Université de Rennes — UFR Mathématiques Jeudi 2 mai 2024

NOM : .... **Prénom : ....**

Nř étudiant : .... **GROUPE : ....**

Outils Mathématiques 2 - CC4

La consultation de documents et/ou l'utilisation d'outils électroniques sont prohibées.
Durée : 30 minutes.

Le sujet comporte 4 exercices indépendants, sur 2 pages.
Dans la notation, une importance sera accordée à la qualité de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1. (3 points)

Soit f l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ -x+3y+2z \\ 4y-z \end{pmatrix}$.

Trouver la matrice associée à f dans la base canonique.

Solution. On calcule $f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3})$:

— $f(\vec{e_1}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

— $f(\vec{e_2}) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

— $f(\vec{e_3}) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc

$$\mathrm{mat}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}(f) = \big(f(\vec{e_1})\big|f(\vec{e_2})\big|f(\vec{e_3})\big) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (5 points)

Soit $\theta \in [-\pi, \pi[$ et la matrice $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

(a) Donner une interprétation géométrique de l'application linéaire dont R est la matrice associée dans la base canonique.

Solution. La matrice R correspond à la matrice de rotation dans $\mathbb{R}^2$ d'angle θ.

(b) En déduire la matrice inverse R^{-1} en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sans calcul (mais en justifiant votre résultat).

Solution. Puisque R correspond à une rotation d'angle θ, la rotation d'angle opposé correspond à l'opération inverse de celle de R. On rappelle que le sinus est impair et que le cosinus est pair, i.e.

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta) \quad \text{et} \quad \cos(-\theta) = \cos(\theta),$$

et on trouve alors

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Exercice 3. (6 points)
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, et $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, définis par $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer qu'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $M\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$ et $M\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$ et donner leur valeur.

Solution. On calcule :

$$M\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times \vec{v}_1 \implies \lambda_1 = 0,$$

et

$$M\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} = (-3) \times \vec{v}_2 \implies \lambda_2 = -3.$$

(b) En déduire une matrice P (supposée inversible) et une matrice D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$ (on ne calculera pas P^{-1}).

Solution. On sait que

$$P = \text{mat}_{(e_1,e_2)\to(\vec{v}_1,\vec{v}_2)} = \big((\vec{v}_1)_{(e_1,e_2)}\big|(\vec{v}_2)_{(e_1,e_2)}\big) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} D &= \text{mat}_{(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}(f) = \big((f(\vec{v}_1))_{(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\big|(f(\vec{v}_2))_{(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\big) = \big((M\vec{v}_1)_{(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\big|(M\vec{v}_2)_{(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\big) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 4. (6 points)
Calculer le déterminant des matrices suivantes et dire si elles sont inversibles (justifier votre réponse).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 25 & 112 \\ 0 & 2 & 85 & -\sqrt{\pi} \\ 0 & 0 & 3 & 2024 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution. On utilise les formules du cours :

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

Notons $B = (C_1|C_2|C_3)$, avec C_i la i-ème colonne de B, alors

$$\det B = \det(C_1|C_2|C_3) = \det(C_1 - C_3|C_2|C_3) = \det(0|C_2|C_3).$$

En développant selon la première colonne, on obtient immédiatement $\det B = 0$.

La matrice C est triangulaire, donc son déterminant correspond au produit de ses éléments diagonaux :

$$\det C = -6.$$