x+1)y \\ &\Leftrightarrow x(1-y)=1+y \\ &\Leftrightarrow x=\frac{1+y}{1-y} \text{ et } y\neq 1 \end{aligned}$$

     si bien que

     $$g^{-1}(\{y\})=\left\{\frac{1+y}{1-y}\right\} \text{ si } y\neq 1 \text{ et } \emptyset \text{ sinon.}$$

     (b) En effet : si $y\in\mathbb{R}$, alors $g^{-1}(\{y\})$ a au plus un élément.